M. PREDA
F. MANEA
P. CRISTEA
M. LEON
F. SPINEI

Electrotehnică

PROBLEME

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ - BUCUREȘTI 1986

Scanned with OKEN Scanner

M. PREDA
F. MANEA
P. CRISTEA
M. LEON
F. SPINEI

Electrotehnică

PROBLEME

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ, BUCUREŞTI — 1966

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Aplicațiile tehnice ale fenomenelor electromagnetice au o importanță din ce în ce mai mare în toate sectoarele industriei, în știință și în viața cotidiană a omului. Alimentarea cu energie electrică, utilizarea largă a măsurilor și acționărilor electrice, electronica și telecomunicațiile, marea importanță a automatizării impun ca fiecare inginer, independent de specialitatea sa, să cunoască temeinic legile cîmpului electromagnetic și metodele fundamentale de calcul ale teoriei circuitelor electrice.

Experiența arată că o astfel de pregătire este imposibilă fără rezolvarea unor probleme de către fiecare student. Folosirea noțiunilor noi, prezentate în cadrul cursului, repetarea lor sistematică în procesul de gîndire necesar rezolvării fiecărei probleme sînt indispensabile pentru însușirea aprofundată a oricărei discipline, și în special a unei discipline cu numeroase elemente abstracte cum este electrotehnica.

Volumul Probleme de electrotehnică — *elaborat în cadrul catedrei de electrotehnică II, din Institutul Politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" — cuprinde un număr de 520 de probleme care acoperă integral programa cursurilor de electrotehnică de la facultățile de profil neelectrotehnic: mecanică, T.C.M., transporturi, chimie industrială, construcții, etc.*

Studenții facultăților de profil electrotehnic pot utiliza această lucrare ca material auxiliar la studierea unora dintre capitolele cursurilor de specialitate: metode generale de calcul al cîmpurilor și circuitelor electrice, măsuri electrice, electronică industrială, etc.

Problemele propuse sînt strîns legate de aspectele care interesează direct în activitatea practică a inginerului și au fost astfel concepute încît să contribuie cît mai mult la înțelegerea conținutului fizic al chestiunilor studiate. S-a avut, de asemenea, în vedere ridicarea nivelului problemelor de electrotehnică generală la nivelul ridicat corespunzător pregătirii matematice a studenților din învățămîntul nostru superior.

Autorii au avut ca model valoroasa lucrare a acad. prof. dr. Remus Rădulet, Probleme de bazele electrotehnicii.

Problemele fiecărui capitol sînt precedate de un breviar cu legile, teoremele și metodele de calcul pe care se bazează capitolul respectiv. Pentru toate problemele se dau răspunsuri în cea de a doua parte a lucrării. În aceeași parte

Scanned with OKEN Scanner

a lucrării, la Rezolvări și indicații, *se dau rezolvări sau indicații pentru unele probleme tipice. Aceste probleme sînt indicate în enunț prin adăugarea literei* R, *respectiv* I, *la numărul de ordine al problemei. Problemele mai dificile sînt indicate printr-un asterisc. În anexe sînt date valorile tuturor constantelor de material necesare rezolvării problemelor.*

Lucrarea s-a realizat sub redacția conferențiarului dr. ing. Marius Preda, care a elaborat și cele șase capitole cuprinzînd bazele fizice ale electrotehnicii și breviarele capitolelor 7, 10.

Șefii de lucrări Florin Manea și Mihai Leon au realizat, respectiv, capitolele de mașini electrice și capitolul de circuite electrice monofazate.

Capitolele 8—11, referitoare la circuitele electrice în curent variabil, capitolul 12 de măsuri electrice și capitolul 17 de electronică industrială au fost elaborate de asistentul Paul Cristea.

Capitolele 18—19, cuprinzînd probleme de rețele electrice, electrochimie, și capitolul 13 de transformatoare electrice au fost elaborate de asistentul Fănică Spinei.

Autorii mulțumesc asistentului Cezar Flueraşu, care a adus o contribuție prețioasă la realizarea părții grafice a unor capitole ale lucrării.

AUTORII

Scanned with OKEN Scanner

I.

BAZELE FIZICE ALE ELECTROTEHNICII

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 1
CÎMPUL ELECTRIC

A. BREVIAR

1.1. Sarcina electrică și intensitatea cîmpului electric. Experiența arată că, prin frecare, prin iradiere cu raze X sau prin alte procedee, corpurile capătă o proprietate suplimentară, care se numește *electrizare*. Experiența mai arată că, în jurul corpurilor electrizate și în interiorul acestora, există un sistem fizic, diferit de corpuri, care se numește *cîmp electric*. Asupra unui mic corp electrizat, imobil față de mediul înconjurător și situat în vid într-un cîmp electric, se exercită o forță $\bar{F}$, care se poate exprima sub forma unui produs de doi factori:

$$\bar{F} = q\,\bar{E}. \tag{1.1}$$

Primul factor reprezintă o mărime scalară care depinde numai de starea micului corp electrizat și se numește *sarcina electrică* (q) a corpului. Al doilea factor reprezintă o mărime vectorială care depinde numai de starea locală (din punctul considerat) a cîmpului electric și se numește *intensitatea cîmpului electric* ($\bar{E}$).

1.2. Legea lui Coulomb. Experiența arată că asupra a două mici corpuri punctuale (adică avînd dimensiuni neglijabile față de distanța dintre ele), încărcate cu sarcinile electrice q_1, respectiv q_2, situate într-un mediu omogen și izotrop *, se exercită forțele (fig. B.1.1):

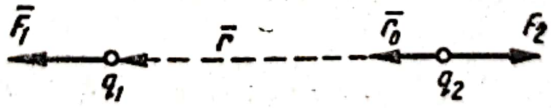
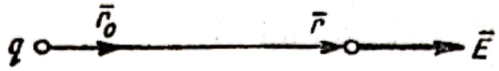


Fig. B.1.1

$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^2}\cdot \bar{r}^0, \tag{1.2}$$

* Legea lui Coulomb și relațiile deduse din aceasta sînt riguros valabile numai în vid sau în fluide suficient de rarefiate, cu $\varepsilon = \varepsilon_0$.

în a căror expresie r reprezintă distanța dintre cele două corpuri; $\bar{r}^0$ este versorul vectorului de poziție avînd originea în punctul unde se află corpul cu sarcina q_2 și extremitatea în punctul unde se află corpul cu sarcina q_1,

Fig. B.1.2 

iar ε reprezintă o mărime ce caracterizează mediul, denumită *permitivitate*. Dacă sarcinile q_1 și q_2 au același semn, corpurile se resping, în caz contrar se atrag (relația 1.2).

1.3. Intensitatea cîmpului electric produs de un corp punctual încărcat cu sarcină electrică și situat într-un mediu omogen și izotrop. Din relațiile (1.1) și (1.2) rezultă că această intensitate se exprimă:

$$\bar{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \cdot \bar{r}^0. \tag{1.3}$$

În figura B.1.2 se indică sensul versorului $\bar{r}^0$ pentru care este valabilă expresia (1.3) și se indică orientarea lui $\bar{E}$ pentru cazul unei sarcini $q > 0$.

1.4. Superpoziția cîmpurilor electrice. Experiența arată că în prezența unui număr n de corpuri punctuale situate într-un mediu omogen și izotrop (cu ε constant) se stabilește un cîmp electric rezultant de intensitate:

$$\bar{E} = \sum_{k=1}^{n} \bar{E}_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{4\pi\varepsilon r_k^2} \cdot \bar{r}_k^0, \tag{1.4 a}$$

unde $\bar{r}_k$ este vectorul de poziție avînd originea în punctul unde se află corpul cu sarcina q_k și extremitatea în punctul în care se calculează intensitatea cîmpului electric.

În cazul cînd sarcina este repartizată cu densitatea de volum ρ_v, de suprafață ρ_s sau de linie ρ_l, cîmpul electric poate fi calculat prin suprapunerea cîmpurilor infinit mici date de elementele de volum dv, suprafață dA și linie ds:

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_v \frac{\rho_v}{r^3} \cdot \bar{r} \cdot dv; \quad \bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_s \frac{\rho_s}{r^3} \bar{r} \cdot dA;$$

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_c \frac{\rho_l}{r^3} \cdot \bar{r} \cdot ds. \tag{1.4 b}$$

1.5. Momentul electric și polarizația electrică. Experiența arată că există mici corpuri electrizate, neîncărcate cu sarcină electrică (macroscopică), care produc de asemenea cîmp electric și sînt supuse

unor cupluri (1.5 *a*) și forțe (1.5 *b*), atunci cînd sînt situate în vid într-un cîmp electric exterior:

$$\bar{C} = \bar{p} \times \bar{E}; \tag{1.5 a}$$

$$\bar{F} = (\bar{p} \nabla) \bar{E}; \tag{1.5 b}$$

mărimea vectorială de stare ($\bar{p}$) a micului corp electrizat se numește *momentul electric* al micului corp. Corpurile cu moment electric se numesc corpuri polarizate electric.

Intensitatea cîmpului electric produs în vid, de un mic corp polarizat, de moment electric $\bar{p}$, are expresia:

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[3\frac{(\bar{p}\bar{r})\bar{r}}{r^5} - \frac{\bar{p}}{r^3}\right]. \tag{1.5 c}$$

Densitatea locală de volum a momentelor electrice dintr-un corp se numește (vectorul) *polarizație electrică*:

$$\bar{P} = \frac{\mathrm{d}\bar{p}}{\mathrm{d}v}. \tag{1.5 d}$$

1.6. Circulația * cîmpurilor electrostatice, potențialul electric. Cîmpurile electrice invariabile în timp care nu sînt însoțite de transformări de energie electrică se numesc *cîmpuri electrostatice*. În particular, cîmpurile electrice produse de corpuri cu stare de electrizare invariabilă în timp și imobile unele față de altele și față de mediul înconjurător sînt cîmpuri electrostatice.

Experiența arată că circulația cîmpurilor electrostatice este nulă de-a lungul oricărei curbe închise

$$\oint_\Gamma \bar{E}\,\overline{\mathrm{d}s} = 0, \tag{1.6 a}$$

și deci

$$\mathrm{rot}\ \bar{E} = 0. \tag{1.6 b}$$

Ca urmare, în conformitate cu o proprietate bine cunoscută din analiza vectorială, intensitatea cîmpului electrostatic derivă dintr-un potențial scalar V, definit de relația

$$\bar{E} = -\,\mathrm{grad}\ V. \tag{1.6 c}$$

Se numește *potențial electric* (scalar) mărimea a cărui gradient cu semn schimbat reprezintă intensitatea cîmpului electric.

* Se numește circulația unui cîmp de vectori integrala de linie pe o curbă închisă a vectorului intensitate de cîmp.

Din relațiile (1.3), (1.4 *a*), (1.4 *b*) și (1.6 *c*) se deduc ușor următoarele expresii particulare ale potențialelor:

— potențialul cîmpului electric produs de un corp încărcat cu sarcina q, respectiv de n corpuri punctuale încărcate, într-un mediu dielectric omogen și izotrop

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} + \text{const.}; \qquad (1.6\ d)$$

$$V = \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{4\pi\varepsilon r_k} + \text{const.}; \qquad (1.6\ e)$$

— potențialul cîmpului electric produs într-un mediu omogen și izotrop de un sistem de sarcini distribuite cu densitate de volum, suprafață și linie

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\int_v \frac{\rho_v}{r}\,dv + \int_s \frac{\rho_s}{r}\,dA + \int_c \frac{\rho_l}{r}\,ds\right); \qquad (1.6\ f)$$

— potențialul electric pentru un mic corp cu moment electric situat în vid:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\bar{p}\bar{r}}{r^3}. \qquad (1.6\ g)$$

1.7. Tensiunea electrică. Integrala de linie a intensității cîmpului electric se numește *tensiune electrică*:

$$U_{AB} = \int_{A(c)}^{B} \bar{E}\,\overline{ds} = \int_{A(c)}^{B} E \cdot \cos\alpha \cdot ds\,. \qquad (1.7\ a)$$

Sensul de referință al tensiunii este prin definiție sensul de integrare, de la punctul A la B, ales pe curba (C) pentru calculul tensiunii (fig. B.1.3).

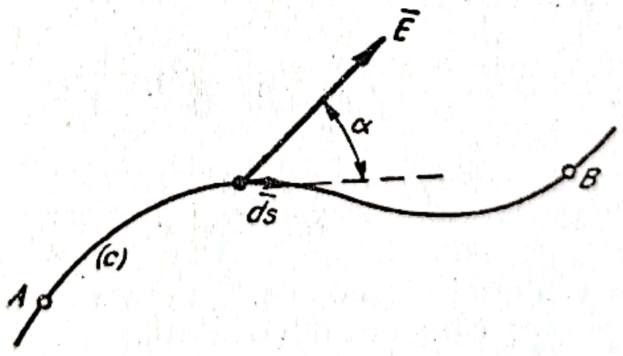


Fig. B.1.3

În scheme, sensul de referință se indică de obicei printr-o săgeată. *Sensul tensiunii* este sensul de integrare pentru care se obține o valoare pozitivă a tensiunii.

Tensiunea electrică într-un cîmp omogen, de-a lungul unui segment de linie de cîmp electric, de lungime l, se exprimă:

$$U = \int_{A(c)}^{B} \bar{E} \cdot \overline{ds} = \int_{A(c)}^{B} E \cdot ds = E \cdot \int_{A(c)}^{B} ds = E \cdot l. \qquad (1.7\ b)$$

Scanned with OKEN Scanner

În cîmpurile electrostatice, tensiunea electrică dintre două puncte A și B este egală cu diferența de potențial electric:

$$U_{AB} = \int_{A(c)}^{B} \bar{E}\,\overline{\mathrm{d}s} = -\int_{A(c)}^{B} \overline{\mathrm{d}s} \cdot \mathrm{grad}V = -\int_{V_A}^{V_B} \mathrm{d}V,$$

și deci:

$$U_{AB} = V_A - V_B. \qquad (1.7\,c)$$

1.8. Inducția electrică și fluxul electric. Inducția electrică, în fiecare punct din cîmp, este egală cu suma dintre polarizația electrică locală $\bar{P}$ și produsul dintre permitivitatea vidului ε_0 și intensitatea locală a cîmpului electric $\bar{E}$:

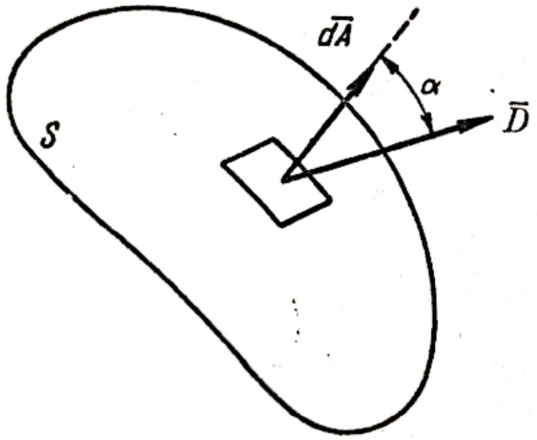


Fig. B.1.4

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}. \qquad (1.8\,a)$$

Integrala de suprafață (fig. B.1.4) a inducției electrice se numește flux electric

$$\psi = \int_s \bar{D}\,\overline{\mathrm{d}A} = \int_s D \cdot \cos\alpha \cdot \mathrm{d}A. \qquad (1.8\,b)$$

Fluxul electric printr-o suprafață de arie A, pe care inducția electrică este normală în fiecare punct și constantă ca valoare absolută, se exprimă prin relația

$$\psi = A \cdot D. \qquad (1.8\,c)$$

1.9. Legea fluxului electric (lege generală). Fluxul electric prin orice suprafață închisă este egal cu sarcina electrică conținută în interiorul acelei suprafețe:

$$\int_{\Sigma} \bar{D}\,\overline{\mathrm{d}A} = q_v. \qquad (1.9\,a)$$

Forma locală a legii fluxului electric este

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho_v. \qquad (1.9\ b)$$

1.10. Legea polarizației electrice. Marea majoritate a substanțelor (materialelor) folosite în electrotehnică au o polarizație electrică temporară proporțională cu intensitatea locală a cîmpului electric:

$$\bar{P}_t = \varepsilon_0 \chi_e \bar{E}, \qquad (1.10\ a)$$

unde χ_e este o mărime de material denumită *susceptivitate electrică**.

Conform relației (1.8 *a*), inducția electrică se exprimă prin relația

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}, \qquad (1.10\ b)$$

cu

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) = \varepsilon_0 \varepsilon_r, \qquad (1.10\ c)$$

unde ε și ε_r sînt permitivitățile (permitivitatea absolută, respectiv relativă) materialului.

Relația (1.10 *b*) este valabilă în cazurile uzuale, cînd nu există polarizație permanentă $\bar{P}_p$, polarizația temporară fiind dată de relația (1.10 *a*).

1.11. Capacitatea electrică. Un sistem de două conductoare (fig. B.1.5) care se încarcă respectiv cu sarcini q_1 și $q_2 = -q_1$, atunci cînd între conductoare se stabilește o tensiune electrică U_{12}, are o capacitate electrică:

$$C = \frac{q_1}{U_{12}}. \qquad (1.11)$$

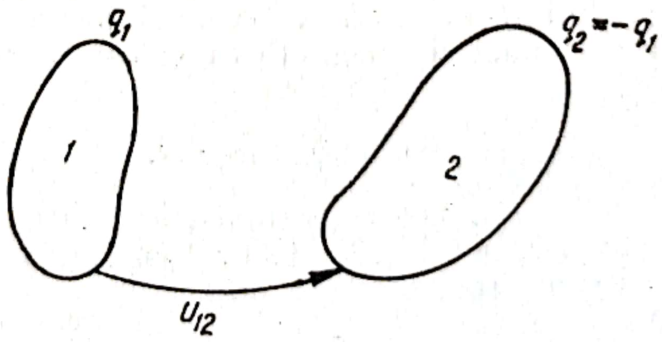


Fig. B.1.5

* În medii anizotrope, susceptivitatea și permitivitatea sînt mărimi tensoriale.

— *Capacitatea condensatorului plan*, cu armături plane, paralele, avînd fiecare o arie A și o distanță d între plăci mult mai mică decît dimensiunile suprafeței armăturilor, este:

$$C = \frac{\varepsilon A}{d}, \qquad (1.11\ a)$$

unde ε este permitivitatea dielectricului dintre armături.

— *Capacitatea condensatorului cilindric*, cu armături coaxiale de rază R_1 și $R_2 > R_1$ și de lungime $l \gg R_2 - R_1$, este

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}, \qquad (1.11\ b)$$

unde ε este permitivitatea dielectricului dintre armături.

— *Capacitatea unei linii* formate din două fire de rază r, paralele, la distanța $d \gg r$ unul de altul și de lungime $l \gg d$, este

$$C = \frac{\pi\varepsilon l}{\ln\frac{d}{r}}, \qquad (1.11\ c)$$

unde ε este permitivitatea mediului, presupus omogen, în care se află cele două fire.

— *Capacitatea echivalentă* C_e a n condensatoare de capacități $C_1, C_2, \ldots, C_n$, interconectate:

a) în serie:

$$C_e = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right)^{-1}; \qquad (1.11\ d)$$

b) în derivație (paralel):

$$C_e = C_1 + C_2 + \ldots + C_n. \qquad (1.11\ e)$$

1.12. Energia electrică W_e a unui condensator de capacitate C încărcat la tensiunea U:

$$W_e = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \qquad (1.12)$$

1.13. Teorema forțelor generalizate. Forța generalizată X_h, de natură electrostatică, care tinde să mărească una din coordonatele generalizate x_h, este

$$X_h = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x_h}\right)_{q = \text{const.}} = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x_h}\right)_{V = \text{const.}} \qquad (1.13)$$

Scanned with OKEN Scanner

B. PROBLEME

1.1 (R). Trei corpuri punctuale încărcate, respectiv, cu sarcinile electrice q_1, q_2, q_3, sînt situate în aer, la distanțele d_{12}, d_{23}, d_{31} unele față de altele. Să se determine valorile acestor sarcini în funcție de valorile algebrice ale forțelor electrostatice de repulsie F_{12}, F_{23}, F_{31}, exercitate între o pereche din aceste corpuri.

1.2. Să se determine raportul dintre forța F_1 de repulsie dintre două corpuri punctuale încărcate fiecare cu sarcina electrică de 1 C, situate în vid la o distanță de un an-lumină unul față de celălalt, și forța F_2 de repulsie dintre doi electroni situați la o distanță de 1 mm unul de altul.

1.3 (R). Valoarea forței electrostatice de atracție $F = 10{,}2$ gf dintre două corpuri punctuale, situate într-un mediu izotrop și omogen, se micșorează la jumătate atunci cînd se mărește distanța dintre corpuri cu $l = 20$ cm. Se cere să se determine lucrul mecanic necesar pentru această îndepărtare lentă a corpurilor.

1.4. Două mici corpuri încărcate cu sarcini electrice se atrag cu o forță F, atunci cînd sînt situate, în aer, la o distanță de 50 cm unul de altul. Să se determine permitivitatea uleiului în care, dacă se cufundă cele două corpuri la o distanță de 22 cm unul de altul, asupra lor se exercită aceeași forță F.

1.5. Ce masă au două mici sfere conductoare încărcate cu sarcini electrice egale $q = 0{,}9\ \mu$C, dacă suspendate, în aer, din același punct, la extremitatea a două fire izolante de lungime 20 cm, se îndepărtează una de alta la o distanță $d = 20$ cm?

1.6. Un corp punctual încărcat cu sarcina electrică q_1 este situat în vid, în punctul P_1, la distanța $d = 25$ cm de un al doilea corp punctual încărcat cu sarcina $q_2 = 0{,}2\ \mu$C și situat în punctul P_2. Știind că asupra celui de-al doilea corp se exercită forța electrostatică, de respingere, $F_2 = 10^{-2}$ N, să se determine:

a) intensitatea cîmpurilor electrice produse în punctele P_2, respectiv P_1, de primul, respectiv de-al doilea corp încărcat;

b) intensitatea cîmpului electric în punctul O situat la mijlocul segmentului P_1P_2.

1.7. În vîrfurile A, B, C ale unui triunghi echilateral, de latură $a = 15$ cm, situat în vid, se află respectiv corpuri punctuale încărcate cu sarcinile $q_A = q_B = 2 \cdot 10^{-13}$ C și $q_C = 4 \cdot 10^{-13}$ C. Să se determine

Scanned with OKEN Scanner

forțele electrostatice exercitate asupra acestor corpuri și intensitatea cîmpului electric în centrul triunghiului ABC.

1.8. Să se determine intensitatea cîmpului electric și potențialul electrostatic, în punctul de coordonate (8,0,0) al unui sistem de coordonate trirectangular $Oxyz$. Cîmpul electric este produs de două corpuri punctuale încărcate cu sarcinile $q_1 = 32\,\mu$ C, respectiv $q_2 = -16\,\mu$ C, și situate în vid, în punctele de coordonate (0,0,8), respectiv (0,8,0). Coordonatele sînt exprimate în centimetri.

1.9. Cu datele problemei precedente să se calculeze:
a) diferența de potențial dintre origine și punctul de coordonate (8,8,8);
b) lucrul mecanic necesar pentru deplasarea lentă a unui corp punctual încărcat cu sarcina $q_3 = 2\,\mu$C, de-a lungul semicercului cu centrul în origine avînd raza $r = 2$ cm, situat în planul xOy și limitat de axa Ox.

1.10*. Două corpuri punctuale încărcate cu sarcini electrice egale $q_1 = q_2 = q$ sînt situate în aer, la distanța d unul de altul. Să se determine locul geometric al punctelor în care intensitățile cîmpurilor electrice produse de cele două corpuri au o aceeași valoare absolută $E_1 = E_2 = E$, egală cu valoarea absolută a intensității cîmpului electric rezultant $E = |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|$.

1.11. Să se determine, pentru problema precedentă, intensitatea cîmpului electric și potențialul electrostatic în punctele locului geometric găsit pentru $q = 10^{-2}$ μC și $d = 90$ cm.

1.12 (R). În interiorul unei sfere Σ de rază $3a$, cu centrul în origine, intensitatea cîmpului electric are expresia $\vec{E} = K[(x + y)\vec{i} + x\vec{j} + 2\vec{k}]$. Să se calculeze tensiunea electrică de-a lungul axei Ox de la punctul A $(a, 0,0)$ la punctul B $(2a, 0,0)$.

1.13. Să se determine tensiunea electrică într-un cîmp electric omogen $E = 6\ \frac{V}{m}$ de-a lungul unei linii de cîmp între două puncte situate unul de altul la o distanță $d = 12$ cm. La ce distanță se află două puncte P_1 și P_2 situate pe o dreaptă care face un unghi de 60° cu liniile de cîmp, dacă tensiunea electrică dintre cele două puncte este de 20 V.

1.14. Un corp punctual încărcat cu sarcina electrică q situat în aer este plasat în centrul unui pătrat de latură a. Să se calculeze tensiunea electrică de-a lungul laturilor pătratului între două vîrfuri opuse ale acestuia. Să se verifice rezultatul comparînd valorile calculate cu diferența de potențial respectivă.

Scanned with OKEN Scanner

1.15 (I). În figura 1.15 sînt reprezentate unele dintre suprafețele echipotențiale ale unui cîmp electrostatic. Considerînd că aceste suprafețe sînt cilindrice, perpendiculare pe planul desenului și reprezentate în mărime naturală, să se determine (aproximativ):

a) tensiunea electrică dintre punctele A, B, C;

b) forțele exercitate asupra unui mic corp încărcat cu sarcina electrică $q = 10^{-9}$ C și situat respectiv în punctele A, B, C.

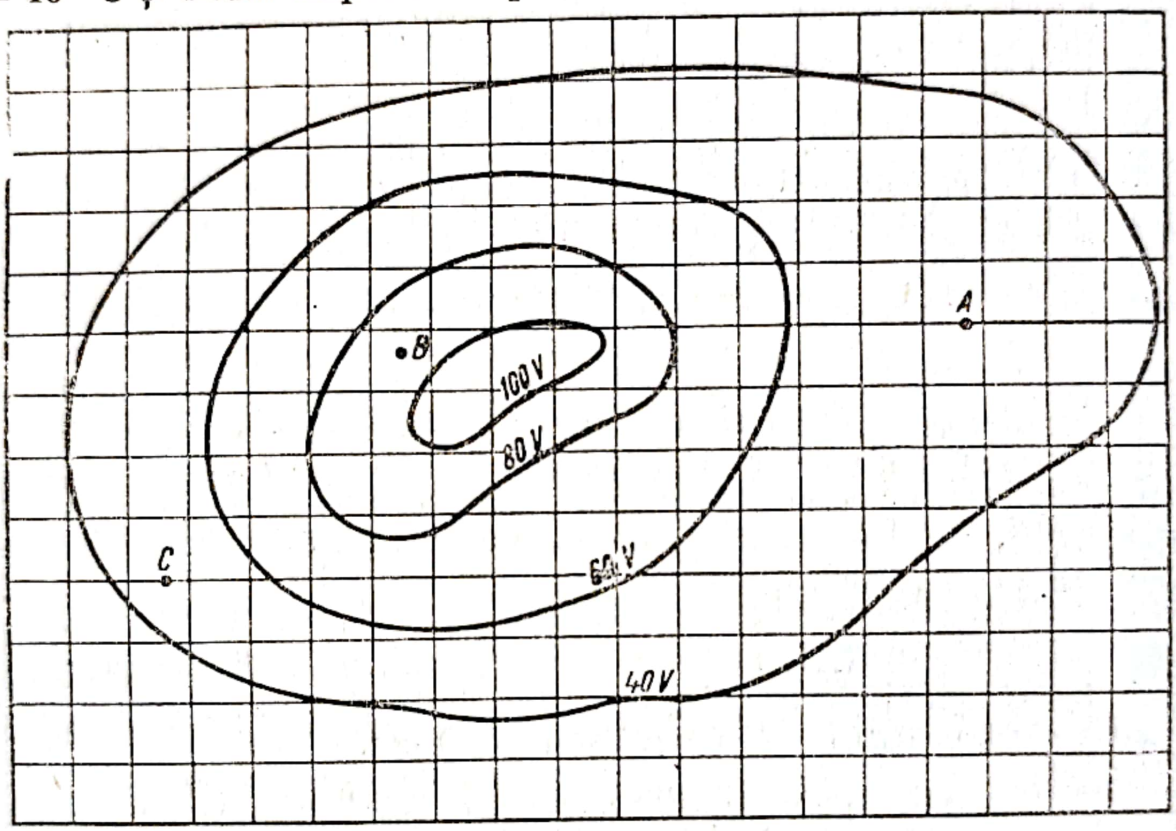


Fig. 1.15

1.16 (I). Se dau valorile potențialului în funcție de coordonata x, prin curba reprezentată în figura 1.16. Să se determine componenta după axa Ox a intensității cîmpului electric, în funcție de x.

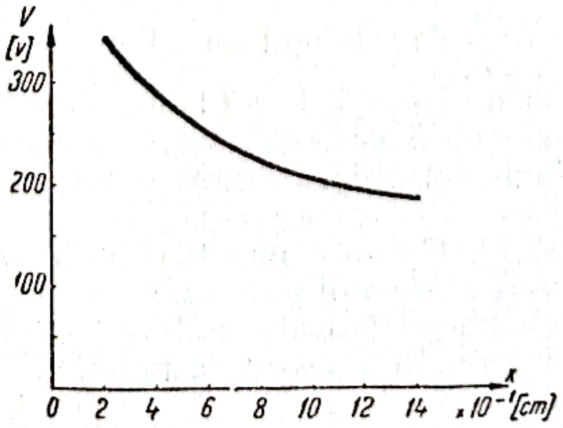


Fig. 1.16

1.17 (R). Un fir rectiliniu de lungime $2l$, situat în vid, este încărcat uniform cu o sarcină electrică de densitate de linie ρ_l. Să se determine intensitatea cîmpului electric produs în puncte situate la distanța d de fir, în planul care trece prin mijlocul firului și este perpendicular pe acesta.

1.18*. Să se determine intensitatea cîmpului electric în centrul unui hexagon situat în vid și avînd trei laturi consecutive încărcate uniform cu sarcină electrică de densitate liniară ρ_l.

1.19. Un conductor filiform, rectiliniu, infinit de lung este situat în vid și încărcat cu sarcină electrică repartizată uniform cu densitatea de linie ρ_l. Să se determine intensitatea cîmpului electric la distanța a de conductor.

1.20 (I). Să se determine intensitatea cîmpului electric produs de un plan, infinit extins, încărcat uniform cu sarcină electrică cu densitatea de suprafață ρ_s, situat în vid. Aplicație numerică : $\rho_s = \frac{1}{2\pi}$ $\mu C/m^2$.

1.21. Să se determine potențialul electric, intensitatea cîmpului și inducția electrică ca funcții de distanța r pînă la centrul unei sfere de rază a situată în vid și încărcată uniform pe suprafață cu sarcina electrică Q. Aplicație numerică : $Q = 3 \cdot 10^{-10}$C; $a = 5$ cm.

1.22. Pe suprafața unui cilindru circular infinit de lung de rază a situat în vid este repartizată uniform o sarcină electrică cu densitatea de suprafață ρ_s. Să se determine intensitatea cîmpului electric în funcție de distanța r de la axa cilindrului. Aplicație numerică : $\rho_s = 10^{-9}$C/m^2.

1.23. Să se determine intensitatea cîmpului electric și inducția electrică în cazul unui cilindru omogen de permitivitate ε_i încărcat cu sarcină electrică repartizată uniform cu densitatea de volum ρ_v și situat într-un mediu omogen de permitivitate ε_e. Se presupune cilindrul de o lungime l foarte mare față de raza a a cilindrului.

1.24 (I). Într-o sferă omogenă, de rază a_1, de permitivitate ε_0 egală cu permitivitatea mediului înconjurător, încărcată uniform cu sarcina electrică de densitate de volum ρ_v, se realizează o cavitate sferică de rază $a_2 < a_1$. Presupunînd că această cavitate se realizează fără a modifica densitatea de sarcină în restul sferei, să se arate că în cavitatea neîncărcată cu sarcină electrică se stabilește un cîmp electric omogen E. Să

Scanned with OKEN Scanner

se determine valoarea densității de volum a sarcinii ρ_v din interiorul sferei pentru $E = 100 \frac{V}{m}$ și o distanță $d = 2$ cm între centrul cavității și centrul sferei.

1.25 (I)*. Un cilindru circular drept, de permitivitate ε identică cu a mediului și de lungime foarte mare față de raza sa, este încărcat uniform cu sarcină electrică de densitate de volum ρ_{v1}.

Cum trebuie modificată densitatea de volum a sarcinilor într-o regiune din interiorul cilindrului, de forma unei sfere cu centrul pe axa cilindrului, pentru ca în interiorul acestei sfere, cu $\rho_{v2} = \text{const.}$, intensitatea cîmpului electric să nu aibă componentă normală pe axa cilindrului?

1.26. Să se determine:

a) tensiunea electrică dintre un punct oarecare de pe suprafața sferei, din problema precedentă, și centrul ei O;

b) diferența de potențial maximă dintre două puncte situate pe această sferă. Aplicație numerică: $\rho_{v1} = 3\ \mu C/m^3$, raza sferei fiind $a = 2$ cm.

1.27*. Se dau două mici corpuri polarizate electric, de moment electric permanent $\bar{p}_1$ și $\bar{p}_2$, situate în vid la o distanță d unul de altul. Corpurile fiind situate în același plan și astfel orientate încît $\bar{p}_1$ are direcția dreptei care unește cele două corpuri, iar $\bar{p}_2$ fiind perpendicular pe $\bar{p}_1$, să se determine:

a) cuplul exercitat asupra fiecăruia din corpuri;

b) forța exercitată asupra fiecăruia din corpuri;

c) intensitatea cîmpului electric în punctele din planul $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, situate la aceeași distanță d de cele două corpuri.

1.28. Să se determine cea mai mică rază a unei sfere conductoare care poate avea, în aer, în regim electrostatic, un potențial de 50 kV (potențialul nul de referință fiind la infinit). Se știe că rigiditatea dielectrică a aerului este $E_d \approx 30$ kV/cm.

1.29. Un balon de cauciuc sferic metalizat pe suprafața exterioară este electrizat prin punerea în contact cu un electrod (al unui generator electrostatic) aflat la un potențial de 10 kV. Ce potențial va căpăta acest balon dacă el se dezumflă, după îndepărtarea de electrod, micșorîndu-și raza de cinci ori. Cum variază intensitatea cîmpului electric la suprafața balonului datorită schimbării razei balonului.

Scanned with OKEN Scanner

1.30. Pe baza calculării circulației vectorului-cîmp, exprimat în coordonate carteziene prin $\bar{E} = K(-y\bar{i} + x\bar{j})$, de-a lungul cercului de ecuații $z = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$, să se arate că acesta nu poate reprezenta intensitatea unui cîmp electrostatic.

1.31*. Să se calculeze intensitatea cîmpului electric, inducția electrică într-un mediu nepolarizabil și distribuția sarcinilor electrice corespunzătoare potențialului electric $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^{-r/a}}{r}$, unde q și a sînt valori constante, iar r este valoarea absolută a vectorului de poziție.

1.32. Un condensator plan are armăturile de suprafață $A = 40$ cm² situate la o distanță $d = 3$ mm. Să se determine capacitatea condensatorului, atunci cînd dielectricul este:

a) aer;
b) parafină ($\varepsilon_r = 2$);
c) un strat de parafină de grosime 2,5 mm și în rest aer.

1.33. Să se determine cea mai mare tensiune care se poate aplica condensatorului în cele trei cazuri din problema precedentă, fără a produce străpungerea izolației. Rigiditatea dielectrică a aerului este $E_{ds} = 30$ kV/cm, iar a parafinei 300 kV/cm.

1.34. Să se determine capacitatea electrică pe unitatea de lungime a unui cablu coaxial cu două straturi de izolație. Raza conductorului interior este $R_1 = 1$ cm, grosimea primului strat de izolație este $d_1 = 0{,}8$ cm, al doilea strat suprapus peste primul are grosimea $d_2 = 0{,}7$ cm. Raza interioară a cilindrului metalic înconjurător este $R_2 = R_1 + d_1 + d_2$. Permitivitatea relativă a celor două straturi este $\varepsilon_{r1} = 2$, respectiv $\varepsilon_{r2} = 4$.

1.35. Să se determine capacitatea unui condensator sferic avînd armătura interioară de rază $R = 1$ cm, distanța $d = 1$ mm între armături și ca dielectric aer.

1.36 (I). Să se calculeze tensiunea electrică dintre armăturile condensatorului din problema precedentă, pentru care cea mai mare intensitate a cîmpului electric dintre armături este de 25 kV/cm.

1.37. Să se determine capacitatea echivalentă a fiecăreia din conexiunile posibile de trei condensatoare de capacitate C_1, C_2, C_3. Se dau $C_1 = C_2 = 12\,\mu$ F; $C_3 = 8\,\mu$F.

1.38. Condensatoarele de capacitate $C_1 = 2\,\mu$F; $C_2 = C_3 = 6\,\mu$F; $C_4 = 4\,\mu$F și $C_5 = 8\,\mu$F sînt legate ca în figura 1.38.

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine capacitatea echivalentă, sarcinile electrice și tensiunile la bornele condensatoarelor, atunci cînd tensiunea aplicată este $U = 120$ V (condensatoarele se presupun descărcate înainte de aplicarea tensiunii U).

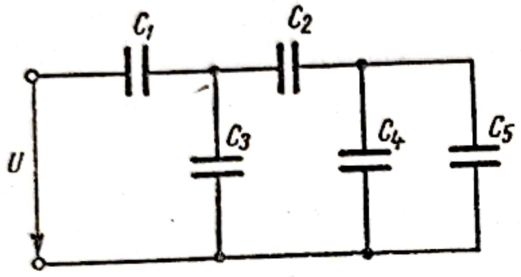


Fig. 1.38

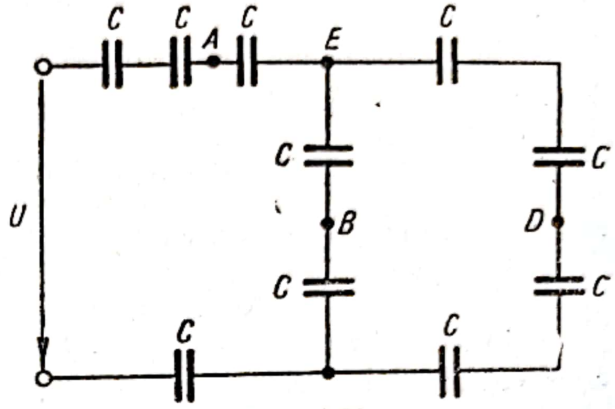


Fig. 1.39

1.39 (I). Condensatoarele reprezentate în schema din figura 1.39 au aceeași capacitate $C = 12\,\mu F$. Să se determine cea mai mare tensiune U care se poate aplica la borne fără a se depăși tensiunea de lucru $U = 800$ V la bornele nici unuia din condensatoare.

1.40. Două condensatoare avînd capacitățile $C_1 = 3\,\mu F$; $C_2 = 4\,\mu F$ și tensiunile de lucru (prescrise de fabrica constructoare) de $U_1 = 800$ V, respectiv $U_2 = 600$ V, sînt legate în serie. Care este cea mai mare valoare a tensiunii U care se poate aplica fără a depăși tensiunile de lucru ale condensatoarelor.

1.41 (R). Să se determine tensiunea la bornele extreme ale sistemului de condensatoare reprezentat în schema din figura 1.41, neîncărcat inițial cu sarcini electrice, necesară pentru a încărca cu o sarcină de $24\,\mu C$ condensatorul de capacitate C_3. Se dau valorile $C_1 = 8\,\mu F$; $C_2 = C_4 = 4\,\mu F$; $C_3 = 6\,\mu F$; $C_5 = 2\,\mu F$.

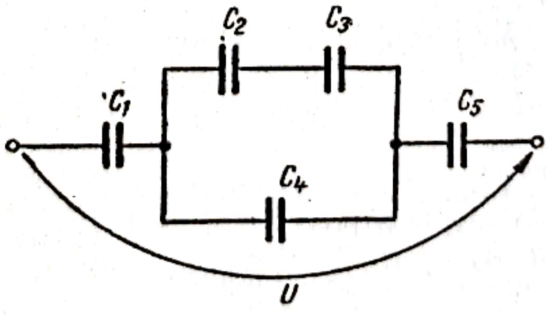


Fig. 1.41

1.42 (I). La sistemul de condensatoare reprezentat în figura 1.39 se conectează între punctele A-B un condensator de capacitate

$C' = 4\,\mu F$ și între punctele B-D un condensator de capacitate $C'' = 6\,\mu F$. Să se calculeze sarcinile electrice și tensiunile condensatoarelor în ipoteza că tensiunea la care s-a încărcat sistemul este $U = 400$ V.

1.43. Condensatoarele de capacitate $C_1 = 2$ nF și $C_2 = 3$ nF se încarcă la tensiunile $U_1 = 20$ V, respectiv $U_2 = 50$ V. Să se determine tensiunea comună care se va realiza la bornele lor dacă acestea, după încărcare, se leagă în paralel. Să se compare energia sistemului de două condensatoare înainte și după interconectarea lor și să se explice rezultatul.

1.44*. Două condensatoare electrice de capacitate $C_1 = 8\,\mu F$, $C_2 = 2\,\mu F$ și o sursă de energie electrică avînd o tensiune la borne $U = 4$V sînt conectate așa cum se arată în figura 1.44. Condensatoarele, presupuse inițial descărcate, se încarcă prin trecerea repetată a comutatorului din poziția a în poziția b și invers. Să se determine energia electrică acumulată în fiecare din condensatoare, tensiunea la bornele acestora cînd comutatorul revine a n-a oară în poziția b. Aplicație numerică: $n = 3$.

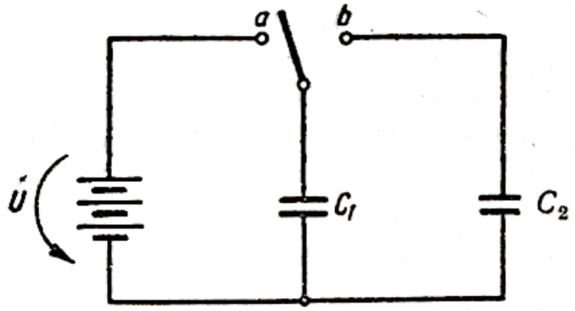


Fig. 1.44

1.45*. Trei condensatoare neîncărcate, de capacități $C_1 = 1\,\mu F$, $C_2 = 2\,\mu F$, $C_3 = 3\,\mu F$ se leagă în paralel și apoi se conectează

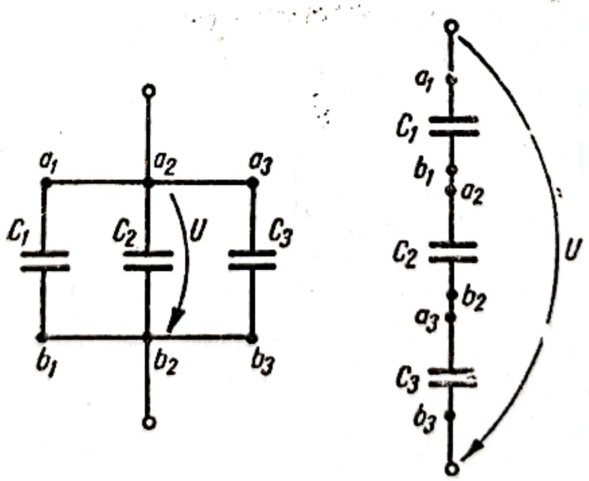


Fig. 1.45

la o sursă de tensiune constantă $U = 120$ V. Fără a le descărca, condensatoarele se deconectează de la sursă și se conectează în serie. Conectînd,

Scanned with OKEN Scanner

apoi, bornele extreme la aceeași sursă de tensiune $U = 120$ V, se cere să se determine tensiunea la bornele fiecărui condensator (fig. 1.45). Care este energia electrică acumulată final în condensatoare?

1.46. Care este forța de atracție dintre armăturile unui condensator plan avînd ca dielectric aerul, o suprafață a armăturilor de $A = 50$ cm^2, o distanță $d = 3$ mm între armături, atunci cînd tensiunea dintre armături este $U = 2$ kV.

1.47. Ce capacitate trebuie să aibă un condensator plan ale cărui armături, situate la distanța $d = 5$ mm și încărcate cu sarcinile Q, respectiv $-Q$, se atrag cu aceeași forță ca două corpuri punctuale încărcate cu sarcinile Q, respectiv $-Q$, și situate la aceeași distanță d? Armăturile și corpurile punctuale se presupun situate în aer.

1.48 (R). Un sistem de trei plăci conductoare plane situate în aer, paralele și cu o suprafață S de dimensiuni mari față de distanța d dintre plăci, prezintă o capacitate C_1 între primele două plăci și o capacitate C_2 între ultimele două plăci (fig. 1.48). Prin legarea celor trei plăci la un sistem de acumulatoare, rezultă cîte un potențial constant $V_A > V_B > V_C$ pentru fiecare din plăci. Să se determine valorile distanței x, pentru care:

a) energia totală a cîmpului electric al sistemului este minimă. Se cere valoarea forței rezultante exercitate asupra armăturii din mijloc, pentru această valoare a lui x;

b) sarcina electrică totală a armăturii din mijloc este nulă.

1.49. Armăturile unui condensator plan sînt deplasate una față de alta în sensul lungimii lor, așa cum se arată în figura 1.49.

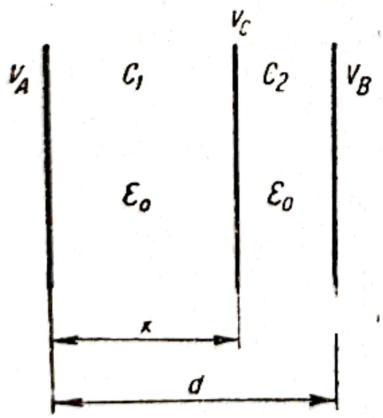


Fig. 1.48

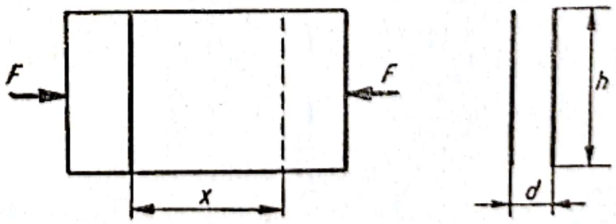


Fig. 1.49

Între armături fiind aer, se cere să se determine mărimea forțelor F care tind să mărească distanța x, astfel încît armăturile să ajungă față în față. Se presupune $d < h, x$.

1.50. Doi cilindri coaxiali, de rază $r_1 = 4$ cm; $r_2 = 5$ cm, avînd între ei o tensiune electrică $U = 2$ kV, sînt deplasați unul față de altul în lungul axei lor (fig. 1.50). Cilindrii fiind situați în aer, să se determine mărimea forțelor F care se exercită asupra armăturilor, tinzînd să le aducă față în față.

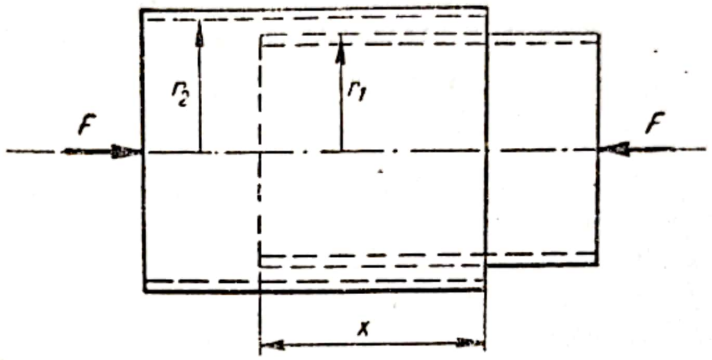


Fig. 1.50

1.51. Să se determine variația energiei și a forței de atracție dintre armăturile unui condensator, atunci cînd se dublează distanța dintre armăturile sale, în cazul cînd:

a) îndepărtarea armăturilor se face la sarcină electrică constantă a armăturilor (sursa deconectată);

b) îndepărtarea armăturilor se face menținînd constantă tensiunea electrică dintre armături (sursa se menține conectată).

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 2

CIRCUITE ELECTRICE LINIARE DE CURENT CONTINUU

A. BREVIAR

2.1. Curentul electric. Sub acțiunea cîmpului electric, în conductoare, particulele libere încărcate cu sarcini electrice (electronii liberi în metale, respectiv ionii în conductoarele electrolitice) sînt supuse unor forțe de natură electrică. Aceste forțe produc o deplasare orientată a acestor particule încărcate — numită *curent electric de conducție*. În dielectrici (izolanți), curentul electric de conducție este foarte mic (neglijabil), dacă intensitatea cîmpului electric nu depășește o valoare E_d, denumită *rigiditate dielectrică*.

Starea electrică a corpurilor parcurse de curent de conducție se numește *stare electrocinetică*.

2.2. Densitatea curentului electric de conducție și intensitatea curentului electric de conducție. Starea electrocinetică locală a corpurilor se caracterizează printr-o mărime vectorială, denumită densitatea curentului electric de conducție ($\bar{J}$). Densitatea curentului este determinată cu ajutorul depunerii de argint dintr-o mică doză electrolitică cu soluție de azotat de argint:

$$\bar{J} = k_0 \, \bar{n}_j \lim_{\substack{\Delta A \to 0 \\ \Delta t \to 0}} \frac{\Delta^2 m}{\Delta A \, \Delta t}, \qquad (2.2\ a)$$

unde: $\Delta^2 m$ este masa de argint care s-ar depune prin electroliză, în doza cu normala $\bar{n}_j$, astfel orientată de la anod spre catod încît depunerea să fie maximă; ΔA — aria catodului; Δt — timpul în care se face depunerea; k_0 — o constantă cu valoarea $\frac{10^3}{1{,}118} \frac{\text{C}}{\text{g}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Intensitatea curentului care trece printr-o suprafață S (în sensul normalei considerate pe suprafață) este definită prin:

$$i = \int_S \bar{J}\,\overline{\mathrm{d}A}. \qquad (2.2\ b)$$

Intensitatea curentului reprezintă sarcina electrică (a particulelor libere) trecută prin suprafață în unitatea de timp. Dacă J este constant pe suprafață și paralel cu normala pe suprafață, rezultă

$$i = J.\ A. \qquad (2.2\ c)$$

2.3. Legea curentului electric de conducție (legea lui Ohm). Pentru materiale folosite curent în electrotehnică, experiența arată că în fiecare punct există o relație liniară între densitatea (locală) a curentului electric și intensitatea cîmpului electric (forma locală a legii lui Ohm):

$$\bar{J} = \sigma\,(\bar{E} + \bar{E}_i), \qquad (2.3\ a)$$

în care σ este o mărime de material, denumită *conductivitatea mediului* *, iar $\bar{E}_i$ este o mărime de material, denumită *intensitatea cîmpului electric imprimat*. Inversul conductivității se numește *rezistivitate* $\rho = \sigma^{-1}$.

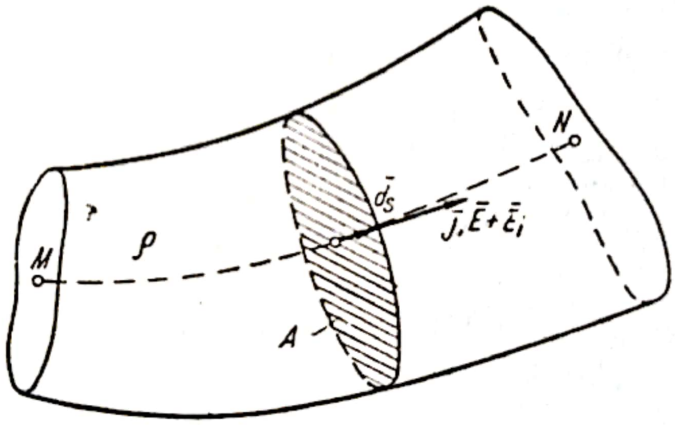


Fig. B.2.1

Integrala de linie a intensității cîmpului electric imprimat de-a lungul unei curbe C, de la un punct M la un punct N, se numește *tensiune electromotoare* sau *forță electromotoare* (a cîmpului electric imprimat):

$$u_e = \int_{M\,(C)}^{N} \bar{E}_i\,\overline{\mathrm{d}s}. \qquad (2.3\ b)$$

Adeseori, pentru notarea t.e.m. se folosește simbolul e sau E, în loc de u_e.

Forma integrală a legii, pentru un conductor (fig. B.2.1) la care J = const. ρ = const. și $\bar{E}_i$ = const. în toate punctele suprafețelor de arie A ortogonale pe liniile de curent, este:

$$u + u_e = Ri, \qquad (2.3\ c)$$

* În medii anizotrope, conductivitatea este o mărime tensorială.

Scanned with OKEN Scanner

unde mărimea R este rezistența electrică a conductorului:

$$R = \int_{M(C)}^{N} \frac{\rho}{A}\, ds, \qquad (2.3\ d)$$

iar u și u_e sînt tensiunea electrică, respectiv tensiunea electromotoare din lungul conductorului (de-a lungul unei linii de curent).

Formula (2.3 *d*) este valabilă, în particular, pentru un conductor cilindric (fir), omogen și de secțiune constantă, a cărui rezistență este

$$R = \rho \frac{l}{A}, \qquad (2.3\ e)$$

unde l este lungimea conductorului.

Inversul rezistenței electrice se numește conductanță, $G = R^{-1}$.

2.4. Variația rezistivității (respectiv rezistenței) cu temperatura ϑ este dată de relația:

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(\vartheta - \vartheta_0)], \qquad (2.4)$$

în care α este coeficientul de temperatură, iar ρ_0 — rezistivitatea la temperatura ϑ_0.

2.5. Legea transformării de energie electromagnetică prin curent electric de conducție. Curentul electric de conducție este însoțit de o transformare de energie electrice (electromagnetică) în altă forme de energie. Energia electrică transformată în unitatea de timp și de volum este

$$p_{j0} = \bar{E}\bar{J}. \qquad (2.5\ a)$$

În lipsa cîmpului imprimat se obține

$$p_{j0} = \rho \bar{J}^2,$$

relație care exprimă *legea efectului electrocaloric* (legea lui Joule-Lenz).

Forma integrală a legii, pentru un conductor de rezistență R, este

$$p_j = ui = Ri^2 - u_e i, \qquad (2.5\ b)$$

unde: p_j este întreaga putere electromagnetică transformată în conductor, $p_c = Ri^2$ — puterea corespunzătoare căldurii degajate în conductor, în unitatea de timp, prin efect Joule-Lenz, iar $p_e = u_e\, i$ — puterea electrică corespunzătoare energiei cedate de conductor în procesul de conducție electrică prin acțiunea cîmpului electric imprimat. Relația (2.5 *b*) corespunde unui sens comun de referință în lungul conductorului, pentru u, u_e și i.

Energia electrică absorbită de un rezistor de rezistență electrică R, parcurs de un curent continuu I, timp de t secunde, este

$$W = R \cdot I^2 \cdot t; \qquad (2.5\ c)$$

Scanned with OKEN Scanner

cantitatea de căldură corespunzătoare, exprimată în calorii, este

$$Q = 0{,}24\ RI^2t. \qquad (2.5\,d)$$

2.6. Potențialul electric al cîmpurilor electrice staționare. Experiența arată că, într-un cîmp electric staționar (invariabil în timp), circulația cîmpului electric este nulă de-a lungul oricărei curbe închise:

$$\oint \bar{E}\,\overline{\mathrm{d}s} = 0, \text{ și deci } \bar{E} = -\operatorname{grad} V. \qquad (2.6)$$

2.7. Legea de conservare a sarcinii electrice (lege generală). Intensitatea curentului electric i_Σ printr-o suprafață închisă Σ, formată din puncte determinate ale unor corpuri, este egală cu viteza de scădere în timp a sarcinii electrice $q_{v\Sigma}$ din interiorul suprafeței:

$$i_\Sigma = -\frac{\mathrm{d}q_{v\Sigma}}{\mathrm{d}t}. \qquad (2.7)$$

2.8. Prima teoremă a lui Kirchhoff: *Suma intensităților curenților care intră într-un nod de rețea electrică este nulă:*

$$\sum i = 0. \qquad (2.8)$$

Termenul „intră" din enunțul teoremei se referă la sensul unic de referință considerat pentru toți curenții. Teorema rezultă din legea de conservare a

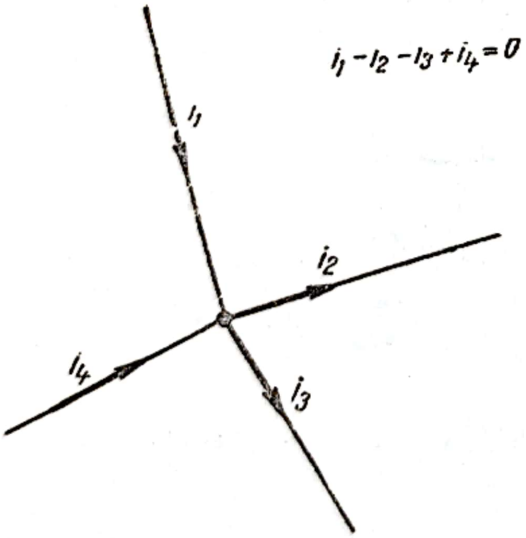


Fig. B.2.2

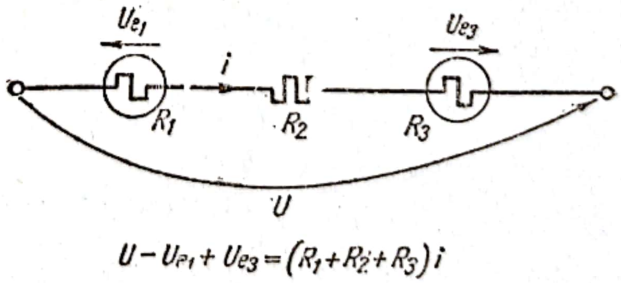


Fig. B.2.3

sarcinii electrice pentru regimuri staționare în care $q_{v\Sigma}$ = const., sau, mai general, pentru $q_{v\Sigma} = q_{nod} = 0$. Un exemplu de aplicare se prezintă în figura B.2.2.

Scanned with OKEN Scanner

2.9. Legea lui Ohm generalizată pentru o latură de circuit electric (fig. B.2.3). Considerînd un același sens de referință în lungul laturii pentru u, u_{ek} și i, legea se exprimă în regim staționar prin relația

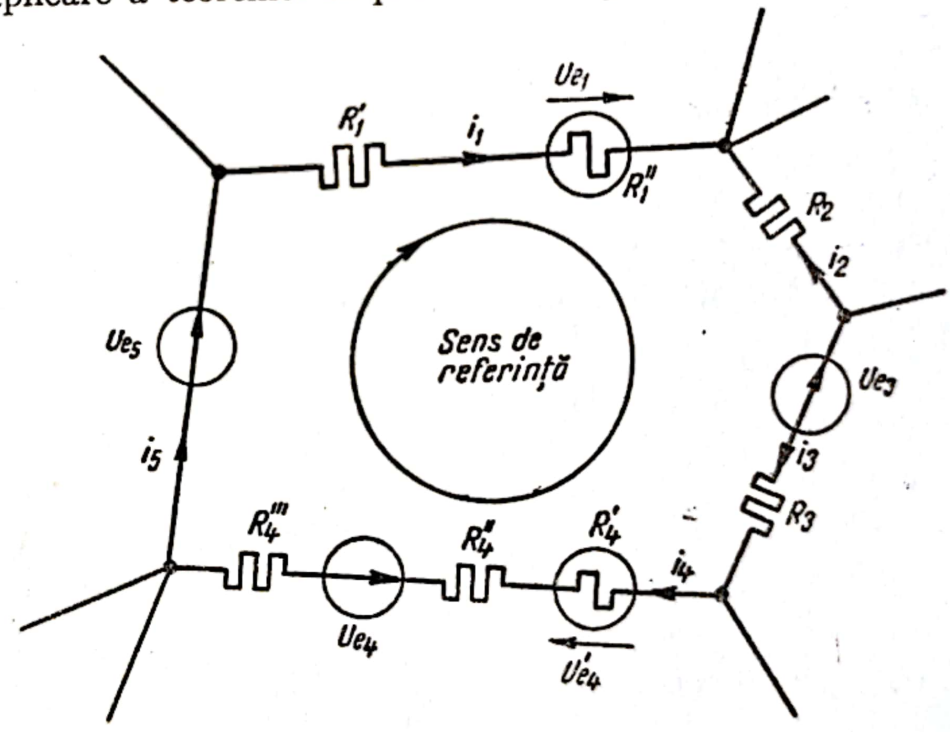
$$u + \Sigma u_{ek} = \Sigma R_k i, \tag{2.9}$$

în care u_{ek} și R_k sînt, respectiv, t.e.m. și rezistențele electrice ale elementelor inseriate din latură. Exemplu de aplicare în figura B.2.3.

2.10. A doua teoremă a lui Kirchhoff. În regim staționar (pentru circuite de curent continuu), considerînd un sens comun de referință pentru toate mărimile, *de-a lungul oricărui contur format din laturi de rețea, suma t.e.m. este egală cu suma produselor rezistențelor electrice ale elementelor prin intensitățile curenților care le străbat*:

$$\Sigma u_{ek} = \Sigma R_k i_k. \tag{2.10}$$

Produsele $R_k i_k$ se numesc *căderi (rezistive) de tensiune.*
Un exemplu de aplicare a teoremei se prezintă în figura B.2.4.



$$(R_1' + R_1'')\, i_1 - R_2 i_2 + R_3 i_3 + (R_4' + R_4'' + R_4''')\, i_4 = U_{e1} - U_{e3} + U_{e4}' - U_{e4}'' + U_{e5}$$

Fig. B.2.4

2.11. Rezistența echivalentă R_e a n elemente, de rezistență R_1, R_2,..., R_n, legate în serie (fig. B.2.5):

$$R_e = R_1 + R_2 + \ldots + R_n. \tag{2.11}$$

Scanned with OKEN Scanner

2.12. Rezistența echivalentă R_e a n elemente legate în derivație (fig. B.2.6) :

$$R_e = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}\right)^{-1}. \qquad (2.12\,a)$$

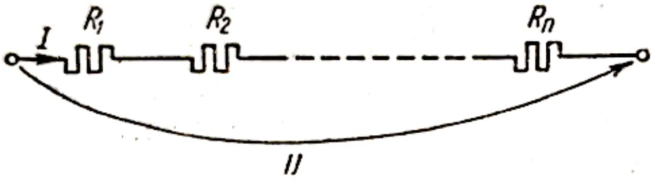


Fig. B.2.5

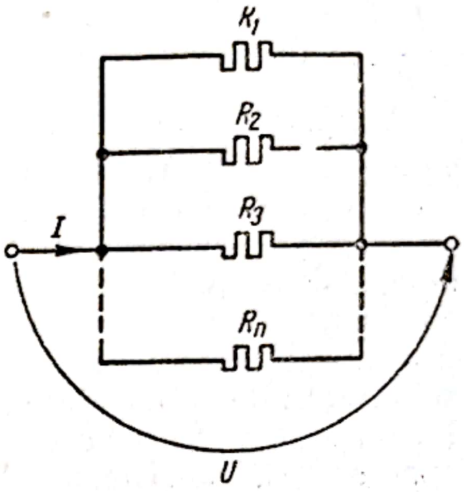


Fig. B.2.6

În particular, pentru două rezistoare legate în paralel:

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \qquad (2.12\,b)$$

2.13. Transfigurarea stea-triunghi. Circuitul în conexiune stea (*a*) și circuitul cu conexiune în triunghi (*b*), figura B.2.7, pot fi înlocuite unul cu altul, ele fiind echivalente în raport cu accesurile *1*, *2*, *3*,

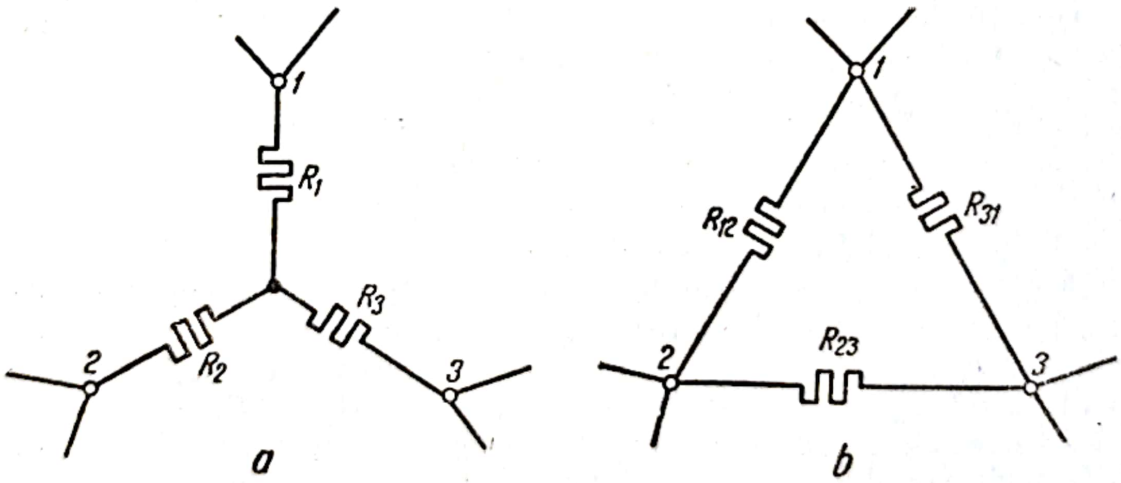


Fig. B.2.7

dacă rezistențele satisfac relațiile (2.13 *a*) sau relațiile (2.13 *b*), echivalente cu primele :

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \qquad (2.13\,a)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$R_{12} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3}; \quad R_{23} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1};$$
$$R_{31} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2}. \qquad (2.13\ b)$$

2.14. Metoda teoremelor lui Kirchhoff este o metodă generală de calcul al circuitelor electrice cu l laturi și n noduri. Ea constă în :

a) alegerea unor sensuri de referință și notații pentru valorile algebrice corespunzătoare ale intensităților curenților din laturi;

b) se scriu l ecuații Kirchhoff astfel :
$(n-1)$ ecuații pe baza primei teoreme a lui Kirchhoff; $o = (l-n+1)$ ecuații independente pe baza celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff pentru $l-n+1$ contururi independente care să conțină fiecare cel puțin o latură neconținută în ochiurile pentru care s-a aplicat deja teorema. Ochiurile simple (a căror suprafață nu conține alte laturi în afară de cele care formează conturul ochiului) formează, pentru o rețea plană, un sistem de ochiuri independente;

c) se rezolvă sistemul de ecuații astfel obținut.

2.15. Metoda curenților de contur. Metoda constă în alegerea ca necunoscute auxiliare a unui sistem de $o = l-n+1$ curenți fictivi, asociați fiecare cîte unui contur (ochi) dintr-un sistem de o contururi independente. Curenții de contur, prin definiție, străbat toate laturile ochiului respectiv și au în fiecare latură o sumă algebrică egală cu valoarea curentului din latura respectivă. În acest fel, ecuațiile care decurg din prima teoremă a lui Kirchhoff sînt satisfăcute identic reducîndu-se numărul necunoscutelor de la cei l curenți ai laturilor la un număr de $o < l$ curenți de contur. Ecuațiile corespunzătoare celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff se exprimă simplu în funcție de curenții de contur I_{cj}:

$$\begin{aligned} &R_{c11}I_{c1} + R_{c12}I_{c2} + \ldots + R_{c1o}I_{co} = E_{c1} \\ &R_{c21}I_{c1} + R_{c22}I_{c2} + \ldots + R_{c2o}I_{co} = E_{c2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &R_{co1}I_{c1} + R_{co2}I_{c2} + \ldots + R_{coo}I_{co} = E_{co}, \end{aligned} \qquad (2.15)$$

unde R_{cjj} este suma rezistențelor conturului j; R_{cjk} este suma rezistențelor comune contururilor j și k, rezistențele comune fiind considerate pozitive sau negative, după cum sensurile de referință ale curenților de contur coincid, sau nu, în elementele comune respective; E_{cj} este suma algebrică a t.e.m. ale ochiului în sensul de referință al curentului de contur I_{cj}.

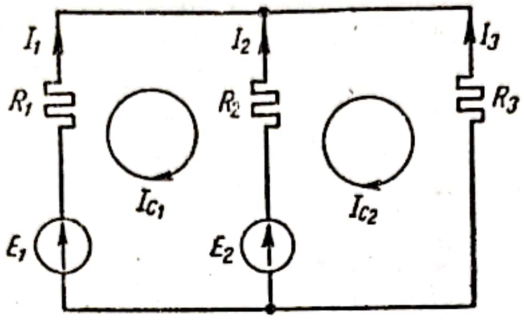
Aplicarea metodei constă în determinarea valorilor curenților de contur, pe baza rezolvării sistemului de ecuații (2.15) și apoi în determinarea curenților din laturi în funcție de curenții de contur. Exemplificarea în figura B.2.8.

2.16. Metoda potențialelor nodurilor. Metoda constă în alegerea unei valori de referință nule pentru potențialul unui nod și în utilizarea potențialelor celorlalte $(n-1)$ noduri ca necunoscute auxiliare. Pentru

Scanned with OKEN Scanner

determinarea potențialelor nodurilor se rezolvă sistemul de n—1 ecuații, corespunzînd cîte unui nod j al rețelei, de forma :

$$V_j \sum_{(j)} G_{jk} - \sum_{(j)} G_{jk} V_k + \sum_{(j)} G_{jk} E_{jk} = 0, \ (j = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad (2.16\ a)$$



$$(R_1+R_2)I_{C1} - R_2 I_{C2} = E_1 - E_2$$
$$-R_2 I_{C1} + (R_2+R_3)I_{C2} = E_2$$
$$I_1 = I_{C1};\ I_2 = I_{C2} - I_{C1};\ I_3 = -I_{C2}$$

Fig. B.2.8

în care : $\sum_{(j)} G_{jk}$ reprezintă suma conductanțelor laturilor legate la nodul j; $\sum_{(j)} G_{jk} V_k$ — suma conductanțelor laturilor legate la nodul j, înmulțite fiecare cu potențialul celuilalt nod la care sînt legate aceste laturi; $\sum_{(j)} G_{jk} E_{jk}$ — suma

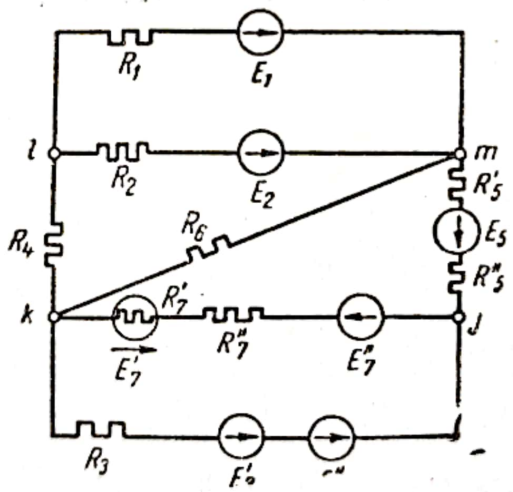


Fig. B.2.9

(j) $V_j(G_3+G_5+G_7) - V_k(G_3+G_7)+G_7(E''_7 - E'_7) - G_3(E'_3 - E''_3) - G_5E_5 = 0$

(k) $V_k(G_3+G_4+G_6+G_7) - V_j(G_3+G_7) - V_l G_4 + G_3(E'_3+E''_3) + G_7(E_7 - E''_7) = 0$

(m) $-V_j G_5 - V_k G_6 - V_l(G_1+G_2) - G_1E_1 - G_2E_2 + G_5E_5 = 0.$

conductanțelor laturilor legate la nodul j, înmulțite cu t.e.m. din laturile respective (exprimate față de sensul de referință de la nodul considerat j spre celelalte noduri k).

După determinarea potențialelor nodurilor, curenții din laturi se determină pe baza legii lui Ohm generalizate :

$$I_{jk} = G_{jk}\,(V_j - V_k + E_{jk}). \qquad (2.16\ b)$$

Exemplu de aplicare în figura B.2.9.

Scanned with OKEN Scanner

Se va utiliza metoda potențialelor nodurilor sau metoda curenților de contur, după cum n—1 este mai mic sau nu față de numărul $o = l - n + 1$ al ochiurilor independente.

2.17. Teorema superpoziției. Într-o rețea liniară (cu rezistențe constante), intensitatea curentului din fiecare latură este egală cu suma intensităților curenților (exprimați față de același sens de referință ca și curentul laturii) care i-ar stabili în această latură fiecare sursă în parte (dacă celelalte surse s-ar înlocui cu rezistoare de rezistență egală cu rezistența interioară a surselor).

2.18. Teorema generatorului echivalent (teorema lui Helmholtz-Thévenin). Intensitatea curentului electric dintr-un rezistor de rezistență R conectat în punctele A și B ale unui circuit electric are expresia:

$$I_{AB} = \frac{U_{ABo}}{R + R_i}, \tag{2.18}$$

în care U_{ABo} este tensiunea în „gol" între punctele A și B (adică atunci cînd rezistența R este deconectată), iar R_i este rezistența echivalentă a circuitului între punctele A și B (în cazul cînd rezistența R ar fi deconectată de la circuit). Pentru calculul acestei rezistențe (interioare) R_i se „pasivizează circuitul", adică se înlocuiește cu un circuit cu aceleași rezistențe ca și circuitul respectiv (inclusiv rezistențele interioare ale surselor), însă fără t.e.m.

B. PROBLEME

2.1. Ce diametru are un conductor de cupru de rezistență electrică $R = 5{,}6\Omega$ și de lungime $l = 1$ km. Conductivitatea cuprului respectiv este $\sigma = 57\ \mathrm{m/\Omega \cdot mm^2}$.

2.2. Un cablu format din șase fire de aluminiu și unul de oțel ($\rho_{0l} = 0{,}1\ \Omega\,\mathrm{mm^2/m}$), de lungime egală $l = 1$ km și de diametru egal $d = 4{,}8$ mm, are o rezistență electrică $R = 0{,}25\Omega$ (cele șapte fire sînt legate în paralel). Să se determine rezistivitatea firelor de aluminiu presupuse identice și omogene.

Scanned with OKEN Scanner

2.3 (R). Care este raportul dintre costul materialului a două linii bifilare, de lungimi și rezistențe egale, dacă una este realizată din cupru cu un cost c_{Cu} (lei/kg) și a doua din aluminiu cu un cost c_{Al} (lei/kg)?

2.4. O bobină formată dintr-un conductor de aluminiu ($\rho_{Al} = 0{,}03\ \Omega\,mm^2/m$) izolat are o greutate de 5 kgf și o rezistență electrică de 5Ω, la o temperatură de 20°C. Neglijînd greutatea carcasei și a izolației să se calculeze lungimea și diametrul conductorului.

2.5. Dintr-un conductor de constantan ($\sigma = 2{,}04 \cdot 10^6\ 1/\Omega \cdot m$), cu diametrul $d = 0{,}025$ mm, se realizează un rezistor de rezistență $R = 20$ kΩ. Conductorul fiind înfășurat pe o carcasă de diametru $D = 10$ mm, să se determine numărul corespunzător de spire (conductorul se înfășoară într-un singur strat).

2.6. Care este procentul de creștere al rezistenței unei bobine de cupru atunci cînd temperatura ei crește de la valoarea de 20°C a mediului ambiant la valoarea de lucru de 84°C.

2.7 (R). O lampă electrică cu filament de wolfram absoarbe o putere de 40 W la tensiunea de 127 V. Să se determine temperatura de lucru a filamentului, știind că prin lampă la temperatura camerei de 20°C, alimentată un timp foarte scurt la o tensiune de 10 V, trece un curent de 256 mA. Se va considera pentru wolfram un coeficient de temperatură constant $\alpha = 0{,}144\ \ 1/C°$.

2.8 (I)*. Ce diametru trebuie să aibă firul de argint al unei siguranțe, pentru ca acesta să se topească în timp de 0,1 s la trecerea unui curent de 10 A. Se va neglija transferul de căldură de la fir la mediul înconjurător și se va considera o temperatură a mediului ambiant de 20°C.

2.9. Un rezistor de cupru de rezistență R_1 este legat în serie cu un rezistor de constantan de rezistență R_2. Să se determine coeficientul de temperatură al rezistenței echivalente pentru $\frac{R_1}{R_2} = 8$.

2.10. Ce rezistență electrică trebuie să aibă un fierbător electric, cu tensiune nominală 220 V, care, avînd un randament de 75%, face să fiarbă jumătate de litru de apă în 5 min. Se va considera temperatura inițială a apei de 18°C.

2.11*. Două fire de cupru de diametru 0,9 mm ale unui cablu telefonic subteran sînt scurtcircuitate într-un punct P al cablului. Pentru determinarea locului defectului (scurtcircuitului) se măsoară la intrarea cablului rezistența electrică $R = 15\Omega$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Considerînd cablul la o temperatură de 18°C, să se determine distanța l de la începutul cablului pînă la locul scurtcircuitului.

b) Care este eroarea comisă la determinarea lungimii l dacă:

α) temperatura cablului este de numai 8°C;

β) rezistivitatea considerată este cu 5% mai mare decît cea reală;

γ) dacă diametrul conductorului diferă cu 3% de valoarea considerată în calcul;

δ) dacă între fire în locul unui scurtcircuit net există o rezistență de contact de 0,5Ω.

2.12. Un element galvanic de rezistență interioară $r = 3\Omega$ și t.e.m. $E = 1{,}5$ V este parcurs de un curent $I = 0{,}1$ A. Să se determine tensiunea la bornele elementului și puterea la bornele elementului pentru cele două sensuri posibile ale curentului.

2.13. Un receptor trebuie alimentat cu un curent de 20 A, de la o rețea de 220 V, situată la 1 km de receptor. Ce diametru trebuie să aibă conductoarele liniei, pentru ca tensiunea la bornele receptorului să nu difere cu mai mult de 5% de tensiunea rețelei? Se va rezolva problema pentru un conductor de aluminiu (*a*) și pentru un conductor de cupru (*b*). Care este densitatea curentului electric în cele două cazuri? Care este puterea pierdută în linie?

2.14. Să se calculeze rezistențele echivalente pentru toate circuitele cu conexiune mixtă (serie-paralel), care se pot forma cu trei rezistoare de rezistență $R_1 = 2\Omega$; $R_2 = 4\Omega$; $R_3 = 6\Omega$.

2.15. Să se calculeze rezistența echivalentă a circuitului reprezentat în figura 2.15, în raport cu perechile de borne:

a) A—B; *c*) B—C;

b) A—C; *d*) A—D.

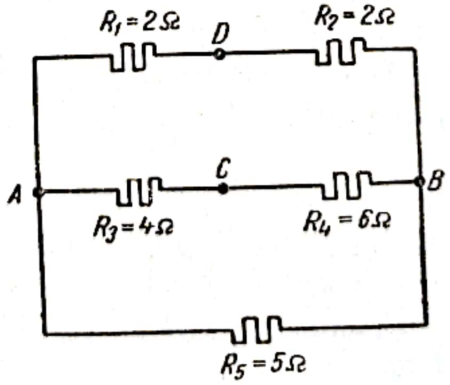


Fig. 2.15

2.16 (I)*. Muchiile unui cub au rezistențe electrice egale $R = 12\Omega$. Să se determine rezistența electrică echivalentă în raport cu două vîrfuri diametral opuse ale cubului.

Scanned with OKEN Scanner

2.17 (R). Circuitul reprezentat în schema din figura 2.17 se alimentează cu o tensiune $U = 100$ V. Valorile rezistențelor în ohmi fiind cele indicate în schemă, să se determine intensitatea curentului, tensiunea și puterea consumată pentru fiecare rezistor.

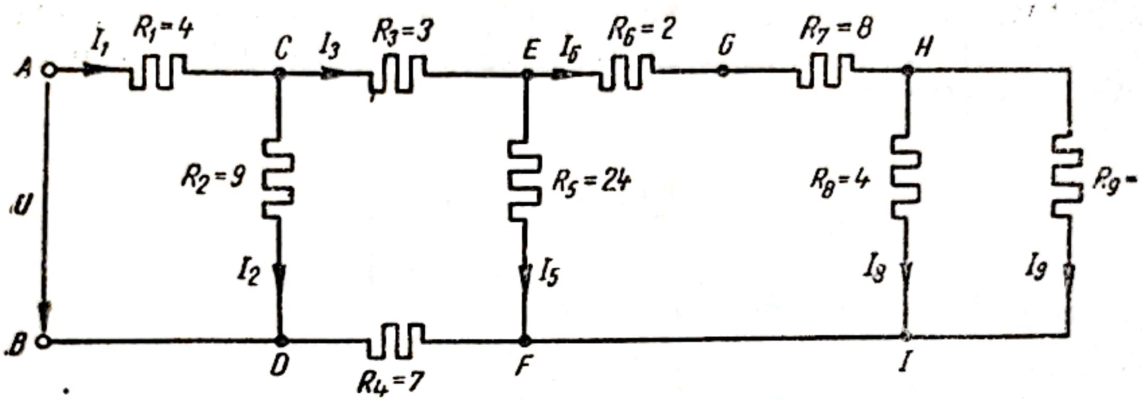


Fig. 2.17

2.18. Să se determine tensiunea U la bornele circuitului, reprezentat în figura 2.17, care corespunde unui curent $I_8 = 2$A în latura de rezistență R_8 a circuitului. Valorile rezistențelor, în ohmi, sînt indicate în schemă. Să se recalculeze curenții și puterile pentru fiecare element, în ipoteza că tensiunea la borne ar avea valoarea $U' = 60$ V.

2.19. Pentru măsurarea unei rezistențe electrice R se utilizează un voltmetru de rezistență interioară R_V și un ampermetru de rezistență interioară R_A. Folosind montajul reprezentat în figura 2.19, pentru

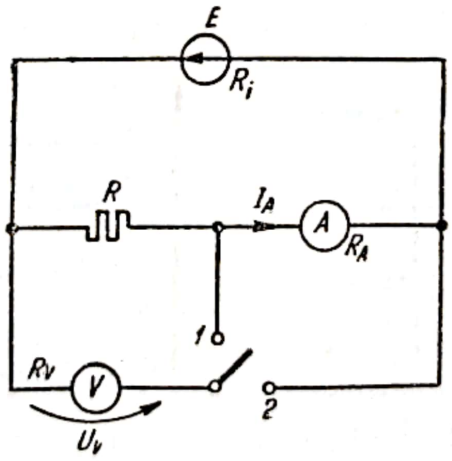


Fig. 2.19

poziția *1* a comutatorului se măsoară $U_{V_1} = 40$ V, $I_{A1} = 0{,}5$ A. Pentru poziția *2* a comutatorului se măsoară $U_{V_2} = 41$ V și $I_{A2} = 0{,}48$ A. Să se calculeze valoarea rezistenței R:

a) folosind numai valorile U_{V1} și I_{A1}, în ipoteza că rezistența voltmetrului este mult mai mare decît rezistența R;

Scanned with OKEN Scanner

b) folosind numai valorile U_{V2} și I_{A2}, în ipoteza unei rezistențe R_A neglijabile față de rezistența R;

c) ținînd seamă de rezistențele R_A și R_V, în cazul $R_i \simeq 0$.

2.20. Un circuit (fig. 2.20) absoarbe o putere $P = 20$ kW la o tensiune $U = 380$ V. Fiind cunoscute valorile rezistențelor $R_1 = 4{,}32\,\Omega$ și $R_2 = 6\,\Omega$, să se determine valoarea rezistenței R_3 și puterea absorbită de aceasta.

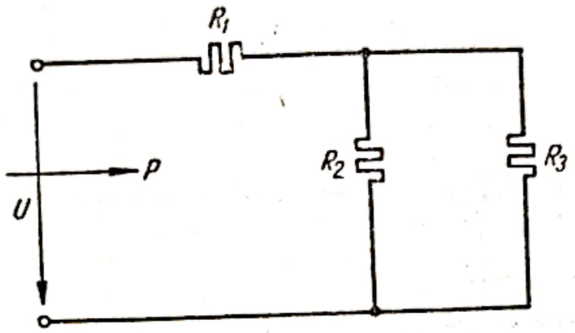


Fig. 2.20

2.21. Cele două fire ale unei linii electrice aeriene (fig. 2.21) au față de pămînt o rezistență de izolație de R_1, respectiv R_2 ohmi. Un voltmetru de rezistență interioară 100 kΩ măsoară o tensiune $U = 400$ V între conductoarele liniei și tensiunile $U_1 = 150$ V, respectiv $U_2 = 100$ V între cîte un conductor și pămînt. Să se determine rezistențele de izolație R_1 și R_2.

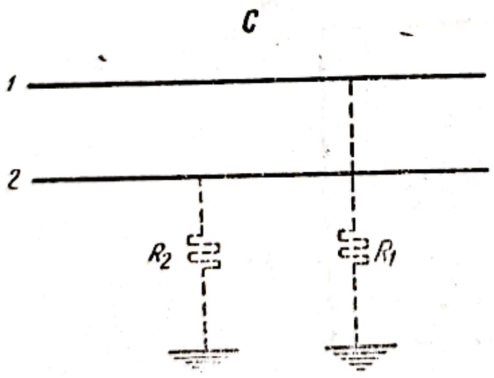


Fig. 2.21

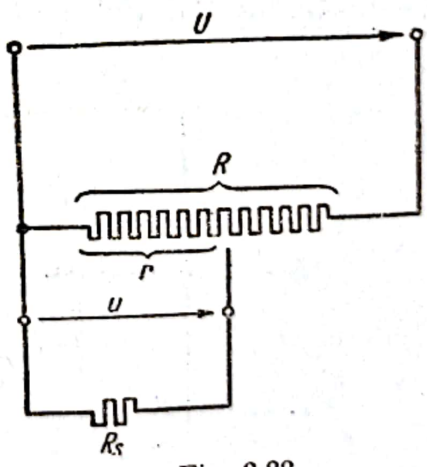


Fig. 2.22

2.22*. Să se studieze variația tensiunii la bornele unui potențiometru (divizor de tensiune) (fig. 2.22), construind curbele $\frac{u}{U} = \frac{r}{R}$ la mers în gol ($R_s = \infty$), și pentru $\frac{R_s}{R} = 0{,}2;\ 1;\ 2;\ 5.$

2.23. Considerînd potențiometrul din problema precedentă, să se determine poziția cursorului c, valoarea lui r, pentru care unei rezistențe $R_s = 1\,000\Omega$ i se aplică o tensiune $u = \frac{U}{2}$, în cazul unui potențiometru cu o rezistență totală $R = 5\,000\Omega$.

2.24. Să se calculeze curenții din laturile circuitului cu conexiune complexă, reprezentat în figura 2.24. Valorile tensiunilor și rezistențelor sînt indicate în schema respectivă.

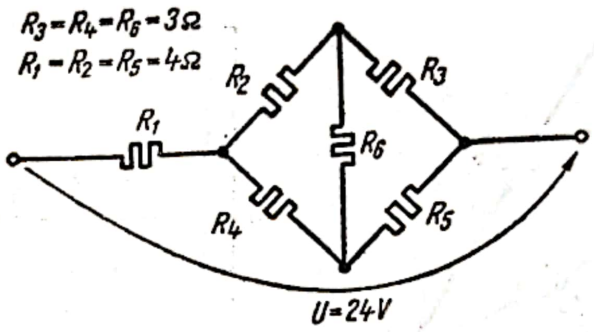


Fig. 2.24

2.25. Două surse de t.e.m. $E_1 = 2$ V, $E_2 = 2{,}1$ V și rezistențe interioare $r_1 = 0{,}2\Omega$, respectiv $r_2 = 0{,}3\Omega$, conectate în paralel (fig. 2.25), alimentează un rezistor de rezistență $R = 2{,}5\Omega$. Să se determine:

a) intensitatea curentului I din rezistor;
b) intensitățile curenților I_1, I_2 debitați de fiecare sursă;
c) tensiunea comună la bornele surselor;
d) puterea dată de fiecare sursă și puterea absorbită de rezistor.

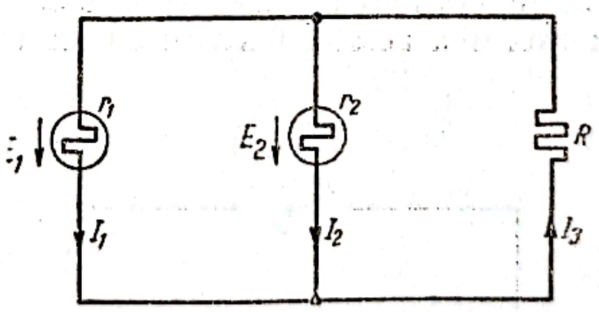


Fig. 2.25

2.26. Două generatoare de curent continuu de rezistență interioară $R_i = 0{,}1\Omega$ și t.e.m. $E_1 = 120$ V și E_2, legate în derivație, alimentează un receptor de rezistență $R = 5\Omega$. Să se determine ce valoare trebuie să aibă t.e.m. E_2, pentru ca generatorul respectiv să debiteze o putere la borne cu 25% mai mare decît cea debitată la borne de primul generator. Care este, în acest caz, puterea totală debitată de generatoare?

Scanned with OKEN Scanner

2.27 (R). Se dă circuitul electric de curent continuu reprezentat în figura 2.27. Valorile rezistențelor și t.e.m. fiind $R_1 = R_2 = 0{,}5\Omega$; $R_3 = 2\Omega$; $R_4 = R_5 = 6\Omega$; $E_1 = 4$ V; $E_2 = 2$ V, să se determine intensitatea curenților din laturi folosind următoarele metode:

a) metoda teoremelor lui Kirchhoff;
b) metoda curenților de contur;
c) transfigurarea triunghi-stea.

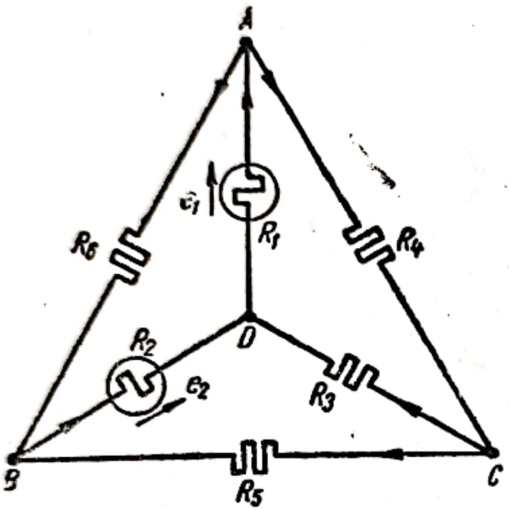


Fig. 2.27

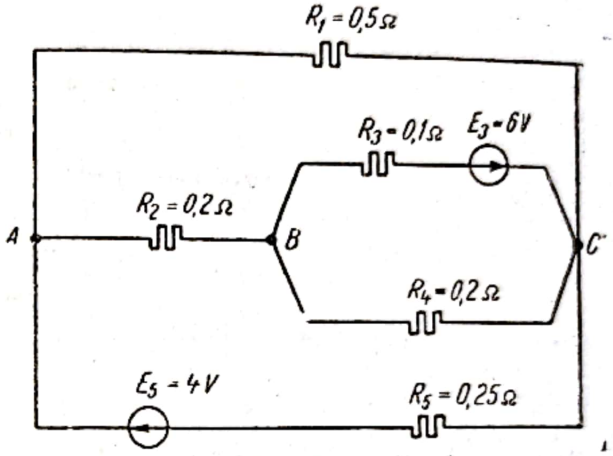


Fig. 2.28

2.28. Să se determine intensitatea curenților din circuitul reprezentat în schema din figura 2.28 folosind cea mai adecvată metodă.

2.29 (I)*. Să se calculeze tensiunea electrică dintre punctele A și B ale circuitului reprezentat în schema din figura 2.29. Ce eroare se face la măsurarea acestei tensiuni cu un voltmetru de rezistență interioară 20 kΩ?

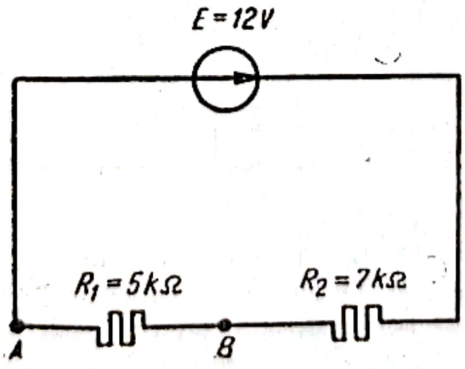


Fig. 2.29

2.30. Ce rezistență ar trebui să aibă voltmetrul în problema precedentă, pentru ca eroarea realizată să fie sub 5%?

Scanned with OKEN Scanner

2.31. Se dă circuitul reprezentat în figura 2.31.

a) Să se calculeze pe baza teoremei superpoziției intensitatea curenților.

b) Să se determine puterea debitată de surse și să se verifice că aceasta este egală cu puterea absorbită de rezistoare.

c) Să se recalculeze, pe baza teoremei generatorului echivalent, intensitatea curentului electric I_3 din latura de rezistență R_3.

Aplicație numerică pentru $R_1 = R_2 = 6\Omega$; $R_4 = R_5 = 12\Omega$; $R_3 = 2\Omega$; $E_1 = 4$ V; $E_2 = 6$ V.

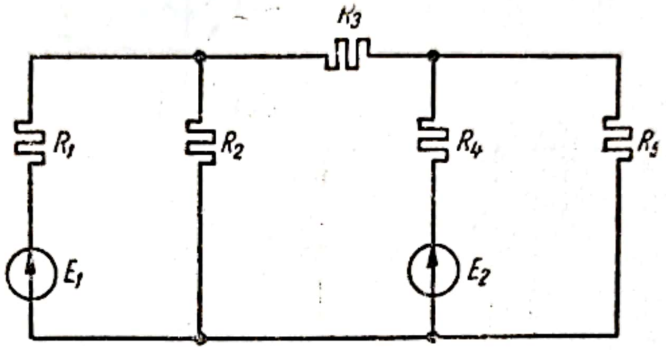


Fig. 2.31

2.32. În circuitele reprezentate în figura 2.32 sînt indicate valorile intensităților curenților în amperi, ale t.e.m. în volți și ale rezistențelor în ohmi. Se cere să se determine valorile care nu sînt indicate în aceste scheme.

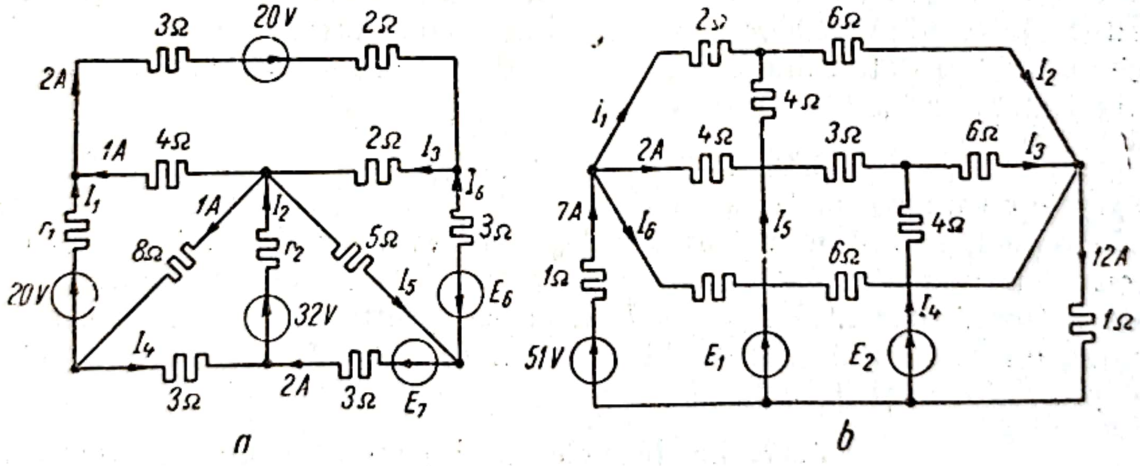


Fig. 2.32

2.33. O linie bifilară de curent continuu cu tensiunea de 120 V este izolată față de pămînt. Datorită unei defecțiuni, rezistența de izolație a conductoarelor față de pămînt a scăzut la unul din conductoare la valoarea $R_1 = 90$ kΩ și la cel de-al doilea la $R_2 = 60$ kΩ. Ce curent electric trece prin corpul de rezistență $r = 50$ kΩ al unei persoane care, stînd pe pămînt, atinge unul din conductoare cu mîna.

2.34. În serie cu o rezistență necunoscută r_x se montează o rezistență adițională r_a și un ampermetru (fig. 2.34). Să se determine

valoarea rezistenței necunoscute, știind că pentru poziția *1* a comutatorului ampermetrul măsoară curentul $I_{A1} = 2$A, iar la trecerea contactului în poziția 2, voltmetrul măsoară tensiunea $U_{V2} = 200$ V. Tensiunea de alimentare U se presupune constantă, independent de poziția comutatorului.

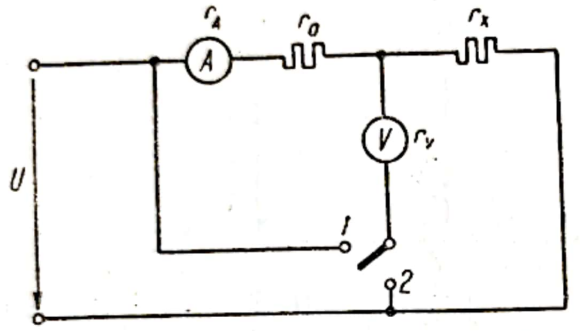


Fig. 2.34

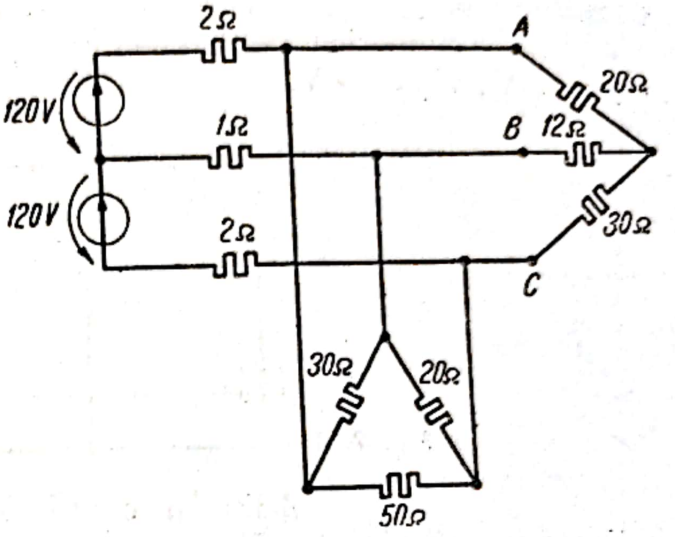


Fig. 2.35

2.35 (I). Două generatoare alimentează cu tensiuni constante $U = 120$ V o linie de curent continuu cu trei conductoare (fig. 2.35). Rezistențele conductoarelor și ale sarcinilor conectate la linie sînt indicate în schemă. Să se determine energia totală dată de aceste generatoare în patru ore de funcționare.

2.36. Măsurînd tensiunea între două puncte A și B ale unei rețele cu un voltmetru de rezistență interioară foarte mare față de rezistențele rețelei, se obține valoarea $U_{AB0} = 42$ V. Înlocuind voltmetrul cu un ampermetru * de rezistență interioară foarte mică față de rezistențele rețelei, acesta măsoară curentul $I_{ABsc} = 7$ A. Să se determine puterea pe care o va consuma un rezistor de rezistență $R = 8\Omega$ conectat în locul ampermetrului între punctele A și B ale rețelei.

2.37. La bornele unui generator cu rezistență interioară R_i și o tensiune electromotoare E se conectează un rezistor de rezistență R. Să se determine valoarea rezistenței R pentru care generatorul transmite receptorului o putere maximă (la R_i și E dați).

2.38. Generatorul G_1 are o tensiune electromotoare $E_1 = 12{,}4$ V. Puterea generatorului la scurtcircuitarea bornelor (presupunînd că generatorul este astfel construit încît să-și mențină la scurtcircuit t.e.m.

* O astfel de conectare a unui ampermetru corespunde unui scurtcircuit între punctele A și B, și deci este admisibilă numai în cazurile cînd rezistența internă a circuitului R_{iAB} este suficient de mare pentru a nu se produce o creștere inadmisibilă a curenților.

Scanned with OKEN Scanner

și rezistența interioară practic neschimbate) este $P_{1,c} = 154$ W. Un al doilea generator G_2 are în aceleași ipoteze $E_2 = 12$ V și $P_{2,c} = 180$ W. Care este puterea maximă ce o poate primi un receptor la ale cărui borne sînt legate în paralel generatoarele G_1 și G_2.

2.39. Un receptor de rezistență R legat la bornele unei surse S_1 consumă o putere P_1. Același receptor legat la bornele sursei S_2 consumă o putere P_2. Este posibil ca, legînd în serie ambele surse la bornele aceluiași receptor, acesta să absoarbă o putere P care să fie mai mică decît una din puterile P_1 și P_2?

2.40. O baterie de n acumulatoare identice, avînd fiecare t.e.m. E și rezistența interioară R_i, este formată prin legarea în paralel a k grupuri de cîte n/k acumulatoare în serie. Să se determine:

a) pe baza teoremei generatorului echivalent, rezistența interioară și t.e.m. echivalentă a bateriei, curentul debitat de baterie atunci cînd la bornele ei se leagă un rezistor de rezistență electrică R;

b) capacitatea bateriei, știind că fiecare element are o capacitate de Q amper-ore.

Aplicație numerică: $E = 2{,}2$ V; $R_i = 25$ mΩ; $n = 120$; $k = 12$; $Q = 42$ amper-ore.

2.41. Pentru bateria de acumulatoare din problema precedentă să se determine:

a) eroarea care se face la măsurarea tensiunii ei în gol, cu un voltmetru avînd o rezistență interioară $R_v = 500\,\Omega$;

b) eroarea care se face la măsurarea curentului de scurtcircuit al bateriei prin legarea la bornele acesteia a unui ampermetru avînd o rezistență interioară $R_A = 200$ mΩ.

2.42. Se dau circuitele reprezentate în figura 2.42. Se cere să se determine curenții din laturi prin cea mai adecvată metodă. În figură sînt indicate valorile t.e.m. în volți și valorile rezistențelor în ohmi.

2.43. Să se demonstreze că pentru circuitele cu un număr de noduri mai mic decît 6, metoda curenților de contur nu poate conduce la un sistem de ecuații mai simplu (cu mai puține ecuații) decît metoda potențialelor nodurilor.

2.44. Un rezervor de 1,5 m³, situat la 20 m deasupra solului, este umplut cu ajutorul unei pompe de randament $\eta_p = 75\%$, acționată de un motor electric de randament $\eta_m = 78\%$. Rezervorul fiind umplut

Scanned with OKEN Scanner

cu apă pompată de la nivelul solului în timp de 10 min, se cere să se determine curentul absorbit de motorul alimentat cu o tensiune de 120 V.

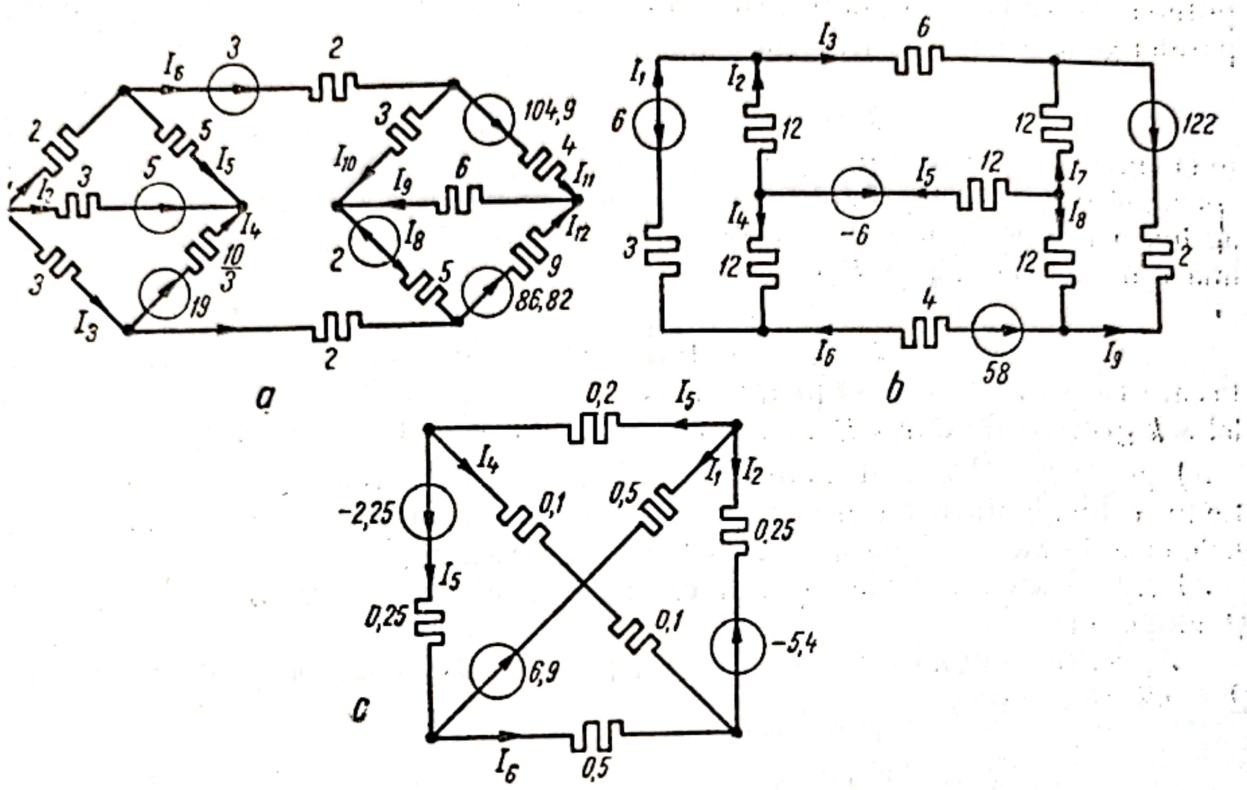


Fig. 2.42

2.45. În figura 2.45 se reprezintă schema monofilară a unei linii electrice, indicîndu-se tensiunea dată de generatorul conectat la începutul liniei, rezistențele ambelor fire ale diferitelor părți ale liniei și curentul

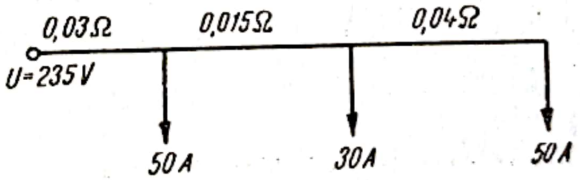


Fig. 2.45

absorbit de receptoarele conectate la linie. Să se determine puterea dată de generator, randamentul liniei și tensiunea la bornele fiecărui receptor.

2.46. Care este rezistența izolației dintre armăturile unui condensator cilindric, dacă rezistivitatea dielectricului omogen dintre armături este ρ.

2.47 *. Un condensator sferic avînd armăturile de rază R_1 și R_2, are între armături un dielectric omogen de permitivitate ε și conductivitate σ. La momentul $t = 0$, armătura interioară este încărcată cu sarcina Q (armătura exterioară avînd o sarcină totală nulă). Să se calculeze energia pierdută prin efect Joule-Lenz în dielectric în intervalul de la $t = 0$ la $t = T$ și să se arate că aceasta este egală cu micșorarea energiei electrice a condensatorului.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 3

CIRCUITE ELECTRICE NELINIARE DE CURENT CONTINUU

A. BREVIAR

3.1. Caracteristica tensiune-curent. Rezistența statică și rezistența dinamică. Dependența dintre tensiunea U la bornele unui element neliniar și intensitatea curentului continuu I care trece prin acest element se numește *caracteristica tensiune-curent* sau caracteristica volt-amper (fig. B.3.1).

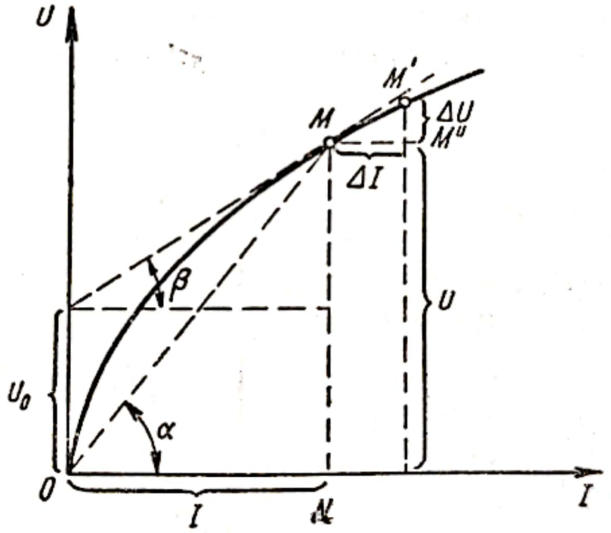


Fig.B. 3.1

Pentru fiecare regim de funcționare, respectiv punct de funcționare (fig. B.3.1), se definesc mărimile :

a) rezistența statică r_s, a elementului :

$$r_s = \frac{U}{I}; \qquad (3.1\ a)$$

b) rezistența dinamică a elementului (denumită uneori rezistență diferențială) :

$$r_d = \frac{dU}{dI}. \qquad (3.1\ b)$$

Scanned with OKEN Scanner

Adeseori în aplicații, pentru porțiuni de caracteristică practic rectilinii, rezistența dinamică se aproximează prin :

$$r_d = \frac{\Delta U}{\Delta I}, \qquad (3.1\ c)$$

în care ΔU și ΔI sînt valori finite corespunzătoare unei mici deplasări a punctului de funcționare de pe caracteristică.

Notînd cu $m_U \left[\frac{V}{\text{cm}}\right]$, $m_I \left[\frac{A}{\text{cm}}\right]$ scările de reprezentare grafică a tensiunilor și a intensităților curenților, se observă relațiile :

$$r_s = \frac{m_U \cdot MN}{m_I \cdot ON} = \frac{m_U}{m_I} \cdot \text{tg}\ \alpha, \qquad (3.1\ d)$$

$$r_d = \lim_{\Delta I \to 0} \frac{U}{I} = \lim_{\Delta MM'' \to 0} \frac{m_U \cdot M'M''}{m_I \cdot MM''} = \frac{m_U}{m_I} \cdot \text{tg}\ \beta. \qquad (3.1\ e)$$

3.2. Metoda grafico-analitică de calcul al circuitelor electrice neliniare de curent continuu. Metoda are la bază construirea grafică, din aproape în aproape, a caracteristicilor tensiune-curent la bornele extreme ale unor circuite cu legături mixte (serie-paralel). Utilizînd caracteristicile, presupuse cunoscute, ale elementelor și expresiile tensiunilor, respectiv curenților la bornele extreme, se determină punct cu punct caracteristicile tensiune-curent la bornele extreme. Exemple se dau în figura B.3.2.

Astfel fiind date caracteristicile *1*, *2* ale unor elemente legate în serie (fig. B.3.2, *a*) pentru fiecare valoare I a curentului din circuit se citesc direct,

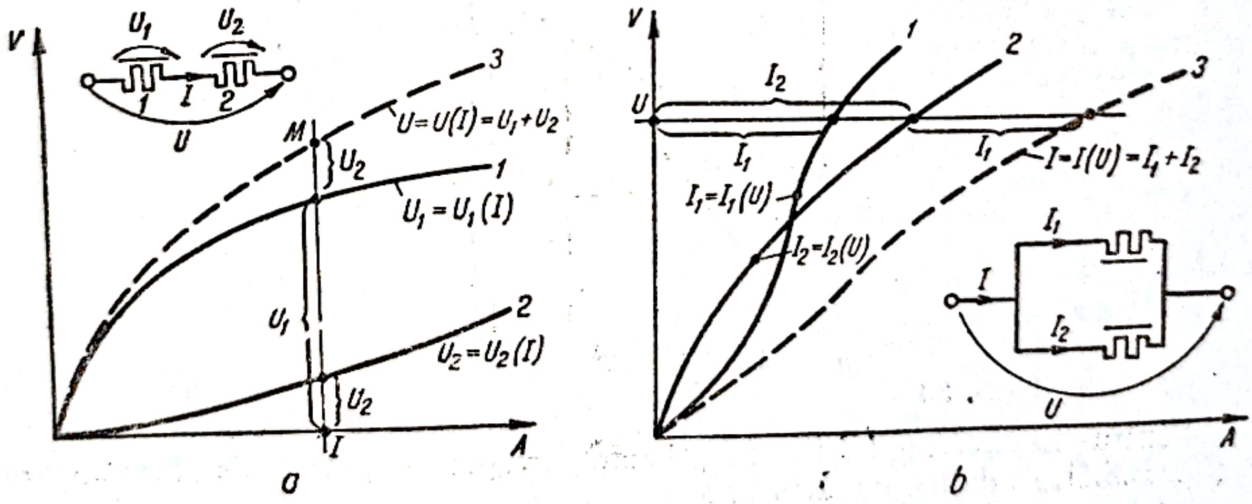


Fig. B.3.2

din caracteristici, tensiunile corespunzătoare U_1, U_2. Tensiunea la bornele circuitului-serie fiind $U = U_1 + U_2$, rezultă imediat poziția punctului M de pe caracteristica tensiune-curent a întregului circuit *3*. Repetînd această construcție (indicată în figură prin acolade) se construiește punct cu punct caracteristica tensiune-curent $U = U(I)$ a întregului circuit. Folosind această

caracteristică $U = U(I)$ reprezentată de curba 3 din figură, se citește direct intensitatea curentului I corespunzător unei tensiuni date U.

În figura B.3.2, *b* se indică construcția caracteristicii tensiune-curent la bornele unui circuit format din două elemente neliniare legate în derivație.

3.3. Metoda liniarizării. Pentru calculul aproximativ al unui circuit neliniar se utilizează adeseori o schemă reprezentînd un circuit electric liniar aproximativ echivalent cu circuitul neliniar. Această echivalență este exactă (completă) pentru regimuri de funcționare a elementelor neliniare corespunzătoare unor porțiuni rectilinii a caracteristicilor tensiune-curent.

Din figura B.3.1 se observă că în vecinătatea unui punct M, aproximînd caracteristica prin tangenta în M la caracteristică, rezultă

$$U = U_0 + r_d I, \qquad (3.3\ a)$$

unde U_0 este tensiunea (ordonata) corespunzătoare punctului de intersecție al axei ordonatelor cu tangenta în M la caracteristică.

Trecînd termenul U_0 în membrul întîi și notînd :

$$E_e = -U_0, \qquad (3.3\ b)$$

relația (3.3, *a*) capătă forma :

$$U + E_e = r_d I. \qquad (3.3\ c)$$

Ca urmare, elementul neliniar are aceeași relație între tensiune și curent ca și o sursă (ideală) de t.e.m. $E_e = -U_0$ legată în serie cu un rezistor liniar de rezistență egală cu rezistența dinamică r_d a elementului corespunzătoare punctului de funcționare M. Rezultă posibilitatea calculului aproximativ (respectiv exact, dacă punctele de funcționare sînt pe porțiuni liniare, cunoscute, de caracteristică) pe baza formării unei scheme echivalente, în care elementele neliniare se înlocuiesc cu laturi active echivalente, așa cum se arată în figura B.3.3. Această metodă de calcul a circuitelor neliniare se numește *metoda liniarizării*.

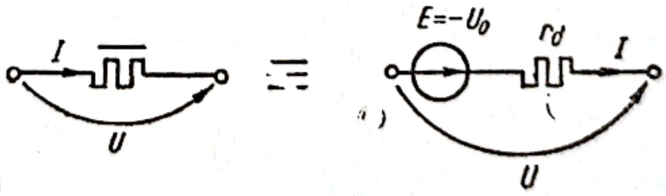


Fig. B.3.3

3.4. Calculul micilor variații ale tensiunilor și curenților. Se consideră un circuit neliniar într-un regim de funcționare dat, în care valorile tensiunilor la bornele elementelor neliniare sînt notate cu U, valorile intensităților curenților cu I și valorile t.e.m. cu E. Curenții și tensiunile au valori care satisfac ecuațiile circuitului (deduse prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff) :

$$\Sigma E = \Sigma RI + \Sigma U; \qquad (3.4\ a)$$
$$\Sigma I = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

în care s-au scos în evidență, separat, căderile de tensiune RI la bornele elementelor liniare. Dacă t.e.m. vor varia luînd valorile $E + \Delta E$, intensitățile curenților și tensiunile variază căpătînd valori notate cu $I + \Delta I$, respectiv $U + \Delta U$. Ecuațiile corespunzătoare acestui nou regim de funcționare sînt:

$$\begin{aligned} &\Sigma(E + \Delta E) = \Sigma R(I + \Delta I) + \Sigma(U + \Delta U); \\ &\Sigma(I + \Delta I) = 0. \end{aligned} \qquad (3.4\ b)$$

Scăzînd ecuațiile corespunzătoare din (3.4 *a*) și (3.4 *b*), se obțin ecuațiile satisfăcute de variațiile ΔE, ΔU și ΔI:

$$\begin{aligned} &\Sigma\Delta E = \Sigma R \cdot \Delta I + \Sigma\Delta U; \\ &\Sigma\Delta I = 0. \end{aligned} \qquad (3.4\ c)$$

Pentru variații mici ale curenților și tensiunilor (3.1 *c*):

$$\Delta U \cong r_d \cdot \Delta I,$$

și deci

$$\begin{aligned} &\Sigma\Delta E = \Sigma R \cdot \Delta I + \Sigma r_d \cdot \Delta I; \\ &\Sigma\Delta I = 0. \end{aligned} \qquad (3.4\ d)$$

Ca urmare, pentru calculul micilor variații de curent și tensiune se pot utiliza ecuațiile (3.4 *d*). Se observă că acestea corespund cazului cînd în circuit ar acționa t.e.m. ΔE corespunzătoare creșterii t.e.m. din regimul considerat, iar elementele neliniare se consideră elemente liniare de rezistențe r_d egale cu rezistențele dinamice corespunzătoare regimului în care t.e.m. au valorile E.

B. PROBLEME

3.1. În figura 3.1 se reprezintă tensiunea la bornele unui generator de sudură în funcție de curentul debitat de acesta. Să se construiască curba reprezentînd puterea dată de generator în funcție de tensiunea la bornele acestuia.

Scanned with OKEN Scanner

3.2. O lampă cu incandescență de tensiune nominală $U_n = 127$ V are caracteristica tensiune-curent indicată în figura 3.2. Să se determine :

a) puterea nominală a lămpii;

b) variația procentuală a puterii lămpii pentru o variație a tensiunii lămpii cu $\pm$ 10% față de tensiunea nominală;

c) rezistența statică și dinamică a lămpii pentru regimul nominal de funcționare ($U_n = 127$ V).

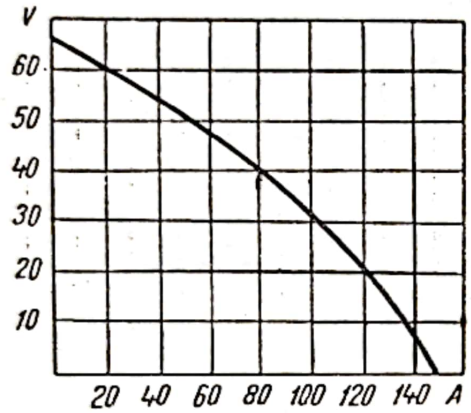


Fig. 3.1

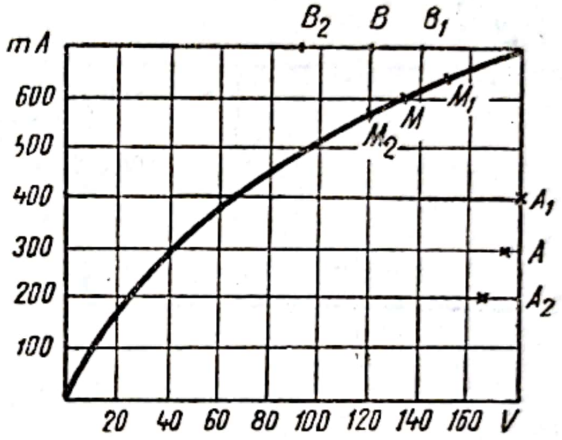


Fig. 3.2

3.3 (R). Pentru alimentarea lămpii considerate în problema precedentă, de la o rețea de 220 V se leagă în serie cu aceasta un reostat de rezistență R. Să se determine :

a) valoarea rezistenței R, care corespunde funcționării lămpii în regim nominal;

b) intensitatea curentului din lampă, dacă R are o valoare cu 10% mai mică decît cea determinată la punctul *a*;

c) variația intensității curentului din lampă pentru o variație a lui U cu $\pm$ 10%, R avînd valoarea de la punctul *a*.

3.4. Două diode semiconductoare au tensiuni la borne (pentru sensul de trecere al curentului), exprimate în funcție de curent prin relațiile aproximative :

$$U_1 = 1{,}6 \cdot I^{0{,}4}, \text{ respectiv } U_2 = 2 \cdot I^{0{,}3},$$

cu unități din sistemul internațional.

Să se determine :

a) rezistențele statice și dinamice ale elementelor pentru $U_1 = U_2 = 1{,}2$ V;

b) intensitatea curentului din cele două diode, dacă acestea se leagă în serie (în sensul de trecere al curentului) la bornele unui element galvanic de t.e.m. $E = 1{,}4$ V și rezistența interioară $r_i = 4\ \Omega$.

Scanned with OKEN Scanner

3.5 (I). Pentru stabilizarea intensității curentului din filamentul unei lămpi electronice se utilizează un baretor (fir de fier în atmosferă de hidrogen) într-un montaj reprezentat în figura 3.5 *a*. Filamentul avînd tensiunea nominală $U_n = 6{,}3$ V și un curent nominal de intensitate $I_n = 0{,}4$ A, să se determine valorile rezistențelor r_2 și r_3, astfel încît la variații ale tensiunii sursei cu $\pm$ 10% față de valoarea $U = 24$ V curentul din filament să nu varieze cu mai mult de 1%. Caracteristica baretorului este indicată în figura 3.5 *b*.

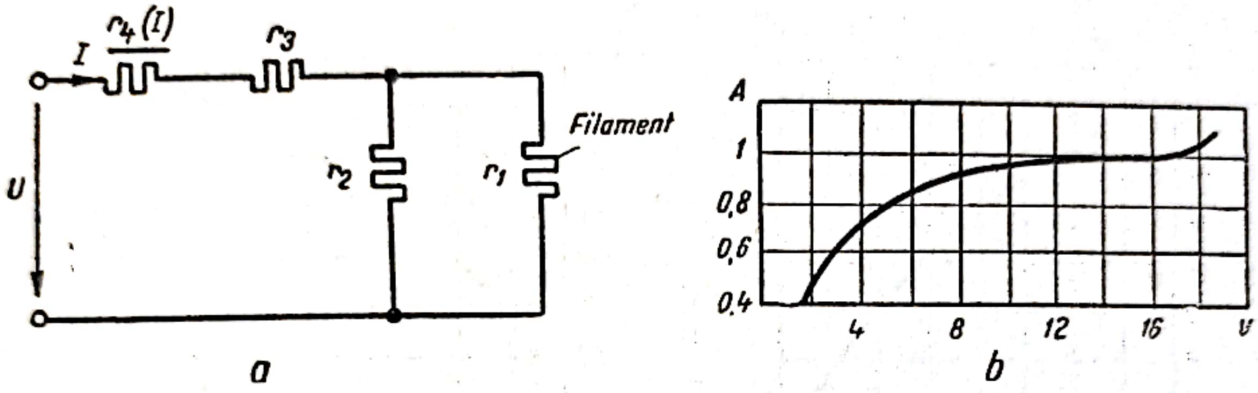


Fig. 3.5

3.6. În figura 3.6 *a* se reprezintă schema unui stabilizator de tensiune format dintr-o rezistență r_1 și un tub stabilitron (tub în care se realizează o descărcare electrică în mediu gazos). Caracteristica volt-amper a tubului fiind cea indicată în figura 3.6, *b*. rezistența (de balast) fiind $r_1 = 2{,}5$ kΩ, iar tensiunea de alimentare $U = 240$ V, să se determine:

a) tensiunea u_0 la bornele de ieșire (funcționare în gol a stabilizatorului);

b) tensiunea u la ieșire, în cazul cînd stabilizatorul alimentează un receptor liniar de rezistență $r_2 = 9{,}5$ kΩ.

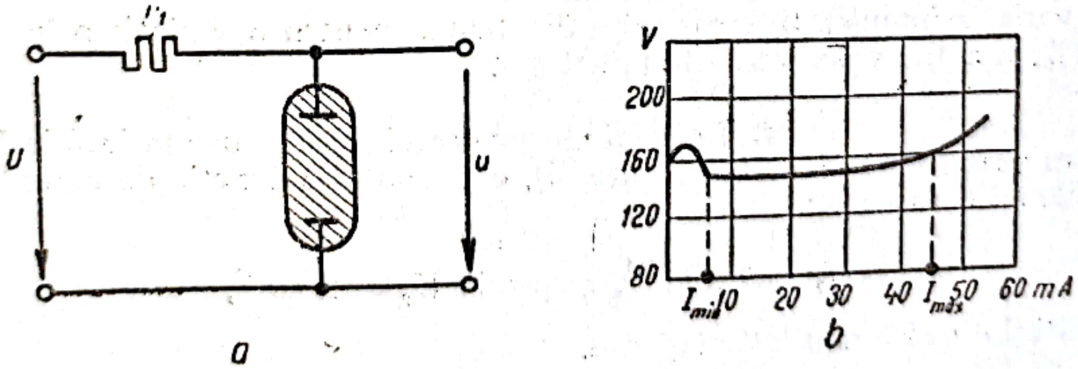


Fig. 3.6

3.7 *. Doi cilindri de tirit (T_1) și (T_2) de aceeași lungime $l = 10$ cm și de rază $R_1 = 1$ cm și $R_2 = 2$ cm au extremitățile legate în paralel (fig. 3.7). Pentru tirit (material ceramic pe bază de carbură de

siliciu), relația dintre intensitatea cîmpului electric E și densitatea de curent J poate fi aproximată prin :

$$E = 27\,600 \cdot J^{0.15},$$

folosind unități din sistemul M.K.S.A.

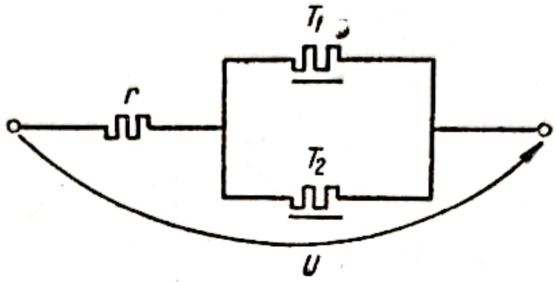


Fig. 3.7

Circuitul electric format din grupul celor doi cilindri (fig. 3.7), legat în serie cu o rezistență $r = 0{,}8$ MΩ, se alimentează cu o tensiune de 800 V. Să se determine intensitatea curentului din fiecare cilindru.

3.8 (I) *. Pentru obținerea unei tensiuni u aproximativ constante (stabilizate) de la o sursă de tensiune U variabilă (în limite nu prea largi) se utilizează stabilizatorul în punte reprezentat în figura 3.8, *a*. Elementele neliniare r_1 (I) fiind rezistențe identice de tirit, cu caracteristica reprezentată în figura 3.8, *b*, iar elementele liniare avînd o rezistență $r_2 = 1\,600$ Ω, să se determine :

a) tensiunea u_0 la bornele de ieșire (la mers în gol), pentru următoarele valori ale tensiunii de intrare $U = 180, 200, 220$ V ;

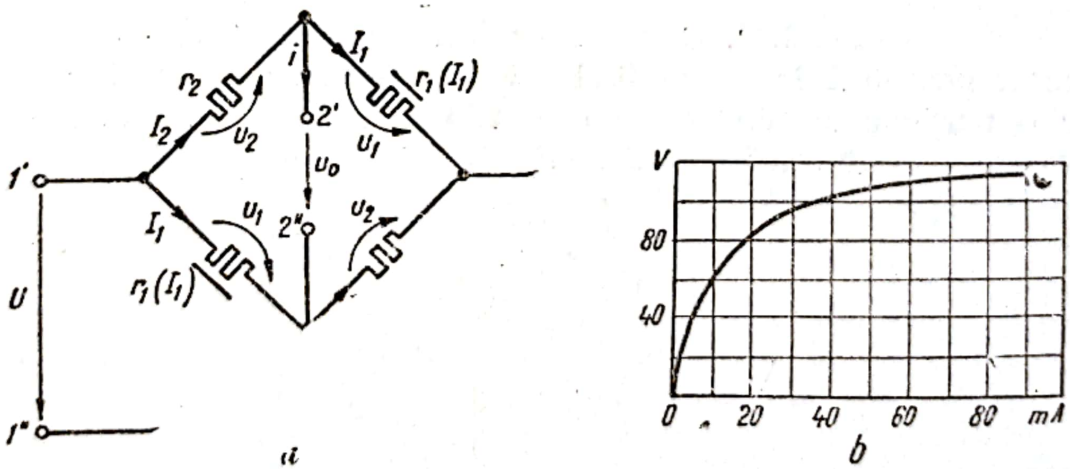


Fig. 3.8

b) intensitatea curentului i care ar trece printr-un ampermetru de rezistență neglijabilă legat la ieșirea stabilizatorului, pentru aceleași valori ale tensiunii de intrare U ;

c) tensiunea U pentru care $u_0 = 0$.

3.9 (R). Să se determine valoarea rezistențelor r_2 și r_3, astfel încît stabilizatorul de tensiune reprezentat în figura 3.9 să alimenteze cu o tensiune cît mai apropiată de $u = 50$ V un receptor liniar de rezistență $r = 300\ \Omega$, de la o sursă a cărei tensiune U variază între 210 și 240 V. Elementele neliniare au caracteristica tensiune-curent indicată în figura 3.8 *b*.

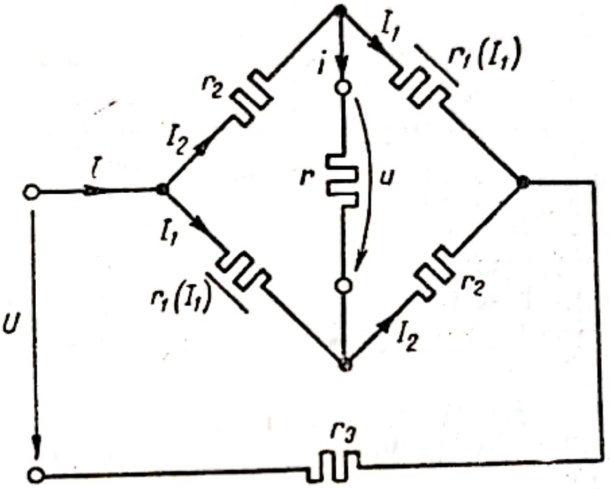


Fig. 3.9

3.10. În ce limite variază tensiunea u, din problema precedentă, pentru variația considerată a tensiunii de alimentare $U =$ $= (210...240)$ V?

3.11. O lampă cu incandescență L este conectată în circuitul reprezentat în figura 3.11. Să se determine curentul din lampă pentru o tensiune de alimentare $U = 200$ V și $r = 200\ \Omega$. Caracteristica tensiune-curent este cea indicată în figura 3.2.

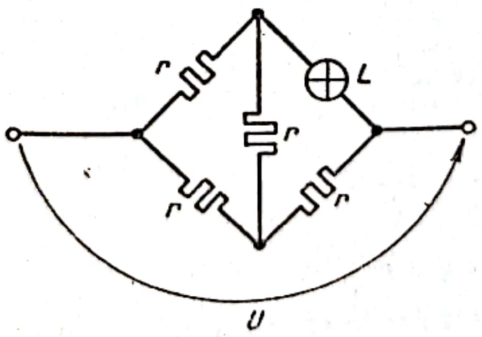
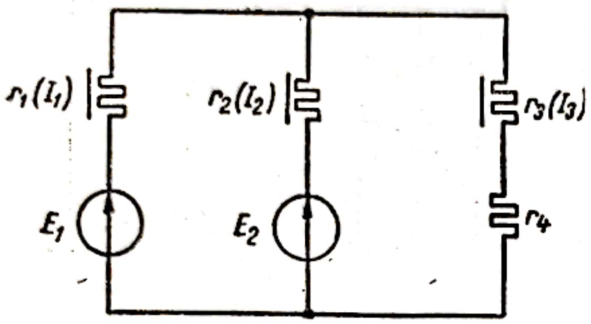


Fig. 3.11

3.12. Care este creșterea puterii absorbite de lampa considerată în problema precedentă dacă tensiunea U crește cu 10%?

Scanned with OKEN Scanner

3.13. Să se determine puterile consumate de cele trei elemente neliniare conectate ca în figura 3.13, *a* și având caracteristicile indicate în figura 3.13, *b*. Se consideră $E_1 = 120$ V și $E_2 = 80$ V. Se știe că elementele funcționează pe porțiunile aproximativ liniare ale caracteristicilor și $R_4 = 10\ \Omega$.



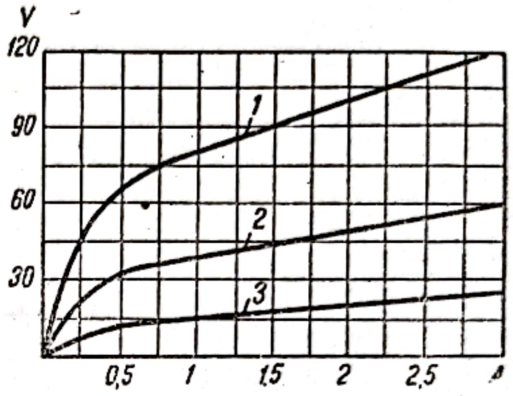


Fig. 3.13

3.14. Care este creșterea procentuală a curenților din elementele considerate în problema precedentă dacă t.e.m. cresc cu 10%?

3.15. Caracteristica tensiune-curent a unui arc electric este determinată de ecuația:

$$i = \frac{30}{u - 20},$$

exprimată în unități din sistemul M.K.S.A.

Să se determine intensitatea curentului din arc știind că suma dintre tensiunea electrică în lungul arcului și căderea de tensiune pe o rezistență de 7 Ω înseriată cu electrozii este $U = 50$ V.

3.16 *. Ce curent continuu trece printr-un fir de aluminiu de diametru $d = 0{,}9$ mm și lungime $l = 40$ cm, la ale cărui extremități se aplică o tensiune $U = 0{,}6$ V. Aerul înconjurător se consideră la o temperatură constantă de 20°C; coeficientul de transmisie a căldurii prin suprafața laterală a firului este $k = 12$ W/m² °C. Se neglijează transmiterea de căldură în lungul firului și se admite o valoare medie constantă a coeficientului de temperatură al rezistenței.

3.17. Un grup de elemente redresoare cu seleniu, legate în serie, au caracteristica tensiune-curent reprezentată în figura 3.17, *b*. Acest grup de rezistență (statică) $r_1(I_1)$ este conectat ca în schema din

Scanned with OKEN Scanner

figura 3.17, *a*, unde $r_2 = 20\ \Omega$, $r_3 = 180\ \Omega$ și $r_4 = 100\ \Omega$. Să se determine intensitatea curentului din fiecare element al schemei, atunci cînd tensiunea de alimentare este $U = 36$ V. Se vor utiliza :

a) metoda aproximațiilor succesive;

b) metoda grafică, construindu-se caracteristica $U(I_4)$.

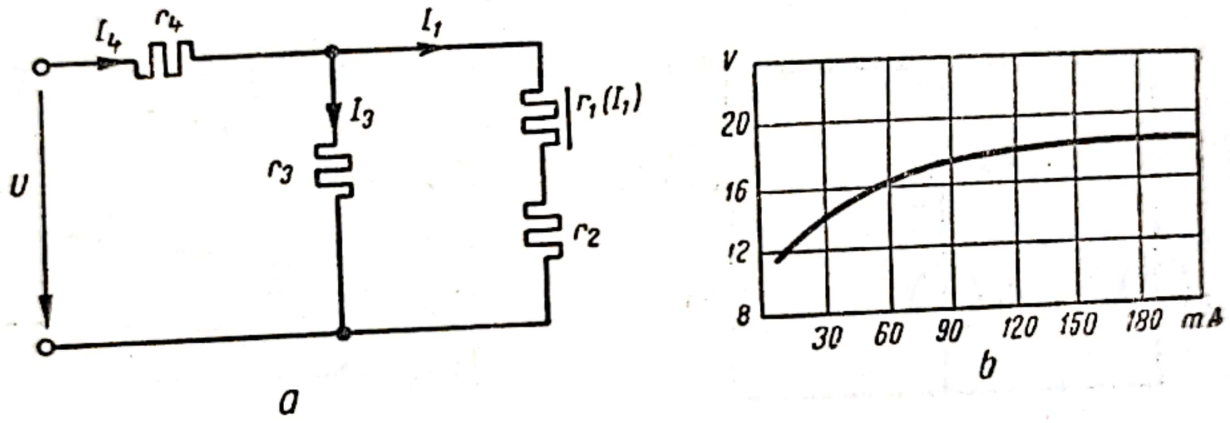


Fig. 3.17

Capitolul 4

CÎMPUL MAGNETIC

A. BREVIAR

4.1. Cîmpul magnetic și inducția magnetică. Experiența arată că între corpurile parcurse de curent electric, corpurile încărcate cu sarcină electrică și aflate în mișcare față de mediul lor înconjurător și corpurile denumite magnetizate se exercită forțe și momente mecanice. Aceste acțiuni se explică prin interacțiunea dintre aceste corpuri și un sistem fizic, produs de acestea, denumit *cîmp magnetic*.

Experiența arată că asupra unui mic corp încărcat cu sarcina electrică q, mișcîndu-se cu viteza $\bar{v}$ față de mediul fluid [1] înconjurător, situat într-un cîmp magnetic, se exercită o forță :

$$\bar{F} = q \cdot (\bar{v} \times \bar{B}), \tag{4.1 a}$$

în a cărei expresie intervine o mărime vectorială de stare locală a cîmpului magnetic, denumită *inducție magnetică* ($\bar{B}$).

Experiența mai arată că asupra unui element de conductor filiform de lungime foarte mică, parcurs de curent electric și situat în cîmp magnetic extern, se exercită o forță $\Delta\bar{F}$:

$$\Delta\bar{F} = i \cdot (\overline{\Delta s} \times \bar{B}), \tag{4.1 b}$$

în a cărei expresie $\overline{\Delta s}$ este un vector orientat în direcția conductorului, în sensul corespunzător sensului de referință al curentului de intensitate i.

Forța rezultantă exercitată asupra unui conductor filiform parcurs de curent electric de intensitate i este :

$$\bar{F} = i \oint \overline{ds} \times \bar{B}. \tag{4.1 c}$$

---

[1] Relația este riguros valabilă în vid sau în fluide suficient de rarefiate.

Scanned with OKEN Scanner

4.2. Momentul magnetic și magnetizația corpurilor. Experiența arată că există mici corpuri care, situate într-un cîmp magnetic, sînt supuse unui cuplu care tinde să le dea o anumită orientare. Aceste mici corpuri se numesc corpuri magnetizate. Cuplul, respectiv forța exercitată, în vid, asupra acestor corpuri se exprimă :

$$\bar{C} = \bar{m} \times \bar{B};$$
$$\bar{F} = (\bar{m}\nabla)\bar{B}, \qquad (4.2\,a)$$

în care $\bar{m}$ este o mărime de stare magnetică a micului corp, denumită *moment magnetic*.

Pentru caracterizarea locală (într-un punct) a stării de magnetizare a unui corp se definește *magnetizația* :

$$\bar{M} = \frac{\mathrm{d}\bar{m}}{\mathrm{d}v}, \qquad (4.2\,c)$$

în care $\mathrm{d}\bar{m}$ este momentul magnetic al unui volum elementar $\mathrm{d}v$ care cuprinde punctul considerat din cîmp.

O mică spiră străbătută de curent electric de conducție de intensitate i are un moment magnetic echivalent

$$\bar{m} = i \cdot \bar{A}, \qquad (4.2\,b)$$

în care $\bar{A} = A \cdot \bar{n}$ este vectorul-arie al spirei (sensul normalei $\bar{n}$ fiind asociat după regula burghiului drept față de sensul de referință al curentului din spiră).

4.3. Formula lui Biot-Savart-Laplace. Inducția magnetică a cîmpului magnetic stabilit de un conductor filiform parcurs de curent electric constant sau cvasistaționar (lent variabil) și situat într-un mediu omogen, izotrop și liniar [1] (cu proprietăți independente de inducția magnetică), are expresia

$$\bar{B} = \frac{\mu i}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{\overline{\mathrm{d}s} \times \bar{R}}{R^3}, \qquad (4.3\,a)$$

unde : μ este o mărime de material ce caracterizează mediul corporal, denumită *permeabilitate magnetică*; $\overline{\mathrm{d}s}$ — elementul de lungime al conductorului; $\bar{R}$ — vectorul de poziție avînd originea în punctul unde se află elementul de lungime și extremitatea în punctul unde se stabilește inducția $\bar{B}$ (fig. B.4.1).

Inducția magnetică la distanța a de un conductor rectiliniu de lungime $l \gg a$, parcurs de curentul constant sau cvasistaționar de intensitate i, situat în aer (vid), este :

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}. \qquad (4.3\,b)$$

[1] Riguros, relația este valabilă pentru vid sau fluide suficient de rarefiate cu $\mu \simeq \mu_0$.

Scanned with OKEN Scanner

Inducția magnetică pe axa unei bobine de lungime l mult mai mare decît raza R a celor n spire, străbătute de un curent de intensitate i, are în interiorul bobinei expresia (aproximativă) :

$$B = \frac{\mu_0 \cdot n \cdot i}{l}. \qquad (4.3\ c)$$

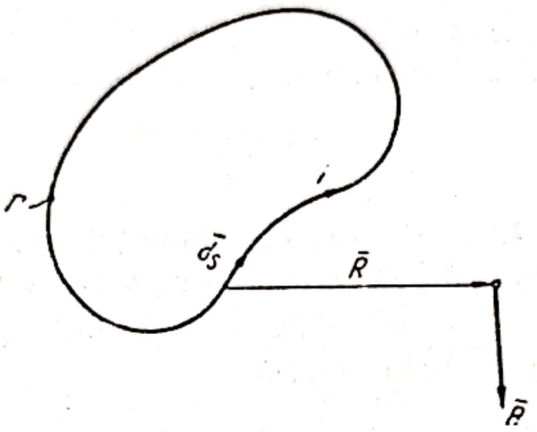


Fig. B.4.1

4.4. Fluxul magnetic și legea fluxului magnetic. Prin definiție, integrala de suprafață a inducției magnetice se numește *flux magnetic* (Φ) :

$$\Phi = \int_s \overline{B}\, \overline{\mathrm{d}A}, \qquad (4.4\ a)$$

în care $\overline{\mathrm{d}A}$ sînt elementele vectoriale de arie ale suprafeței considerate S.

Fluxul magnetic printr-o suprafață plană, de arie A, perpendiculară pe liniile de inducție $\overline{B}$, ale unui cîmp magnetic omogen, se exprimă prin relația

$$\Phi = A \cdot B \cdot \cos \alpha, \qquad (4.4\ b)$$

în care α este unghiul format de normala pe suprafață cu vectorul $\overline{B}$.

Experiența arată că fluxul magnetic prin orice suprafață închisă (Σ) este nul (legea fluxului magnetic — lege generală) :

$$\oint_\Sigma \overline{B}\, \overline{\mathrm{d}A} = 0. \qquad (4.4\ c)$$

Forma locală a legii fluxului magnetic este

$$\operatorname{div} \overline{B} = 0. \qquad (4.4\ d)$$

4.5. Inductivitatea proprie și mutuală. *Inductivitatea proprie* (L) a unei bobine (în regim cvasistaționar) este definită ca raportul dintre fluxul magnetic total al bobinei Φ (suma fluxurilor magnetice ale spirelor) și intensitatea i a curentului din bobină care produce acest cîmp magnetic :

$$L = \frac{\Phi}{i}. \qquad (4.5\ a)$$

Scanned with OKEN Scanner

Inductivitatea mutuală (L_{12}) a unui circuit *2* în raport cu un circuit *1* (ambele în regim cvasistaționar) este, prin definiție, raportul dintre fluxul magnetic total Φ_{21} stabilit în circuitul *2* de către curentul de intensitate i_1 din primul circuit :

$$L_{12} = \frac{\Phi_{21}}{i_1}. \tag{4.5 b}$$

Inductivitatea proprie a unui solenoid cilindric situat în aer, de lungime l mult mai mare decît raza R a celor n spire ale sale este :

$$L = \frac{\mu_0 \cdot (\pi R^2) \cdot n^2}{l}. \tag{4.5 c}$$

4.6. Intensitatea cîmpului magnetic este o mărime vectorială, ce caracterizează local cîmpul magnetic, care se exprimă în funcție de valorile locale (din punctul respectiv) ale inducției magnetice $\bar{B}$ și ale polarizației magnetice $\bar{M}$ prin relația :

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M}.$$

Relația precedentă se pune de obicei sub forma :

$$\bar{B} = \mu_0(\bar{H} + \bar{M}). \tag{4.6}$$

Adeseori, intensitatea cîmpului magnetic se numește prescurtat cîmp magnetic.

4.7. Legea polarizației magnetice. Pentru o clasă largă de corpuri (izotrope și neferomagnetice) polarizația magnetică este o funcție liniară de intensitatea locală a cîmpului magnetic :

$$\bar{M} = \chi_m \bar{H}, \tag{4.7 a}$$

în care χ_m este o mărime de material, numită *susceptivitate magnetică*. Utilizînd relația (4.6) pentru corpurile a căror polarizație magnetică este dată de relația (4.7 *a*), se obține:

$$\bar{B} = \mu \bar{H}, \tag{4.7 b}$$

cu

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m). \tag{4.7 c}$$

Mărimea

$$\mu_r = 1 + \chi_m \tag{4.7 d}$$

se numește *permeabilitate magnetică relativă* :

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}. \tag{4.7 e}$$

Scanned with OKEN Scanner

4.8. Tensiunea magnetică. Integrala de linie a intensității cîmpului magnetic se numește tensiune magnetică :

$$U_{M,AB} = \int_{A(C)}^{B} \overline{H}\,\overline{\mathrm{ds}}. \tag{4.8}$$

4.9. Legea circuitului magnetic. Experiența arată că tensiunea magnetică de-a lungul oricărei curbe închise (Γ) satisface relația

$$\oint_{\Gamma} \overline{H}\,\overline{\mathrm{ds}} = i_{S_\Gamma} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_\Gamma} \overline{D}\overline{\mathrm{d}A}, \tag{4.9 a}$$

în care i_{S_Γ} și $\int_{S_\Gamma} \overline{D}\,\overline{\mathrm{d}A}$ reprezintă, respectiv, intensitatea curentului electric de conducție și fluxul electric printr-o suprafață S_Γ, limitată de curba Γ. Sensul de referință pe suprafață pentru calculul lui i_{S_Γ} și $\int_{S_\Gamma} \overline{D}\,\overline{\mathrm{d}A}$ este asociat, după regula burghiului drept, cu sensul de referință pe curbă (ales pentru calculul tensiunii magnetice). Legea este valabilă pentru curbe materiale, formate din puncte determinate ale unor corpuri.

Pentru cîmpuri magnetice cvasistaționare, cum sînt cîmpurile magnetice produse de conductoare parcurse de curenți constanți sau lent variabili în timp, termenul :

$$i_{HS_\Gamma} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_\Gamma} \overline{D}\,\overline{\mathrm{d}A}, \tag{4.9 b}$$

denumit *curent hertzian*, este neglijabil față de intensitatea curentului de conducție. În regim cvasistaționar, legea circuitului magnetic capătă forma particulară

$$\oint_{\Gamma} \overline{H}\,\overline{\mathrm{ds}} = i_{S_\Gamma}. \tag{4.9 c}$$

4.10. Teorema superpoziției cîmpurilor magnetice. Intensitatea $\overline{H}$ și inducția $\overline{B}$ a cîmpului magnetic, produs într-un mediu omogen, izotrop și liniar, de o densitate de curent $\overline{J}$, se obțin prin suprapunerea intensităților $\overline{H}_k$ și inducțiilor magnetice $\overline{B}_k$ ale cîmpurilor magnetice produse separat de densitățile de curent $\overline{J}_k$ care satisfac relația $\overline{J} = \sum_{k=1}^{n} \overline{J}_k$:

$$\overline{H} = \sum_{k=1}^{n} \overline{H}_k; \quad \overline{B} = \sum_{k=1}^{n} \overline{B}_k. \tag{4.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe baza acestei teoreme, cîmpul magnetic produs într-un mediu omogen, izotrop și liniar de un conductor cilindric foarte lung parcurs de un curent electric cvasistaționar se poate determina considerînd conductorul descompus în fire rectilinii de secțiune dA parcurse de curentul elementar di.

B. PROBLEME

4.1. Un electron, la intrarea într-un cîmp magnetic omogen, are o viteză $\bar{v}$ perpendiculară pe direcția inducției magnetice $\bar{B}$. Să se determine:

a) mărimea forței magnetice exercitate asupra electronului;

b) raza cercului pe care se va deplasa acest electron;

c) viteza unghiulară a electronului.

Aplicație numerică: $v = 10^5$ m/s; $B = 0{,}03$ Wb/m^2.

4.2 (R). Un electron cu o energie cinetică de 150 de electron-volți se deplasează în cîmpul magnetic terestru, în planul ecuatorului, unde $B = 1$ Gs. Să se determine:

a) lungimea cercului parcurs de acest electron;

b) perioada de rotație a electronului.

4.3. Pentru focalizarea într-un punct N a unui fascicul de ioni, de sarcină q și masă m, care au în punctul M o viteză $\bar{v}$ care face unghiul α cu dreapta MN, se stabilește un cîmp magnetic omogen de inducție magnetică $\bar{B}$, paralelă cu dreapta MN (fig. 4.3). Să se determine valoarea inducției magnetice pentru care electronii ajung în punctul M, realizînd o rotație completă pe elicea de-a lungul căreia se deplasează.

4.4. (R)*. Un magnetron este format dintr-un conductor cilindric de rază $r_1 = 4$ cm și un fir de rază $r_2 = 0{,}2$ cm, situat pe axa cilindrului (fig. 4.4). Între fir și cilindru se aplică o tensiune electrică de $U = 9$ V. Prin trecerea unui curent electric prin fir, acesta se aduce în stare

Scanned with OKEN Scanner

de incandescență și emite electroni, stabilindu-se un curent electric i între fir și cilindru. Să se determine cea mai mică valoare a inducției magnetice a unui cîmp magnetic omogen și paralel cu axa cilindrului pentru care intensitatea curentului electric se anulează.

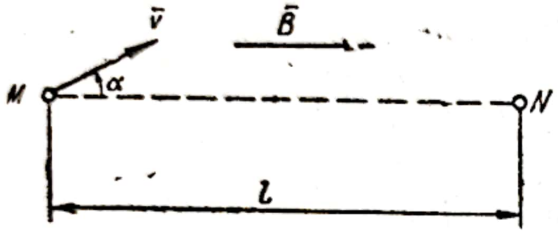


Fig. B.4.3

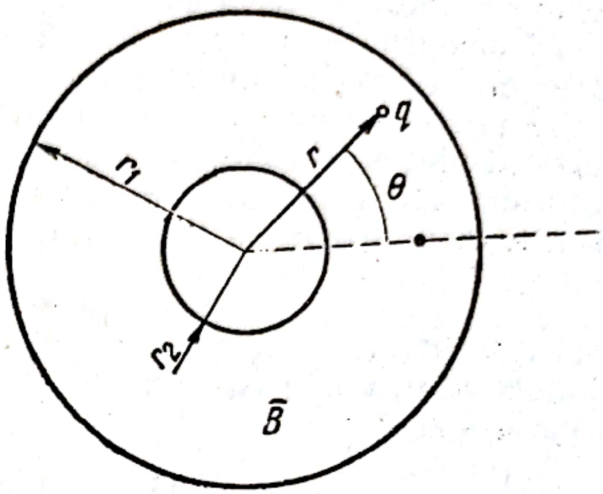


Fig. B.4.4

4.5. Un ion de masă m cu viteză inițială nulă și sarcina electrică q se mișcă sub acțiunea cîmpului gravitațional $\bar{g}$ și a unui cîmp omogen de inducție magnetică $\bar{B}$, perpendiculară pe $\bar{g}$. Să se determine:

a) viteza ionului ca funcție de timp;
b) energia cinetică a ionului ca funcție de timp;
c) ecuațiile parametrice ale traiectoriei ionului.

4.6. Un electron de sarcină electrică e și masă m trece printr-o regiune în care coexistă un cîmp gravitațional omogen $\bar{g}$ și un cîmp magnetic omogen de inducție $\bar{B}$ perpendiculară pe $\bar{g}$. Să se arate că un electron care are o mișcare rectilinie și uniformă de viteză:

$$\bar{v} = -\frac{m}{e} \cdot \frac{\bar{g} \times \bar{B}}{B^2}$$

nu este deviat la trecerea prin regiunea amintită.

4.7. Să se determine forța exercitată asupra unui conductor filiform rectiliniu, de lungime $l = 30$ cm, parcurs de un curent electric de intensitate $i = 100$ A, situat într-un cîmp magnetic de inducție $B = 6\,000$ Gs. Unghiul dintre $\bar{B}$ și direcția conductorului se consideră că are următoarele valori: $\alpha = 0°, 30°, 90°$.

4.8. Un conductor de 0,5 m lungime parcurs de un curent electric de intensitate $i = 50$ A este situat într-un cîmp magnetic omogen de inducție magnetică $B = 10\,000$ Gs. Între ce limite variază forța exercitată asupra conductorului atunci cînd acesta are o orientare variabilă?

Scanned with OKEN Scanner

4.9. Pe un cadru dreptunghiular de dimensiuni (40×30) mm² situat în aer sînt înfășurate $n = 100$ spire, străbătute de un curent electric de intensitate $i_1 = 5$ A. Să se determine momentul forțelor care tind să rotească acest cadru, în jurul axei sale paralele cu latura de 40 mm, cînd este situat într-un cîmp magnetic:

a) omogen, de inducție $B = 2\,000$ Gs perpendicular pe laturile de 30 mm lungime și formînd un unghi $\alpha = 30°$ cu celelalte două laturi ale cadrului;

b) produs de un conductor rectiliniu filiform paralel cu laturile de 30 mm ale cadrului și străbătut de un curent electric de intensitate $i_2 = 10$ A. Axul cadrului este la o distanță $d = 5$ cm de conductor. Laturile de 40 mm lungime sînt la distanțele $a_1 = 4{,}36$ cm, respectiv $a_2 = 6{,}25$ cm de conductor.

4.10. Să se determine fluxul magnetic prin spirele considerate în problema precedentă, pentru cele două cazuri *a* și *b*. Care este inductivitatea mutuală dintre conductorul rectiliniu și bobina formată din cele n spire?

4.11 (I). Trei conductoare filiforme, rectilinii și paralele, sînt situate la o aceeași distanță d unele de altele (fig. 4.11). Conduc-

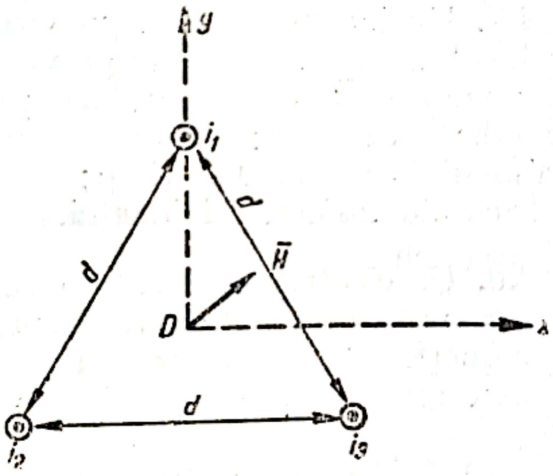


Fig. 4.11

toarele sînt situate în aer ($\mu \simeq \mu_0$), au o lungime $l \gg d$ și sînt străbătute de curenți a căror intensitate variază sinusoidal în timp:

$$i_1 = I_m \sin \omega t$$

$$i_2 = I_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$i_3 = I_m \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right),$$

unde I_m și ω sînt mărimi constante, iar t reprezintă timpul.

Să se determine intensitatea cîmpului magnetic în punctele dreptei D situate la o aceeași distanță r de cele trei conductoare.

Scanned with OKEN Scanner

4.12. Printr-o bandă conductoare dreaptă, de lungime l, foarte mare față de lățimea benzii $b = 3$ cm și de grosime neglijabilă, trece un curent de intensitate $I = 50$ A. Banda fiind situată în aer, se cere să se determine inducția magnetică B în punctul P situat la o distanță $d = 3$ cm de bandă (fig. 4.12).

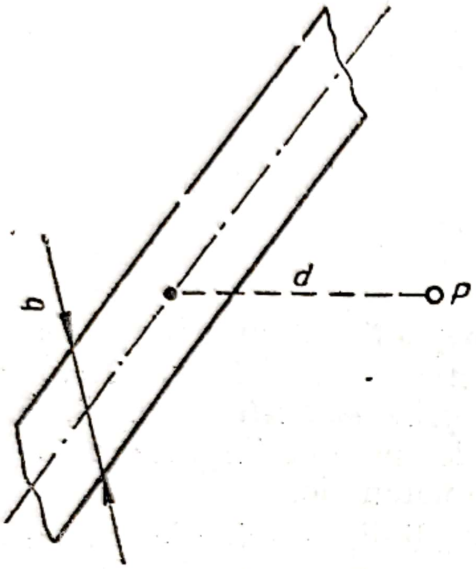


Fig. 4.12

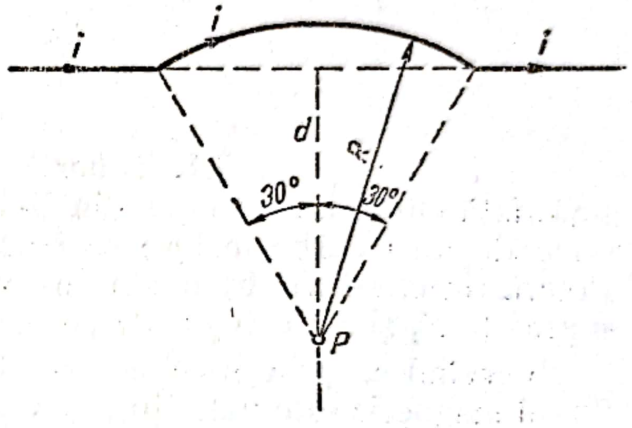


Fig. 4.13

4.13. Conductorul filiform și plan foarte lung reprezentat în figura 4.13 este situat în aer și parcurs de un curent electric de intensitate $I = 100$ A. Să se determine inducția magnetică în punctul P a cărui poziție este indicată în figură.

4.14. Un cablu coaxial format dintr-un conductor cilindric de rază r_1 și un conductor tubular de rază interioară r_2 și de rază exterioară r_3, coaxial cu primul, este străbătut de curentul electric i. Curentul care trece prin conductorul interior se întoarce prin conductorul exterior. Conductoarele și izolantul dintre ele avînd o permeabilitate magnetică $\mu = \mu_0$ și o lungime $l \gg r_3$, se cere să se determine intensitatea cîmpului magnetic ca funcție de distanță pînă la axa de simetrie a cablului.

4.15 (I). Un conductor cilindric neferomagnetic de rază a, foarte lung, are în interior, pe toată lungimea sa, o cavitate cilindrică de rază $b < a$, distanța dintre axa cilindrului și axa cavității fiind $c < (a - b)$. Conductorul este parcurs de un curent electric de densitate uniformă $\bar{J}$, paralelă cu axa cilindrului. Să se determine cîmpul magnetic în conductor și în cavitate.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 5

CIRCUITE MAGNETICE

A. BREVIAR

5.1. Tuburile de flux magnetic și reluctanța lor. O suprafață cilindrică formată din liniile de inducție magnetică care trec prin punctele unei curbe închise se numește *tub de flux magnetic* (fig. B. 5.1). Practic interesează, în medii izotrope, tuburile de flux limitate de două suprafețe S_1 și S_2, ortogonale pe liniile de cîmp magnetic.

Observînd că prin orice suprafață formată din linii de inducție magnetică fluxul magnetic este nul, din legea fluxului magnetic rezultă că fluxul magnetic are o valoare Φ constantă pentru orice secțiune a tubului de flux.

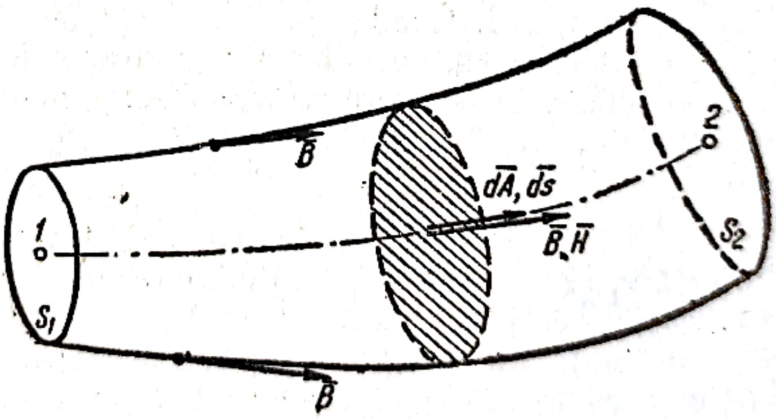


Fig. B.5.1

Reluctanța R_M, denumită și *rezistență magnetică*, este definită ca raportul dintre tensiunea magnetică U_M din lungul tubului de flux și dintre fluxul magnetic Φ al tubului de flux:

$$R_M = \frac{U_M}{\Phi} = \frac{\int_1^2 \overline{H}\,\overline{\mathrm{d}s}}{\int_s \overline{B}\,\mathrm{d}\overline{A}}. \qquad (5.1\ a)$$

Scanned with OKEN Scanner

Între tensiunea magnetică, fluxul magnetic și reluctanța unui tub de flux există, ca urmare, relația

$$U_M = R_M \cdot \Phi,$$

denumită *legea lui Ohm pentru circuitele magnetice.*

Ca urmare, reluctanța se poate exprima în forma

$$R_M = \int_1^2 \frac{\bar{H}\,\overline{ds}}{\int_S \bar{B}\,\overline{dA}}, \qquad (5.1\ b)$$

unde S este suprafața secțiunii transversale a tubului care trece prin $\bar{ds}$ și este o suprafață ortogonală la liniile de cîmp magnetic. În practică interesează, de obicei, tuburile de flux la care inducția magnetică B și permeabilitatea μ au valori constante pe fiecare din suprafețele S. În acest caz, reluctanța tubului de flux se exprimă:

$$R_M = \int_1^2 \frac{H\,ds}{B\int_S dA}, \qquad (5.1\ c)$$

unde s-a ținut seamă că tensiunea magnetică se calculează de-a lungul unei linii de cîmp magnetic. Rezultă ca urmare

$$R_M = \int_1^2 \frac{ds}{\mu A}, \qquad (5.1\ d)$$

unde A este aria secțiunii S corespunzătoare elementului ds.

5.2. Reluctanța unui tub de flux, cu secțiune de arie constantă A, de lungime l, conținînd un material omogen de permeabilitate μ, este:

$$R_M = \frac{l}{\mu A}. \qquad (5.1\ e)$$

5.3. Circuitele magnetice. Circuitele magnetice sînt formate în principal din materiale feromagnetice (de obicei, din tablă de oțel electrotehnic). Laturile circuitului magnetic se numesc *juguri*, respectiv *coloane* (sau miezuri), după cum nu au sau au înfășurate pe ele bobinele care, alimentate cu curent electric, produc cîmpul magnetic (fig. B. 5.2) Între piesele feromagnetice ale circuitului magnetic apar adeseori spații libere ocupate de aer sau alte materiale neferomagnetice; acestea se numesc *întrefieruri*. Fluxul magnetic printr-o latură a circuitelor magnetice se numește flux magnetic fascicular (Φ_f), spre deosebire de fluxul magnetic (total) al unei bobine care este egal cu produsul dintre numărul de spire al bobinei și fluxul fascicular.

Scanned with OKEN Scanner

Permeabilitatea magnetică μ a materialelor feromagnetice fiind mult mai mare decît cea a corpurilor neferomagnetice (din jurul circuitului magnetic), inducția magnetică în laturile de circuit magnetic și în întrefieruri este mult

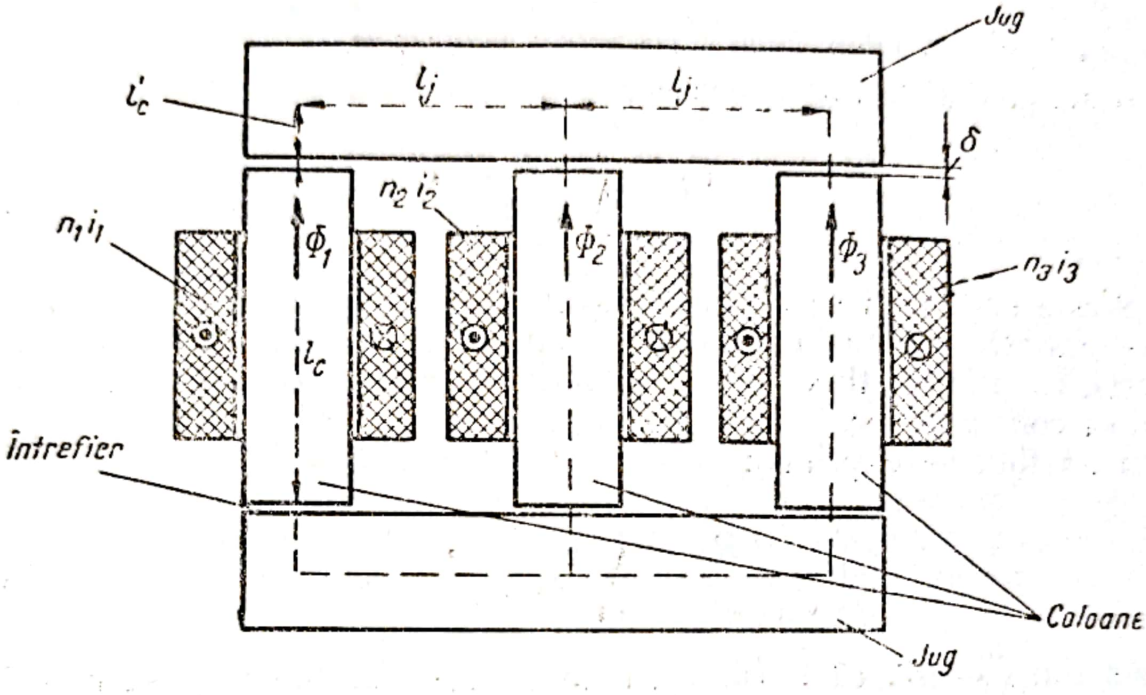


Fig. B.5.2

mai mare decît în jurul acestora. Ca urmare, la calculul circuitelor magnetice, laturile de circuit magnetic se consideră, cu bună aproximație, drept tuburi de flux, în care inducția magnetică este constantă în fiecare secțiune transversală dată. Dacă aria secțiunii transversale a laturii este constantă, inducția magnetică este constantă în interiorul laturii.

5.4. Fluxul magnetic fascicular Φ_f și inducția magnetică B dintr-o latură de circuit magnetic sînt legate prin relația

$$\Phi_f = B \cdot A, \tag{5.4}$$

în care A este aria suprafeței ocupate de materialul feromagnetic în secțiunea transversală a laturii.

5.5. Tensiunea magnetică din lungul unei laturi de circuit magnetic se exprimă deci

$$U_M = l \cdot H, \tag{5.5 a}$$

unde l este lungimea laturii, iar H valoarea algebrică a componentei lui $\overline{H}$ după orientarea corespunzătoare sensului de referință considerat pentru U_M.

Aceeași tensiune magnetică se mai poate exprima și pe baza relației (5.1 *a*):

$$U_M = R_M \, \Phi. \tag{5.5 b}$$

Scanned with OKEN Scanner

5.6. Forța (tensiunea) magnetomotoare F_M a unei bobine este prin definiție contribuția bobinei la tensiunea magnetică de-a lungul unei curbe închise Γ a cărei suprafață S_Γ este străbătută o singură dată de

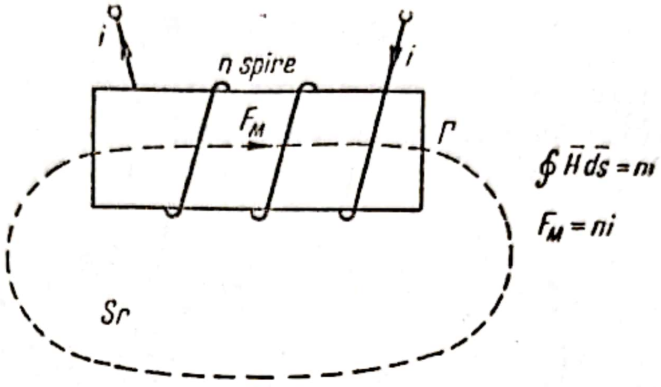


Fig. B.5.3

toate cele n spire parcurse fiecare de curentul electric de intensitate i. Pe baza legii circuitului magnetic (fig. B.5.3) rezultă :

$$F_M = ni, \tag{5.6 a}$$

dacă sensurile de referință ale lui F_M și i sînt asociate unul față de altul după regula burghiului drept. Produsul dintre numărul de spire și intensitatea curentului din spire (ni) se numește *numărul de amper-spire* ale bobinei sau solenația bobinei (θ) :

$$\theta = ni. \tag{5.6 b}$$

5.7. Prima teoremă a lui Kirchhoff pentru circuitele magnetice. Suma fluxurilor magnetice care intră într-un nod al unui circuit magnetic este nulă :

$$\Sigma\Phi = 0, \tag{5.7}$$

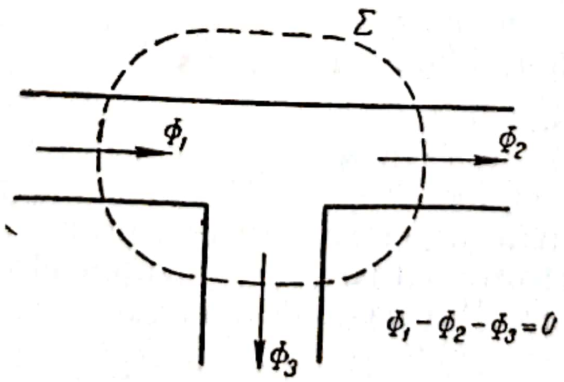


Fig. B.5.4

termenul „intră" se referă la sensul de referință pentru calculul fluxului magnetic (fig. B.5.4). Teorema rezultă prin aplicarea legii fluxului magnetic unei suprafețe închise Σ care conține nodul considerat.

Scanned with OKEN Scanner

5.8. A doua teoremă a lui Kirchhoff pentru circuitele magnetice. De-a lungul oricărui contur format din laturi de circuit magnetic, suma tensiunilor magnetice este egală cu suma forțelor magnetomotoare:

$$\Sigma U_M = \Sigma F_M \qquad (5.8\ a)$$

sau

$$\Sigma R_M \Phi = \Sigma F_M. \qquad (5.8\ b)$$

În formularea teoremei s-a considerat un același sens comun de referință în lungul conturului pentru forțele magnetomotoare, tensiunile magnetice și pentru fluxuri (fig. B.5.5). Noțiunea de forță magnetomotoare are față

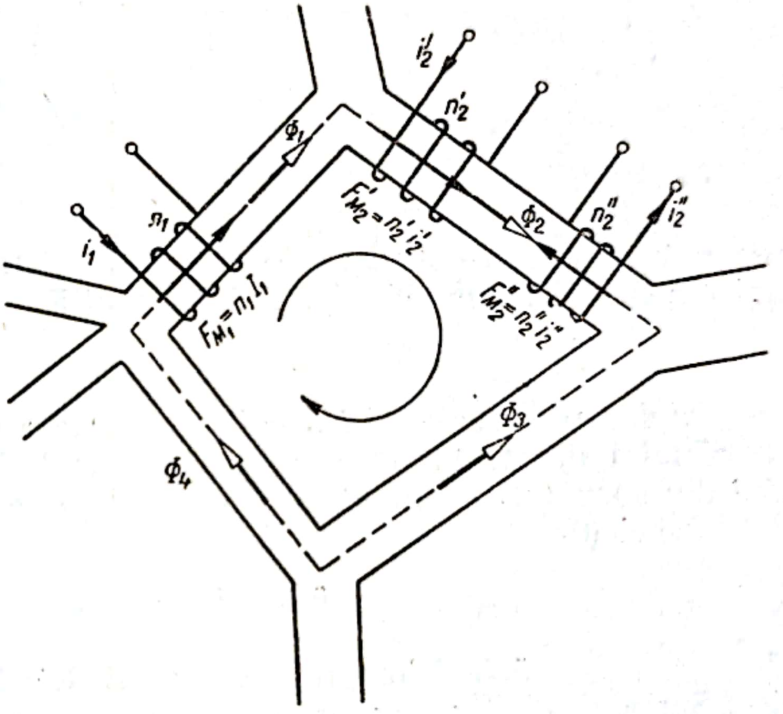


Fig. B.5.5 $R_{M_1}\Phi_1 + R_{M_2}\Phi_2 - R_{M_3}\Phi_3 + R_{M_4}\Phi_4 = F_{M_1} + F'_{M_2} - F''_{M_2}$

de noțiunea de solenație avantajul că este asociată unui sens de referință orientat în lungul laturilor circuitului magnetic, fiind analogă (formal) cu t.e.m. utilizată în studiul circuitelor electrice.

5.9. Schemele electrice echivalente ale circuitelor magnetice. Formulele (5.7) și (5.8) care exprimă relațiile dintre fluxurile magnetice, forțele magnetomotoare și rezistențele magnetice ale unui circuit magnetic au o formă analogă cu relațiile care exprimă relațiile dintre rezistențele electrice, forțele electromotoare și rezistențele electrice ale unui circuit electric. Astfel, pentru circuitul magnetic din figura B.5.2, corespund ecuațiile:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0;$$

$$(R_{MC} + 2R_{MC} + 2R_{M\delta} + 2R_{Mj})\Phi_1 - (R_{MC} + 2R'_M + 2R_{M\delta})\Phi_2 = n_1 i_1 - n_2 i_2;$$

$$(R_{MC} + 2R'_{MC} + 2R_{M\delta})\Phi_2 - (R_{MC} + 2R'_{MC} + 2R_{Mj})\Phi_3 = n_2 i_2 - n_3 i_3.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe baza corespondențelor :

$$\begin{aligned} \Phi &\leftrightarrow I \\ F_M &\leftrightarrow E \\ R_M &\leftrightarrow R, \end{aligned} \qquad (5.7\ b)$$

se observă că circuitului magnetic (reprezentat în fig. B.5.2) îi corespunde un circuit electric echivalent (reprezentat în fig. B.5.6).

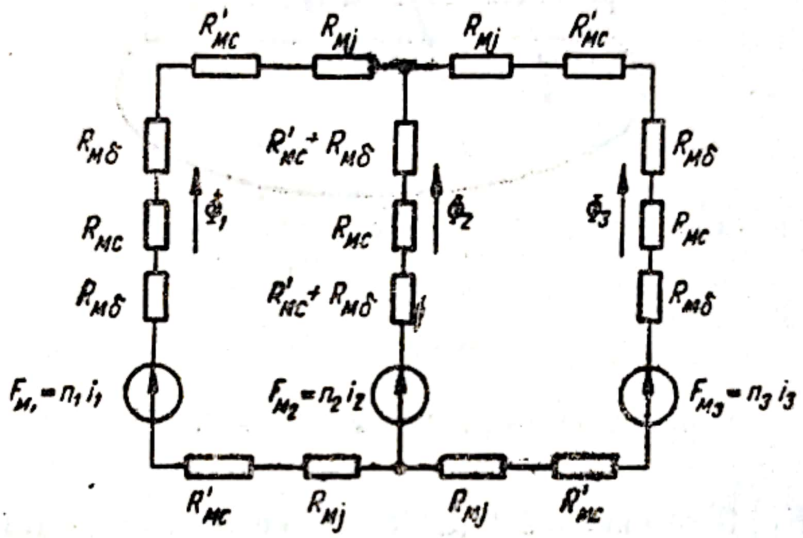


Fig. B.5.6

5.10. Calculul circuitelor magnetice. Pe baza utilizării teoremelor lui Kirchhoff pentru circuitele magnetice (și a schemelor electrice echivalente), calculul circuitelor se face analog cu calculul circuitelor electrice.

Dacă se consideră (aproximativ) constante permeabilitățile magnetice, problema corespunde calculului unui circuit electric liniar. Dacă se ține seamă de dependența neliniară dintre B și H în corpuri feromagnetice, a cărei reprezentare grafică se numește *curbă de magnetizare* (v. anexa 6), problema corespunde calculului unui circuit neliniar. Cunoscînd curba de magnetizare, secțiunea A și lungimea (medie) l a unei laturi, se construiește curba $U_M = U_M(\Phi)$, denumită *caracteristică magnetică* a laturii, unde :

$$\begin{aligned} U_M &= H \cdot l \\ \Phi &= B \cdot A. \end{aligned} \qquad (5.10)$$

Această caracteristică magnetică este analogă caracteristicii tensiune-curent pentru elementele (rezistoarele) electrice neliniare.

5.11. Tensiunea magnetică între extremitățile unei laturi de circuit magnetic. Pentru o latură care are pe ea o înfășurare (bobină) străbătută de curent electric, tensiunea magnetică din lungul laturii U_M

diferă de tensiunea magnetică $U_{M,\,ext}$ calculată prin exterior (fig. B.5.7). Din legea circuitului magnetic rezultă:

$$U_M - U_{M,ext} = ni \qquad (5.11\ a)$$

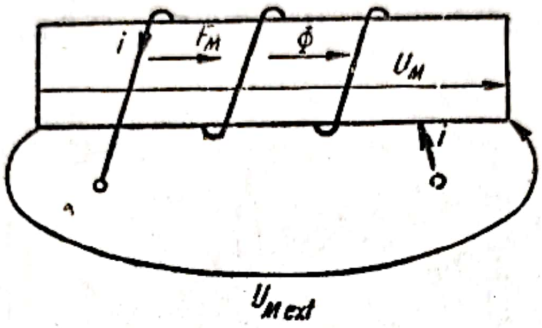


Fig. B.5.7

sau

$$U_{M,\,ext} + F_M = R_M \Phi, \qquad (5.11\ b)$$

unde U_{Mext}, F_M, Φ se exprimă față de un același sens de referință.

B. PROBLEME

5.1. O bobină cu $n = 200$ spire este înfășurată pe un miez feromagnetic ale cărui dimensiuni în centimetri sînt reprezentate în figura 5.1. Miezul este realizat din oțel electrotehnic *E1A*. Să se determine:

a) intensitatea curentului din bobină, corespunzătoare unui flux magnetic fascicular în miez de 0,004 Wb;

Scanned with OKEN Scanner

b) inducțiile magnetice din diferitele porțiuni ale circuitului magnetic în cazul cînd intensitatea curentului din bobină este $I = 2{,}05$ A.

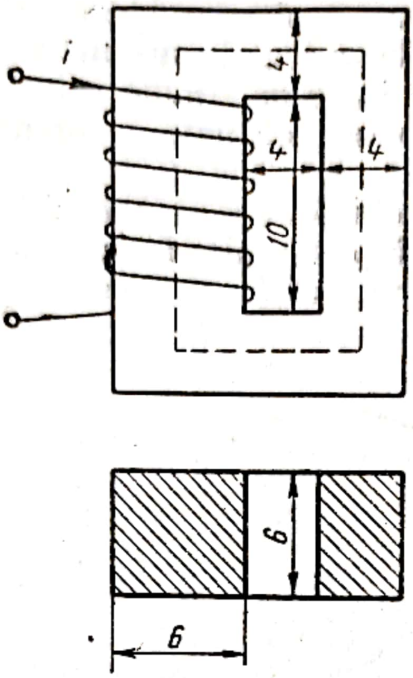


Fig. 5.1

5.2. Să se rezolve problema precedentă 5.1 pentru cazul cînd miezul bobinei ar avea un întrefier de lungime $\delta = 0{,}5$ mm, situat pe latura opusă bobinei. Ce intensitate de cîmp magnetic se realizează în întrefier la $I = 26{,}5$ A?

5.3. Se dă circuitul magnetic reprezentat în figura 5.3. Lungimea medie a liniilor de cîmp în miez este $l_m = 8$ cm, iar în armătură $l_a = 2$ cm. Lungimea fiecărui întrefier $\delta = 0{,}04$ mm. Miezul, armătura și

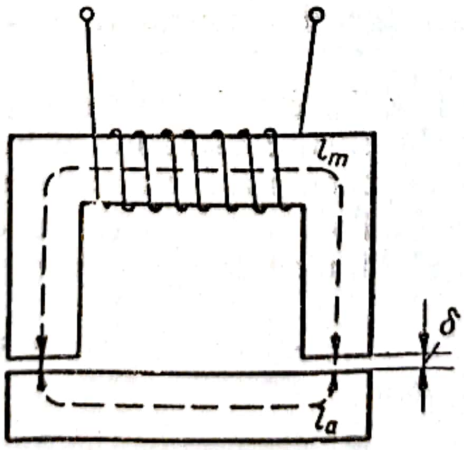


Fig. 5.3

tubul de flux în întrefier au aceeași secțiune de arie $A = 0{,}25$ cm^2. Permeabilitatea magnetică a miezului este $\mu = 600\,\mu_0$. Să se determine:

a) reluctanța miezului;

Scanned with OKEN Scanner

b) forța magnetomotoare a bobinei pentru care inducția magnetică în miez este $B = 5\,000$ Gs.

5.4. Să se rezolve problema 5.3 atunci cînd în locul permeabilității magnetice se dă curba de magnetizare a oțelului E1A din care este confecționat miezul. Să se determine valoarea inducției magnetice în ipoteza că se dublează valoarea calculată a curentului din bobină.

5.5. O bobină cu $n = 300$ spire, parcursă de un curent $i = 1$A, este uniform înfășurată pe un miez feromagnetic de formă toroidală (fig. 5.5). Dimensiunile miezului sînt $R_1 = 7$ cm; $R_2 = 8$ cm; $h = 1{,}5$ cm.

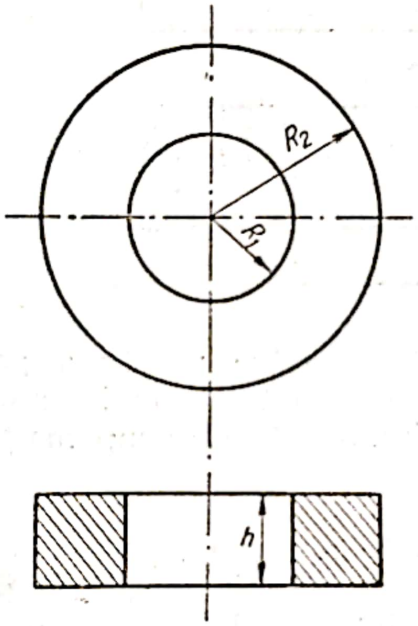


Fig. 5.5

Considerînd permeabilitatea magnetică constantă $\mu = 500\,\mu_0$, să se determine:

a) valoarea aproximativă a inducției magnetice, a fluxului magnetic fascicular și a inductivității bobinei, considerînd o lungime medie a liniilor de cîmp magnetic și o valoare constantă a inducției magnetice în miez;

b) valorile exacte ale mărimilor calculate la punctul precedent, ținînd seamă de lungimile diferite ale liniilor de cîmp magnetic.

5.6. Să se rezolve problema 5.5 în cazul cînd miezul ar avea un întrefier $\delta = 1$ mm.

5.7. Să se determine mărimile cerute la punctul *a* al problemei 5.5 cînd se dă curba de magnetizare a oțelului turnat din care este format miezul (în locul valorii $\mu = 500\,\mu_0$). Problema se va rezolva pentru cazul miezului fără întrefier și pentru cazul unui întrefier $\delta = 1$ mm.

Scanned with OKEN Scanner

5.8. Se dă circuitul magnetic reprezentat (dimensiuni, în milimetri) în figura 5.8, format din oțel electrotehnic turnat. Grosimea circuitului (partea ocupată de oțel) este $d = 20$ mm. Să se determine forța magnetomotoare a bobinei necesară stabilirii unui flux magnetic de $6 \cdot 10^{-4}$ Wb, în coloana din dreapta.

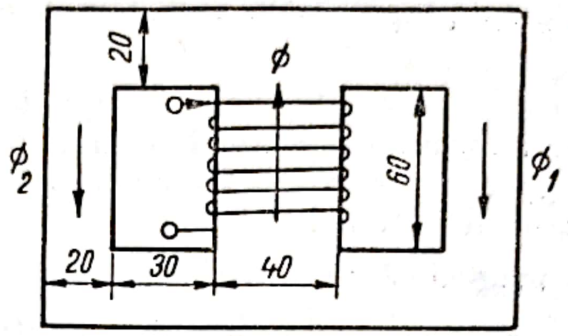


Fig. 5.8

5.9. Să se rezolve problema precedentă în ipoteza că în coloana din dreapta ar exista un întrefier de lungime $\delta = 1$ mm.

5.10. Forța magnetomotoare a bobinei circuitului magnetic reprezentat în figura 5.8 este $F = 250$ A. Să se determine inducția magnetică în fiecare latură a circuitului magnetic prin:

a) metoda aproximațiilor succesive;

b) construirea caracteristicii $\Phi = \Phi(F)$;

c) construirea caracteristicilor $\Phi_1 + \Phi_2 = 2\Phi_1(U_M)$ și $\Phi = \Phi(F - U_M)$.

5.11. Să se rezolve problema precedentă în ipoteza că în coloana din dreapta a circuitului există un întrefier $\delta = 2$ mm, iar $F = 1000$ A.

5.12. Circuitul magnetic reprezentat în figura 5.12 (dimensiuni, în milimetri) are o permeabilitate magnetică $\mu = 600\ \mu_0$.

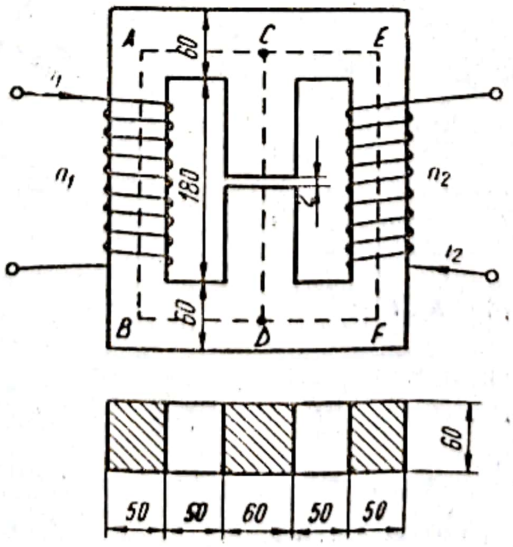


Fig. 5.12

Scanned with OKEN Scanner

Intensitatea curentului și numărul de spire al celor două bobine având valorile $i_1 = 6$ A, $n_1 = 200$, respectiv $i_2 = 9$ A, $n_2 = 220$ spire, să se determine:

a) schema echivalentă a circuitului;

b) fluxul magnetic total al fiecărei bobine;

c) inductivitatea proprie și mutuală a celor două bobine.

5.13. Circuitul magnetic reprezentat în figura 5.12 (cu dimensiuni indicate în milimetri) fiind realizat din oțel electrotehnic, iar forțele magnetomotoare ale bobinelor fiind $F_{M_1} = 2\,400$ A și $F_{M_2} = 3\,960$ A, să se determine:

a) inducția magnetică în întrefier;

b) tensiunea magnetică din lungul circuitului între punctele AB, CD și EF.

5.14 (R). În figura 5.14 se reprezintă o secțiune transversală prin circuitul magnetic al unei mașini de curent continuu. Să se determine forța magnetomotoare a înfășurării de excitație a polilor necesară stabilirii în întrefier a unui flux $\Phi = 9{,}65 \cdot 10^{-2}$Wb pentru fiecare pol. În tabela de mai jos se indică dimensiunile geometrice și materialele din care este

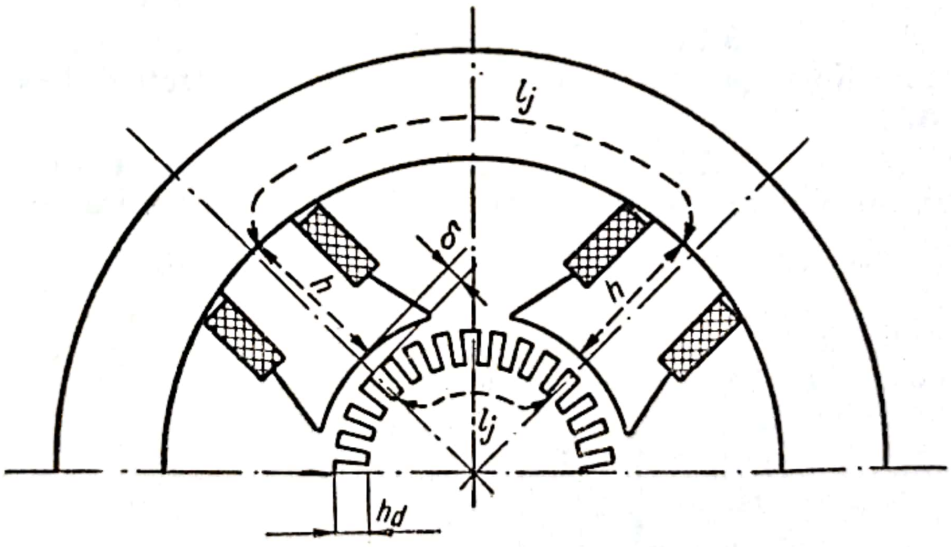


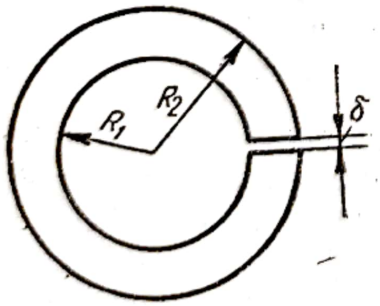
Fig. 5.14

realizată fiecare parte a circuitului magnetic. Existența unor linii de cîmp magnetic care nu se închid prin întrefier face ca numai o fracțiune $\frac{1}{K_d}$ din fluxul polului să treacă prin întrefier.

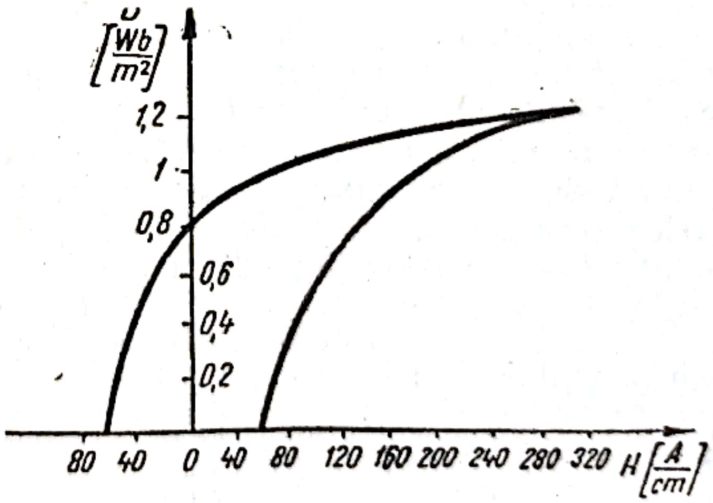
Scanned with OKEN Scanner

Nr. crt.	Denumirea părții de circuit magnetic	Fluxul magnetic	Suprafața medie cm²	Lungimea medie cm	Materialul	Observații
1.	Miezul polului	$K_d\Phi$	$S = 920$	$h = 30$	Tablă de dinam	$K_d = 1{,}17$ coeficientul de dispersie presupus cunoscut
2.	Jug	$\frac{K_d\Phi}{2}$	$S_j = 605$	$l_j = 65$	Oțel turnat	
3.	Întrefier	Φ	$S_\delta = 1\,150$	$\delta = 0{,}3$	Aer	
4.	Dinți	Φ	$S_d = 570$	$h_d = 4$	Tablă de dinam	
5.	Indus	$\frac{K_d\Phi}{2}$	$S_i = 656$	$l_i = 30$	Tablă de dinam	

5.15. (R). Un inel, în formă de tor cu secțiune circulară, avînd un întrefier δ (fig. 5.15, *a*), este format dintr-un oțel magnetic dur. Dimensiunile inelului sînt: $R_2 = 4$ cm; $R_1 = 3{,}2$ cm; $\delta = 1$ mm. Trecînd un curent electric I printr-o înfășurare uniform repartizată pe inel, în acesta se stabilește o inducție magnetică $B_m = 1{,}2$ Wb/m². Ciclul de histerezis al materialului fiind cel indicat în figura 5.15, *b*, să se determine induc-



a



b

Fig. 5.15

ția magnetică care se va realiza în inel după întreruperea curentului electric. Să se determine, de asemenea, valoarea inducției pentru $I = 0$, dacă nu ar exista întrefierul, iar magnetizarea inițială ar corespunde la aceeași inducție magnetică $B_m = 1{,}2 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 6
CÎMPUL ELECTROMAGNETIC

A. BREVIAR

6.1. Cîmpul electromagnetic este o formă de materie, diferită de corpuri, care exercită asupra corpurilor forțe și momente care depind de starea lor de electrizare și magnetizare. Ca și corpurile, cîmpul electromagnetic are energie, impuls și moment cinetic. Spre deosebire de corpuri, el nu are stare de mișcare mecanică (accelerația, viteza nu sînt mărimi de stare ale cîmpului electromagnetic). Sarcina electrică, momentul electric și densitatea curentului electric sînt mărimi de stare electrică a corpurilor. Momentul magnetic este o mărime de stare magnetică a corpurilor. Intensitatea cîmpului electric (în vid) este o mărime de stare electrică a cîmpului electromagnetic. Inducția magnetică (în vid) este o mărime de stare magnetică a cîmpului electromagnetic. În funcție de aceste șase mărimi, denumite *mărimi primitive*, se definesc toate celelalte mărimi electrice și magnetice, denumite mărimi derivate.

Cîmpul electromagnetic considerat din punctul de vedere al stărilor sale electrice este numit *cîmp electric*. Cîmpul electromagnetic considerat din punctul de vedere al stărilor sale magnetice este numit *cîmp magnetic*.

6.2. Legea inducției electromagnetice. Circulația intensității cîmpului electric, din lungul oricărei curbe închise Γ, este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic care trece prin orice suprafață S_Γ limitată de curba Γ (lege generală) :

$$\oint_\Gamma \overline{E}\,\overline{\mathrm{d}s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_\Gamma} \overline{B}\,\overline{\mathrm{d}A}, \tag{6.2 a}$$

care se mai scrie :

$$u_e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}. \tag{6.2 b}$$

În formularea dată s-au considerat sensurile de referință ale lui u_e și Φ, respectiv $\overline{ds}$ și $\overline{\mathrm{d}A}$, asociate după regula burghiului drept.

Scanned with OKEN Scanner

Legea se referă la curbe și suprafețe formate din puncte ale unor corpuri, și care deci sînt antrenate de corpuri în eventuala lor mișcare.

Față de un sistem de coordonate, referitor la care elementele curbei se deplasează cu viteza $\bar{v}$, legea se exprimă în următoarea formă dezvoltată

$$\oint_{\Gamma} \bar{E}\,\overline{ds} = -\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\,\overline{dA} - \oint_{\Gamma} (\bar{B} \times \bar{v})\,\overline{ds}, \qquad (6.2\,c)$$

în care

$$u_{et} = -\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot \overline{dA} \qquad (6.2\,d)$$

se numește *t.e.m. indusă prin transformare*, iar

$$u_{em} = \oint_{\Gamma} (\bar{v} \times \bar{B})\,\overline{ds} \qquad (6.2\,e)$$

se numește *t.e.m. indusă prin mișcare.*

Față de un sistem de referință în care inducția magnetică este invariabilă în timp, $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0$, t.e.m. indusă reprezintă în întregime o t.e.m. indusă prin mișcare. Într-un astfel de caz, într-o bară rectilinie de lungime l, situată perpendicular pe vectorul $\bar{B}$ al unui cîmp de inducție magnetică omogen, și mișcîndu-se cu viteza v, are expresia:

$$u_{em} = v \cdot B \cdot l, \qquad (6.2\,f)$$

în care sensul de referință al tensiunii electromotoare este sensul produsului vectorial $\bar{v}^\circ \times \bar{B}^\circ$, al versorilor $\bar{v}^\circ$ și $\bar{B}^\circ$ indicînd sensurile de referință față de care s-au considerat valorile algebrice v și B.

6.3. Legea circuitului magnetic. Față de un sistem de referință, referitor la care elementele de suprafață au viteza $\bar{v}$, legea circuitului magnetic (4.9, *a*) se exprimă în următoarea formă dezvoltată:

$$\oint_{\Gamma} \bar{H}\,\overline{ds} = \int_{S_\Gamma} \bar{J}\,\overline{dA} + \int_{S_\Gamma} \bar{v}\rho_v\,\overline{dA} + \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\,\overline{dA} + \int_{S_\Gamma} \text{rot.}(\bar{D} \times \bar{v})\,\overline{dA}. \qquad (6.3\,a)$$

Mărimile din membrul al doilea al relației (6.3 *a*) care contribuie la stabilirea cîmpului magnetic ca și intensitatea curentului electric de conducție:

$$i_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \bar{J}\,\overline{dA} \qquad (6.3\,b)$$

se numesc, respectiv, *intensitatea curentului electric de convecție* (i_c), *intensitatea curentului electric de deplasare* (i_d) și *intensitatea curentului electric Roentgen* (i_R):

$$i_c = \int_{S_\Gamma} \rho_v \bar{v}\,\overline{dA}, \quad i_d = \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\,\overline{dA}, \quad i_R = \int_{S_\Gamma} \text{rot.}\,(\bar{D} \times \bar{v})\,\overline{dA}. \qquad (6.3\,c)$$

Scanned with OKEN Scanner

6.4. Energia cîmpului magnetic al unei bobine cu miez neferomagnetic are expresia :

$$W_m = \frac{\Phi I}{2} = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}, \qquad (6.4\ a)$$

în care : Φ este fluxul magnetic total al bobinei, I — intensitatea curentului electric din bobină și L — inductivitatea ei. Rezultă următoarea expresie a inductivității proprii a unei bobine :

$$L = \frac{2\,W_m}{I^2} = \frac{\Phi^2}{2\,W_m}. \qquad (6.4\ b)$$

6.5. Energia cîmpului magnetic al unui sistem de două bobine cu miezuri neferomagnetice :

$$W_m = \frac{L_{11}I_1^2}{2} + \frac{L_{22}I_2^2}{2} + L_{12}I_1I_2, \qquad (6.5)$$

în care L_{11}, L_{22} și L_{12} sînt inductivitățile proprii, respectiv mutuală a bobinelor, iar I_1 și I_2 — intensitățile curenților din cele două bobine.

6.6. Teorema forțelor generalizate în cîmpul magnetic. Forța generală (lagrangiană) X_k care tinde să mărească coordonata generalizată x_k are expresia :

$$X_k = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial x_k}\right)_{\Phi}^{\Psi} = \left(\frac{\partial W_m}{\partial x_k}\right)_I, \qquad (6.6)$$

în care indicii Φ și I indică calcularea derivatelor parțiale ale energiei magnetice la fluxuri magnetice, respectiv curenți electrici constanți.

6.7. Expresia forței de atracție (purtătoare) a unui electromagnet este pentru un pol

$$F = \frac{B^2}{2\,\mu_0} \cdot A, \qquad (6.7)$$

în care A este aria unei fețe polare a electromagnetului și B — inducția magnetică în întrefier.

6.8. Forța de atracție dintre două conductoare filiforme, rectilinii paralele, situate în aer și parcurse de curenți de intensitate i_1, respectiv i_2, are expresia :

$$F = \frac{\mu_0\,l}{2\,\pi\,d}\,i_1i_2, \qquad (6.8)$$

în care l este lungimea celor două conductoare și d — distanța dintre ele.

Scanned with OKEN Scanner

Relația este valabilă numai pentru $l \gg d$. Sensurile de referință ale curenților se consideră, în această relație, omoparalele. Această forță de „atracție" este considerată ca mărime algebrică, termenul „atracție" indicînd numai sensul de referință al forței.

B. PROBLEME

6.1 (I). Un inel de aluminiu situat într-un cîmp magnetic omogen de inducție magnetică $B = 0{,}23$ Gs se rotește, cu o viteză unghiulară $\omega = 314$ rad/s, în jurul unui diametru care face un unghi de 30° cu direcția lui $\bar{B}$. Diametrul inelului este $D = 24$ cm, iar secțiunea sa $A = 1$ mm². Să se determine căldura disipată în inel în timp de 3 minute.

6.2. Un cadru metalic în formă de pătrat este străbătut de un flux magnetic $\Phi = 4 \cdot 10^{-2} \cos 2\pi \cdot 50t$ Wb. Laturile cadrului avînd fiecare aceeași rezistență electrică $R = 0{,}5\ \Omega$, să se determine:

a) curentul electric din cadru;

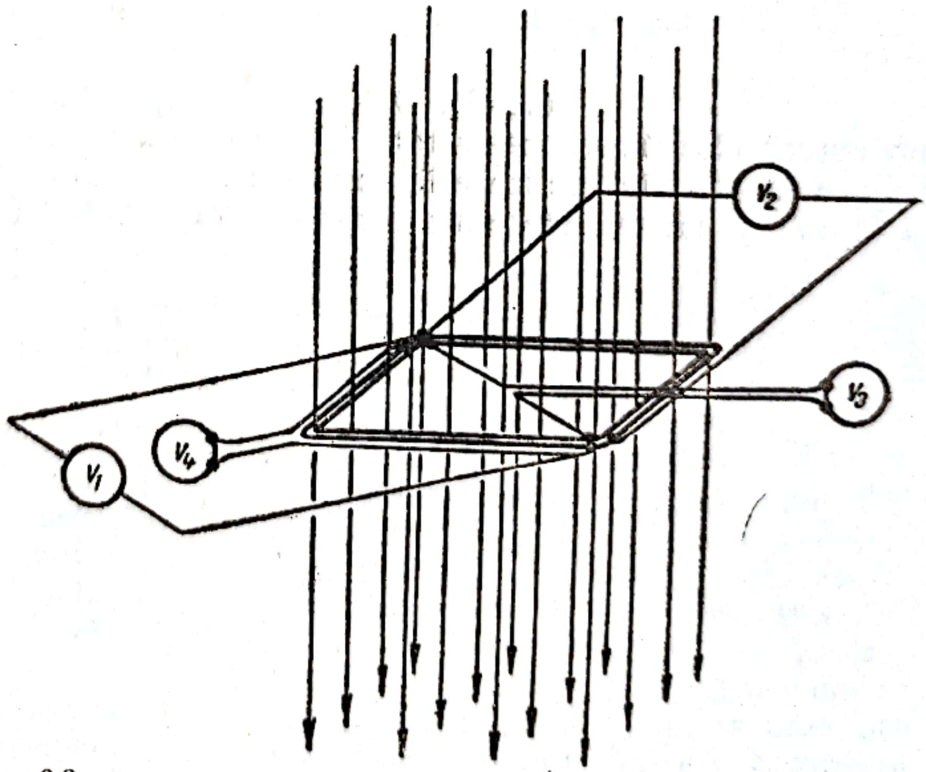


Fig. 6.2

b) tensiunile măsurate de cele patru voltmetre conectate pe cadru, așa cum se indică în figura 6.2.

6.3. Un conductor filiform este plasat într-un cîmp omogen de inducție magnetică care variază sinusoidal în timp $B = B_m \sin \omega t$. Conductorul este situat (practic vorbind) într-un plan perpendicular pe direcția inducției magnetice, așa cum se arată în figura 6.3. Rezistența conductorului pe unitatea de lungime R_0 fiind constantă, să se determine puterea totală disipată în conductor și intensitatea curentului electric din fiecare parte a conductorului în următoarele cazuri:

a) punctele din M ale conductorului nu sînt în contact (sînt izolate din punct de vedere electric); care este valoarea tensiunii dintre punctele suprapuse în M?

b) punctele din M sînt în contact.

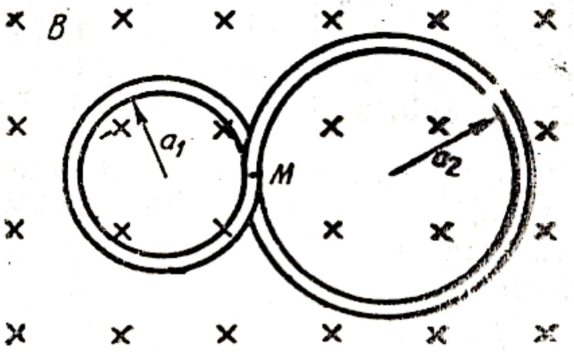


Fig. 6.3

6.4 (I). O bobină cu $n_1 = 20$ spire este străbătută de un curent electric de intensitate $i_1 = 10 \sin 2\pi\, 50\, t$ A. Dimensiunile circuitului magnetic sînt indicate în milimetri, iar permeabilitatea miezului este $\mu = 500\,\mu_0$. Să se determine tensiunile măsurate de voltmetrele conectate,

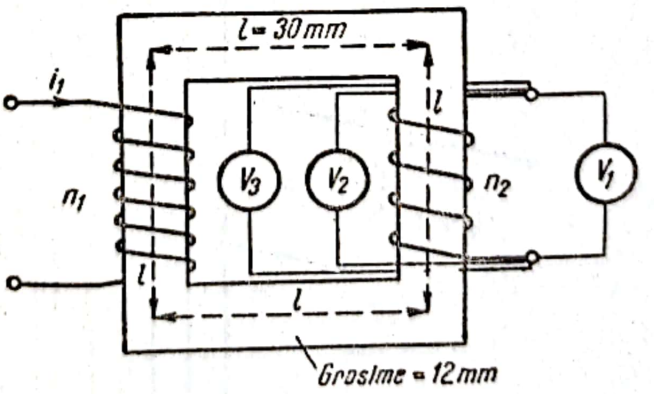


Fig. 6.4

așa cum se indică în figura 6.4, la bornele bobinei cu $n_2 = 10$ spire. Se neglijează dispersia liniilor de cîmp magnetic, considerînd un același flux magnetic pentru cele două bobine.

6.5 (I). Două bobine cu miez neferomagnetic cu inductivitățile proprii L_1, respectiv L_2, au rezistențe neglijabile. Plasînd cele două bobine una lîngă alta, legîndu-le în serie și trecînd prin ele un curent $i = 10 \sin 2\pi\, 500\, t\ A$, la bornele celor două bobine se obține o tensiune sinusoidală cu o valoare maximă $U'_{max} = 163$ V sau $U''_{max} = 156{,}5$ V în funcție de felul cum se conectează bornele bobinelor la legarea în serie. Să se determine tensiunea maximă U_{max} la bornele circuitului-serie, dacă bobinele se îndepărtează mult una de alta ($M = 0$) și intensitatea curentului rămîne aceeași ca și cea de mai sus.

6.6. Să se determine valoarea maximă a energiei magnetice totale pentru fiecare din cele trei regimuri de funcționare ale bobinelor, considerate în problema precedentă.

6.7 (R). Două bobine cu $n_1 = 50$ spire și $n_2 = 100$ spire sînt înfășurate pe un miez magnetic de reluctanță $R_m = 5 \cdot 10^5 \frac{A}{Wb}$. Cele două bobine (fig. 6.7) au rezistențele electrice $R_1 = 0{,}02\Omega$ și $R_2 = 0{,}5\Omega$ și sînt străbătute de curenții electrici $i_1 = 4\ e^{-200t}$A, respectiv $i_2 = 0{,}6\ e^{-200t}$ A. Să se determine raportul u_1/u_2 al tensiunilor la bornele celor două bobine.

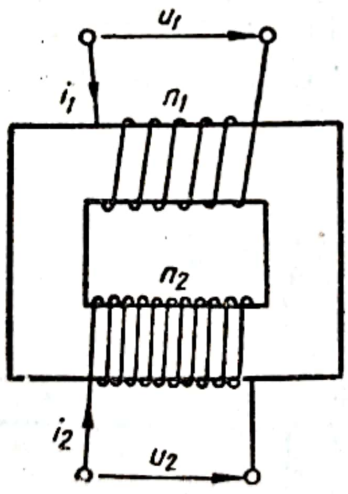


Fig. 6.7

6.8. Între polii unui magnet se realizează un cîmp de inducție magnetică $\bar{B}$, practic omogen. O spiră de rezistență electrică R, situată într-un plan perpendicular pe direcția lui $\bar{B}$, se deplasează în acest plan cu viteza constantă $\bar{v}$ față de magnet (fig. 6.8). Considerînd v suficient de mic, R și B suficient de mari pentru a neglija cîmpul magnetic produs de curentul din spiră față de cîmpul magnetului, să se determine:

a) t.e.m. indusă în spiră;

b) intensitatea curentului din spiră;

Scanned with OKEN Scanner

c) lucrul mecanic necesar pentru a trece complet spira printre polii magnetului (fără a-i modifica viteza);

d) căldura degajată în spiră de la intrarea pînă la ieșirea ei din cîmpul magnetic.

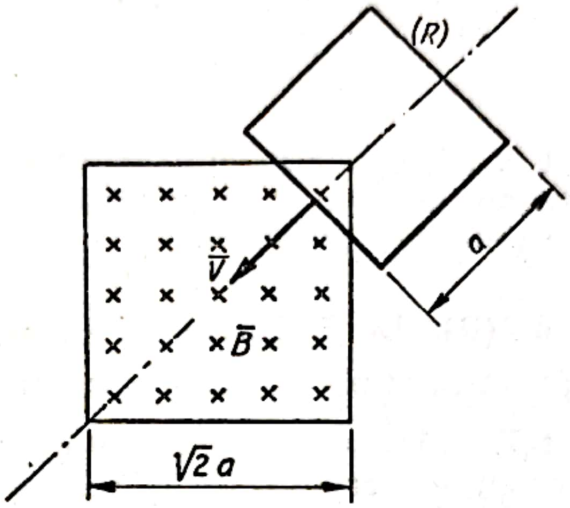


Fig. 6.8

6.9. Un magnet permanent M, o bară conductoare paralelipipedică b și un fir conductor f se mișcă (fig. 6.9) cu vitezele V_M, V_b, și V_f. Inducția magnetică $\bar{B}$ dintre polii magnetului este aproximativ

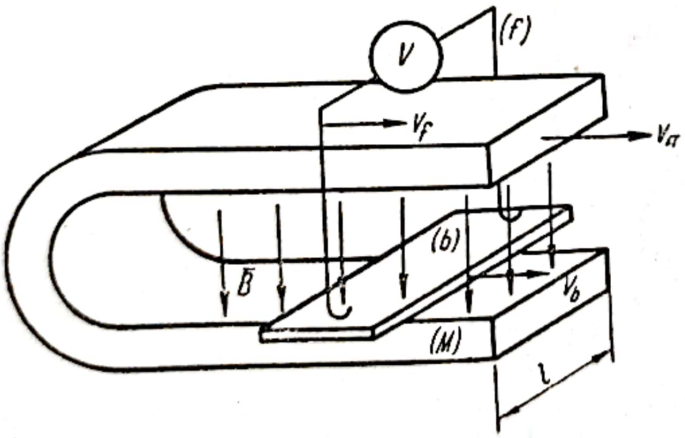


Fig. 6.9

Nr. crt.	1	2	3	4	5	6	7	8
V_M	0	0	0	0	V	V	V	V
V_b	0	0	V	V	0	0	V	V
V_f	0	V	0	V	0	V	0	V
$U = U_e$								

constantă (în regiunea unde se află bara și firul). Să se determine tensiunea electrică U, măsurată de voltmetrul V, montat ca în figură, pentru valorile vitezelor indicate în tabela alăturată. Se va neglija rezistența electrică a contactului alunecător dintre bară și fir.

Scanned with OKEN Scanner

6.10. Să se rezolve problema precedentă dacă cele trei corpuri sînt dispuse ca în figura 6.10.

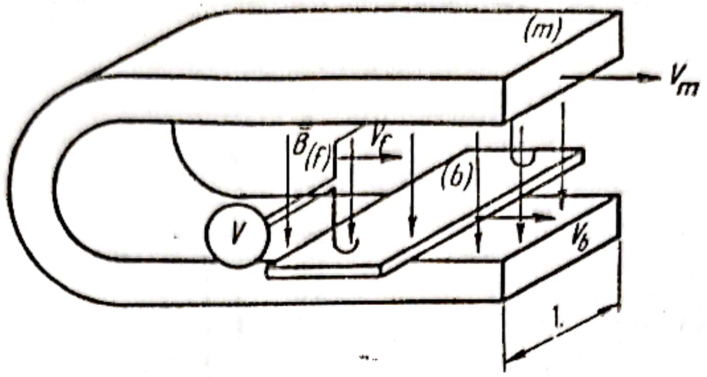


Fig. 6.10

6.11. De-a lungul întrefierului unei mașini electrice, inducția magnetică B este distribuită așa cum se indică în figura 6.11, *a*, unde x este distanța de la un punct de referință. Să se determine t.e.m.

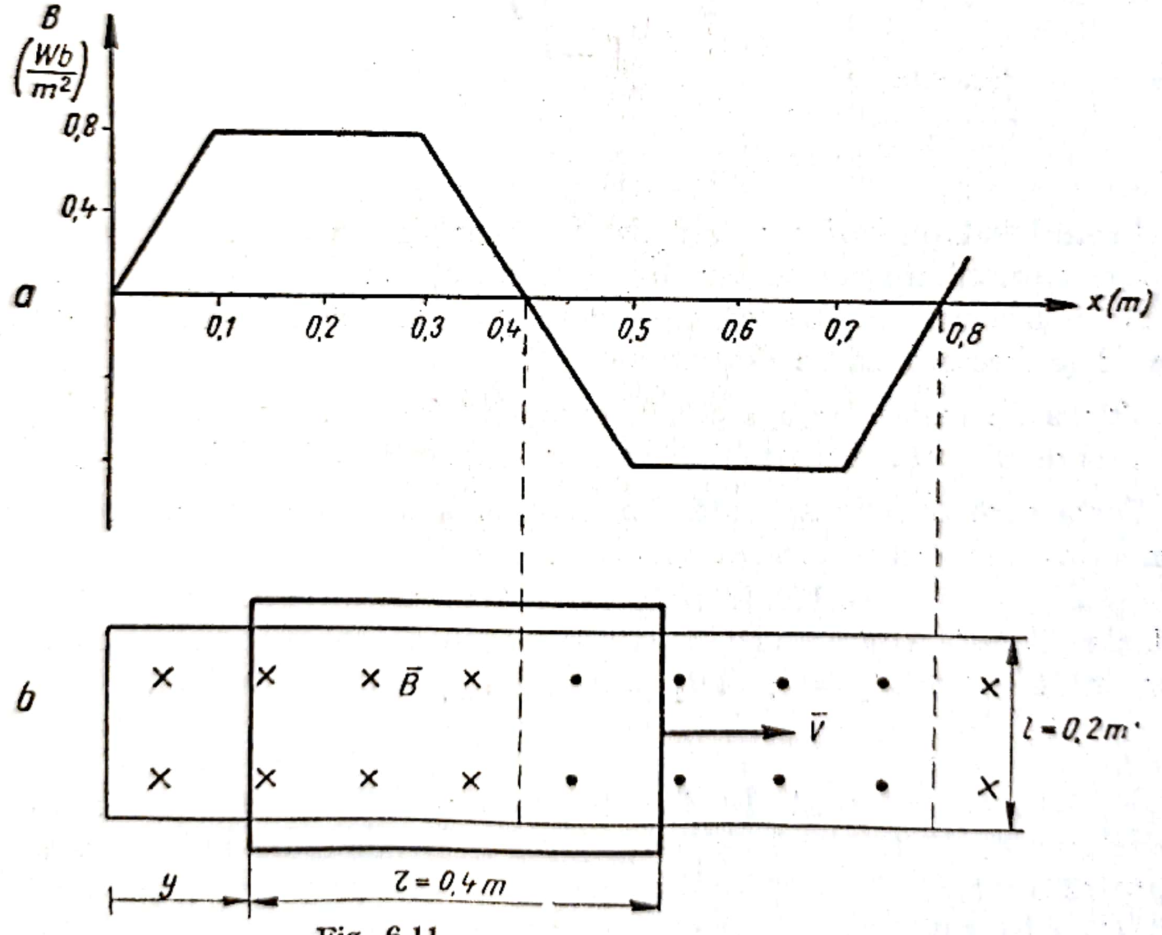


Fig. 6.11

indusă într-o bobină cu n spire, de lățime τ, legate în serie, în funcție de distanța y, atunci cînd bobina (fig. 6.11) se deplasează de-a lungul întrefierului cu viteza constantă $v = 1$ m/s.

6.12. Conductoarele filiforme *1*, *2*, *3*, drepte, paralele și foarte lungi sînt situate în aer (fig. 6.12). Conductorul *1* este parcurs de un curent electric de intensitate $i = 5$ kA. La extremitățile conductoarelor

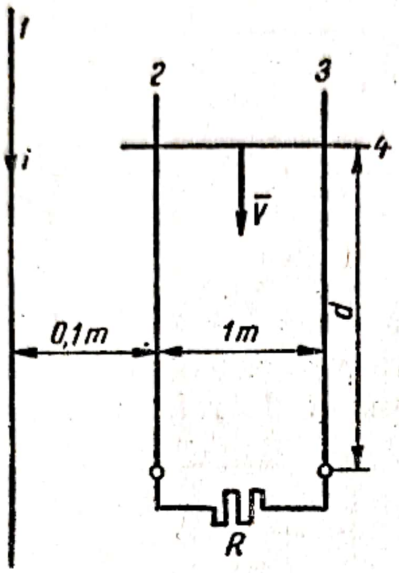


Fig. 6.12

2 și *3* este legat un rezistor de rezistență electrică $R = 1\Omega$; pe aceste conductoare alunecă un conductor drept, filiform, perpendicular pe ele. Neglijînd rezistența conductoarelor, rezistența electrică de contact față de rezistența R și frecarea să se determine:

1. Viteza de translație v a conductorului *4* față de conductoarele *1*, *2*, *3*, pentru care puterea disipată în rezistor să fie $P = 1$ mW.

2. Forța care trebuie aplicată din exterior asupra conductorului *4* pentru a-i menține constantă această viteză v.

6.13. În sistemul considerat în figura 6.12, avînd $i = 10 \sin (2\pi 50t)$ A și $v = 20$ cm/s, să se determine energia disipată în rezistor de la timpul $t_1 = 0$, la $t_2 = 3$ s. La $t_1 = 0$, $d_0 = 2$ m.

6.14. În figură este reprezentat generatorul cu disc al lui Faraday. Să se determine tensiunea electromotoare indusă în generator pentru o viteză de rotație a discului de $n = 5\,000$ rot/min, o rază a discului $R = 10$ cm și o inducție magnetică $B = 5\,000$ Gs.

Să se rezolve problema precedentă și în cazul cînd axa în jurul căreia se rotește discul este excentrică, situată la o distanță $a = 2$ cm de centrul discului.

Scanned with OKEN Scanner

6.15. La extremitatea barelor conductoare fixe *1*, *2*, pe care poate aluneca în lungul lor, fără frecare, bara conductoare *3*, se leagă (fig. 6.15) un generator de curent continuu cu rezistența interioară

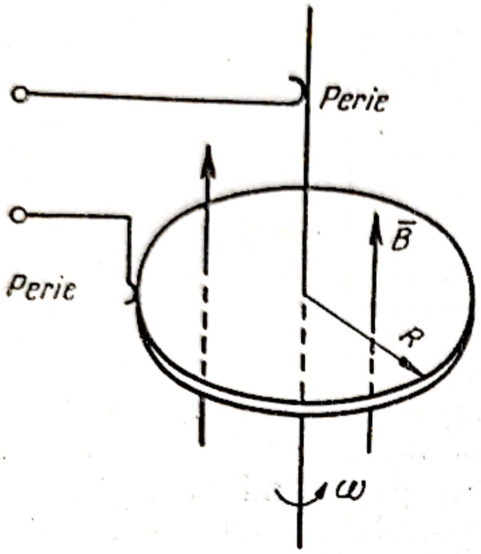


Fig. 6.14

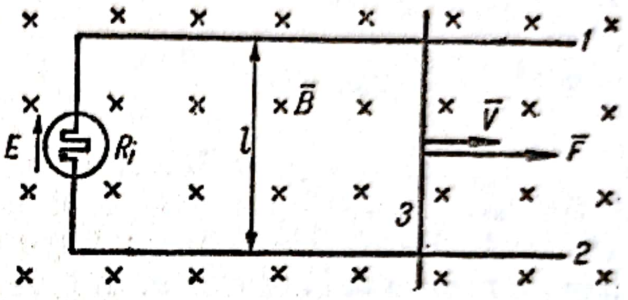


Fig. 6.15

$R_i = 0{,}3\ \Omega$ și t.e.m. $E = 1$ V. Sistemul de bare este situat într-un cîmp magnetic omogen de inducție $B = 1\,000$ Gs, perpendiculară pe planul barelor. Distanța dintre barele paralele *1*, *2* fiind $l = 1$ m și rezistența barelor *1*, *2*, *3* neglijabilă față de R_i, să se determine:

a) forța F exercitată de cîmpul magnetic asupra barei *3*, atunci cînd aceasta este imobilă $v = 0$;

b) forța F exercitată de cîmpul magnetic asupra barei *3*, cînd aceasta se deplasează cu vitezele $v = 10,\ 50,\ 100$ cm/s;

c) puterea totală a generatorului și felul cum aceasta se repartizează în putere pierdută $R_i I^2$ și puterea mecanică $F \cdot v$.

6.16. Să se determine timpul în care bara *3*, de masă m, din problema precedentă, pornind din repaus la $t = 0$, obține, sub acțiunea forței F exercitate de cîmpul magnetic, o viteză $v = 1$m/s. Se va neglija inductivitatea proprie a circuitului.

6.17. Se dă sistemul de bare conductoare filiforme reprezentate în figura 6.17, situat într-un cîmp magnetic omogen $\bar{B}$ perpendicular pe planul barelor. În momentul $t = 0$, cînd bara *1* de masă m are viteza v_{10}, iar bara *2* de masă m are viteza $v_{20} = 0$, se închide contactul K, conectînd circuitul barelor pe rezistorul de rezistență electrică R. Presupunînd rezistența R suficient de mare pentru a putea neglija cîmpul magnetic produs de curentul din bare, să se determine viteza de deplasare a barelor:

a) neglijînd frecarea barelor;

Scanned with OKEN Scanner

b) considerînd acțiunea unor forțe de frecare: $F_1 = kv_1$ și $F_2 = kv_2$.
Se presupune că asupra barelor, pentru $t > 0$, nu mai acționează forțe exterioare (în afara celor exercitate de cîmpul magnetic).

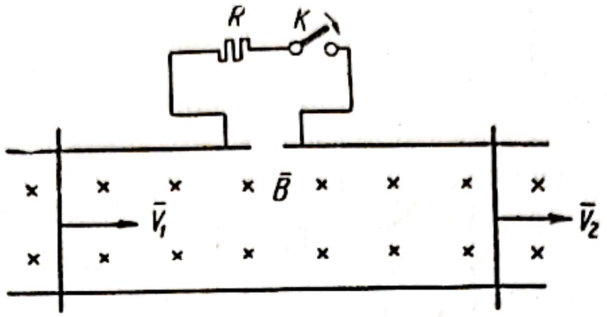


Fig. 6.17

6.18. Rotorul unei mașini de curent continuu are o înfășurare formată din 60 de bare parcurse de un curent de intensitate $I = 20$ A. Barele sînt situate într-un cîmp magnetic radial. Distanța de la axa de rotație la bare este d. Intensitatea curentului și inducția B sînt astfel orientate încît forțele exercitate asupra barelor tind fiecare să rotească rotorul într-un același sens. Puterea la arbore fiind $P = 0{,}5$ kW, neglijînd pierderile, să se determine t.e.m. indusă în fiecare bară.

6.19. Un inel de oțel, de grosime g, este traversat de un tub de flux magnetic cilindric circular în care inducția magnetică este constantă în spațiu și variabilă în timp: $B = B_m \sin \omega t$. Dimensiunile ine-

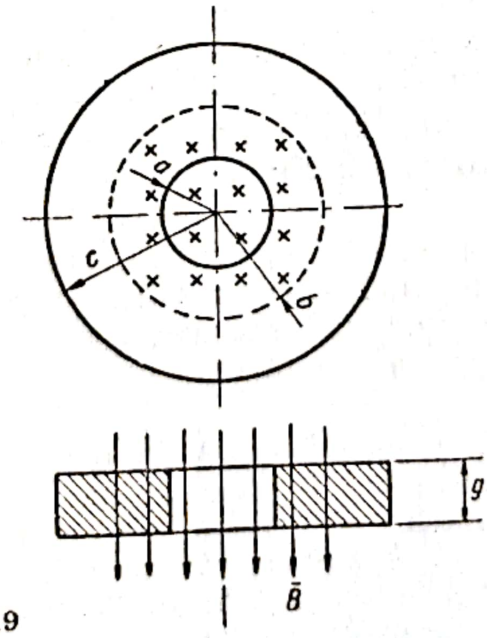


Fig. 6.19

lului fiind cele indicate în figura 6.19 să se determine puterea disipată în inel prin efect electrocaloric. Se consideră cazul cînd variația lui B în timp

Scanned with OKEN Scanner

este suficient de lentă pentru a se neglija cîmpul magnetic suplimentar produs de curentul indus în inel.

Aplicație: $B_m = 0{,}5\ \mathrm{Wb/m^2}$; $a = 4$ cm; $b = 6$ cm; $c = 8$ cm; $g = 4$ mm; $f = 50$ Hz.

6.20 (I)* . O bobină cu n spire de suprafață S, străbătute de un curent variabil în timp, de intensitate $i = I_m \sin \omega t$, este situată în aer în fața unei plăci conductoare neferomagnetice (fig. 6.20). Dimensiunile suprafeței plăcii și distanța d de la bobină la placă sînt foarte mari, iar grosimea g a plăcii — foarte mică față de dimensiunile bobinei. Presupunînd rezistivitatea ρ a conductorului suficient de mare și variația în timp a curentului suficient de lentă, se va neglija, în primă aproximație, cîmpul magnetic suplimentar produs de curenții induși în placă. Să se determine puterea disipată în placă sub formă de căldură.

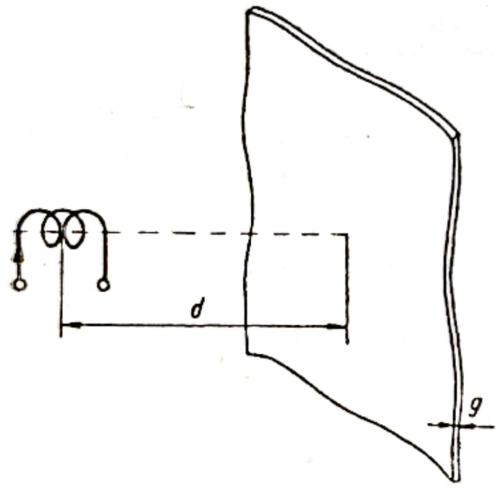


Fig. 6.20

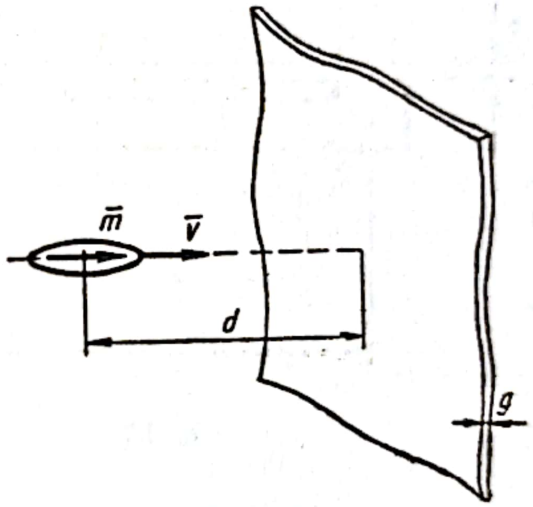


Fig. 6.21

6.21 *. Un mic magnet permanent, de moment magnetic $\overline{m}$, perpendicular pe o placă conductoare neferomagnetică, se apropie de placă cu o viteză $\overline{v}$ constantă și paralelă cu $\overline{m}$. Dimensiunile suprafeței plăcii sînt foarte mari, iar grosimea plăcii foarte mică față de distanța variabilă de la magnet la placă. Considerînd rezistivitatea conductorului ρ suficient de mare și viteza suficient de mică, se va neglija, în primă aproximație, cîmpul magnetic suplimentar produs în placă de curenții induși în aceasta.

Să se determine :

a) intensitatea cîmpului electric indus prin mișcare;
b) densitatea curentului electric indus în placă;
c) puterea disipată sub formă de căldură în placă;
d) forța cu care este frînat magnetul de cîmpul magnetic produs de curentul electric indus în placă.

Scanned with OKEN Scanner

6.22. Să se determine inducția magnetică $\bar{B}$ la suprafața polilor electromagnetului reprezentat în figura 6.22, alegînd în prealabil diametrul exterior D al polilor, astfel încît polul interior (de diametru d) să exercite aceeași forță ca și polul (inelar) exterior, pentru ca acesta să poată ridica o placă de oțel de 3 t, pusă în contact cu polii. Se va lua un coeficient de siguranță egal cu 2.

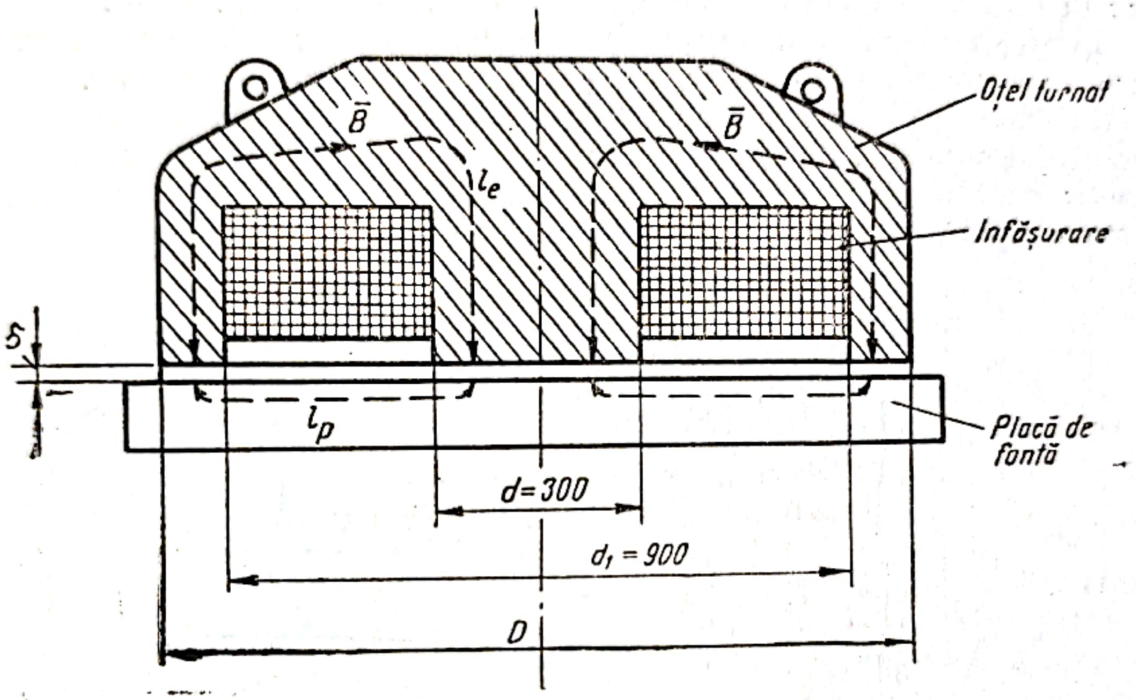


Fig. 6.22

6.23. Pentru electromagnetul de macara din problema precedentă se dau lungimea medie a liniilor de cîmp în miezul de oțel turnat al electromagnetului $l_e = 700$ mm și lungimea medie a liniilor de cîmp în placa de fontă ridicată $l_p = 450$ mm.

Să se determine:

a) intensitatea curentului din cele 150 de spire ale bobinei sale, în cazul unui întrefier (mediu) $\delta = 0{,}5$ mm.

b) forța purtătoare a electromagnetului, dacă lungimea întrefierului se dublează, iar intensitatea curentului se menține la valoarea determinată la punctul *a*.

6.24. La plasarea unei benzi conductoare parcurse de curentul electric I într-un cîmp magnetic exterior $\bar{B}$ se produce un cîmp electric transversal (efect Hall) — figura 6.24. Să se determine inducția magnetică B în care trebuie plasată o bandă semiconductoare de germaniu de

Scanned with OKEN Scanner

grosime $d = 1$ mm, parcursă de un curent de intensitate $I = 2$ A pentru a produce prin efect Hall o tensiune $U_H = 1$ V. Se dă valoarea constantei Hall:

$$R = \frac{d \cdot U_H}{I \cdot B} = 10^{-2} \frac{m^3}{s \cdot A}.$$

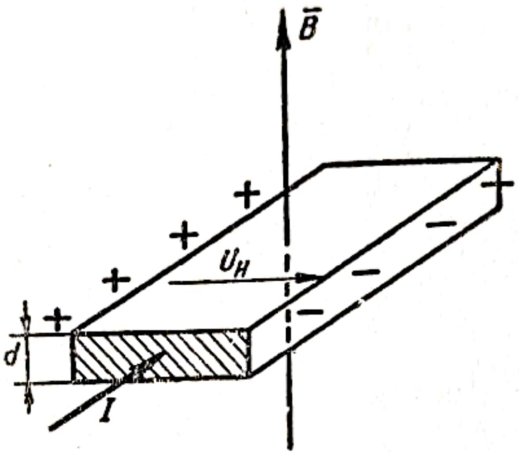


Fig. 6.24

6.25. Prin dielectricul omogen și imperfect al unui condensator trece un curent electric de intensitate $i = I_m \sin 2\pi f t$. Dielectricul avînd o conductivitate σ și permitivitate ε, să se determine frecvența f a curentului, pentru care curentul electric de deplasare din conductor are aceeași intensitate cu curentul electric (de conducție) care trece prin dielectric.

Scanned with OKEN Scanner

II.

CIRCUITE ELECTRICE DE CURENT VARIABIL

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 7

CIRCUITE MONOFAZATE ÎN REGIM SINUSOIDAL

A. BREVIAR

7.1. Mărime periodică se numește o mărime variabilă $x(t)$ ale cărei valori se repetă în aceeași ordine la intervale egale ale variabilei t (fig. B.7.1); o mărime periodică $x(t)$ satisface relația:

$$x(t) = x(t + nT), \tag{7.1}$$

n fiind un număr întreg.

Perioada T este intervalul minim al variabilei t după care se repetă valorile mărimii x.

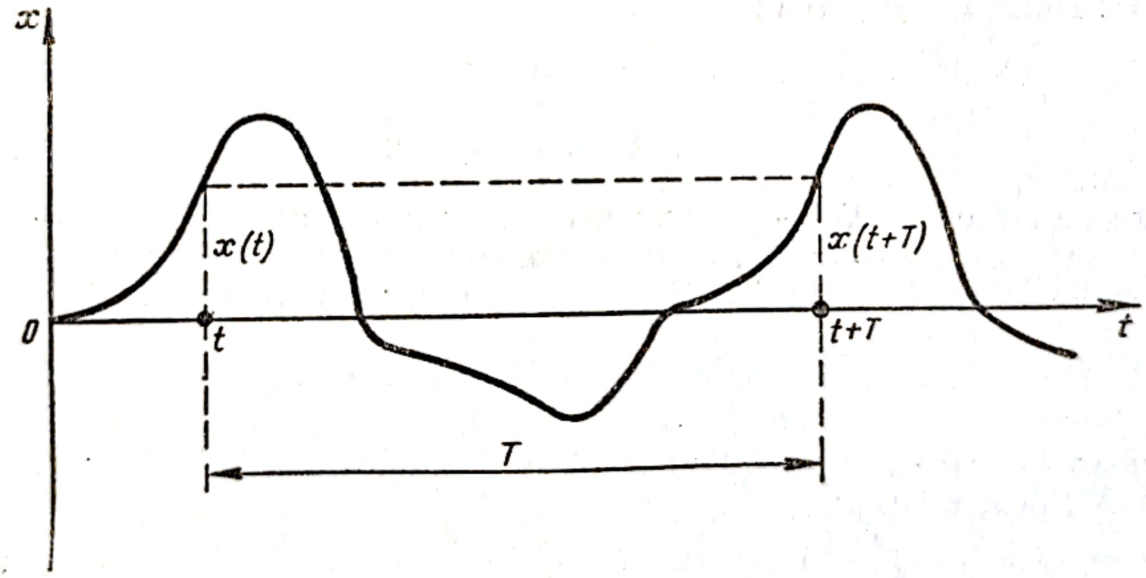


Fig. B.7.1

7.2. Frecvența f a unei mărimi periodice de timp este inversul perioadei. Frecvența este egală cu numărul de perioade dintr-o secundă și se măsoară în hertzi (Hz):

$$f = \frac{1}{T} \text{ (Hz)}. \tag{7.2}$$

Scanned with OKEN Scanner

7.3. Valoarea instantanee (momentană) a unei mărimi funcție de timp este valoarea acelei mărimi la un moment dat t.

7.4. Valoarea eficace X a unei mărimi periodice x este rădăcina pătrată a mediei pătratelor valorilor instantanee în timpul unei perioade:

$$X = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\mathrm{d}t}. \tag{7.4}$$

În cazul unui curent electric periodic, valoarea sa eficace este egală cu intensitatea curentului continuu care ar produce același efect Joule-Lenz, ca și curentul periodic considerat pe timp de o perioadă:

$$RI^2T = \int_0^T Ri^2\mathrm{d}t.$$

Valoarea eficace este denumită și valoare efectivă.

7.5. Mărimea alternativă este o mărime periodică $x(t)$ a cărei valoare medie pe o perioadă este nulă:

$$\int_0^T x(t)\mathrm{d}t = 0. \tag{7.5}$$

7.6. Mărimea sinusoidală este o funcție de variabila independentă t de forma:

$$x(t) = X_m \sin(\omega t + \alpha)$$

sau

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \beta), \tag{7.6 a}$$

în care s-a notat cu: X_m — valoarea maximă (amplitudinea); $\omega t + \alpha$ — *unghiul fazic* sau *faza*; α — *faza inițială* (valoarea fazei la momentul $t = 0$); ω — pulsația, definită în funcție de frecvența f sau perioada T prin:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}\ \mathrm{rad/s}. \tag{7.6 b}$$

Valoarea eficace X a unei sinusoidale $x(t)$ este legată de valoarea sa maximă X_m prin relația:

$$X = \frac{X_m}{\sqrt{2}}, \tag{7.6 c}$$

astfel încît o mărime sinusoidală se poate scrie sub forma:

$$x(t) = X\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha). \tag{7.6 d}$$

Reprezentarea carteziană a unei mărimi sinusoidale se arată în figura B.7.2.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se consideră două mărimi sinusoidale:

$$x_1(t) = X_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha_1);$$
$$x_2(t) = X_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha_2), \qquad (7.6\,e)$$

diferența φ dintre fazele lor se numește *defazaj*:

$$\varphi = \alpha_1 - \alpha_2. \qquad (7.6\,f)$$

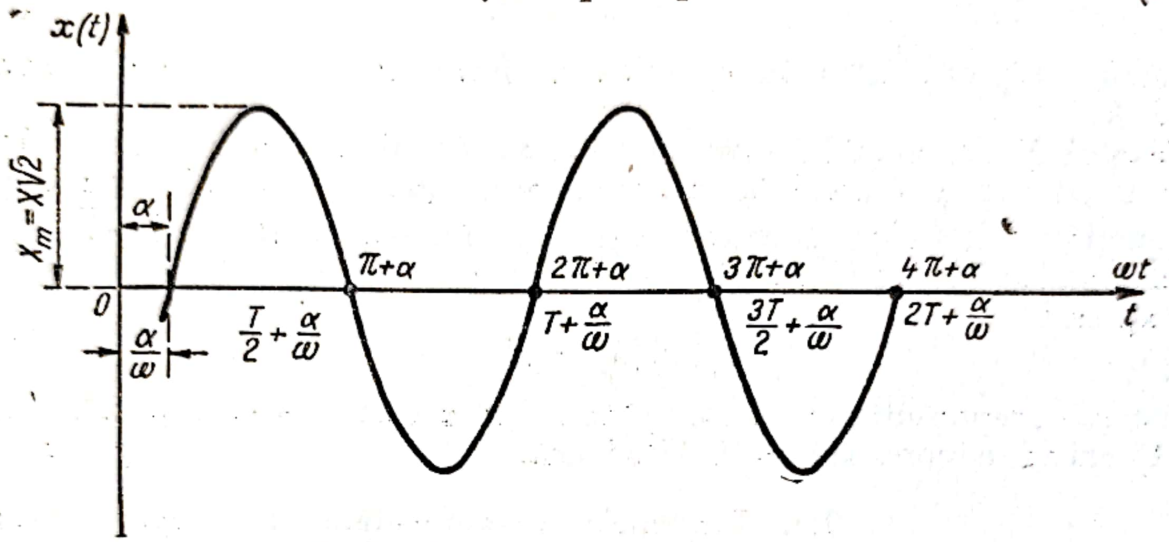


Fig. B.7.2

Dacă se alege ca origine de fază, faza mărimii x_1, atunci, pentru $\alpha_1 = 0$, cele două mărimi se vor scrie:

$$x_1(t) = X_1\sqrt{2}\sin\omega t;$$
$$x_2(t) = X_2\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi), \qquad (7.6\,g)$$

în care φ este defazajul lui x_2 în urma lui x_1.

Reprezentarea grafică a acestor funcțiuni este indicată în figura B.7.3.

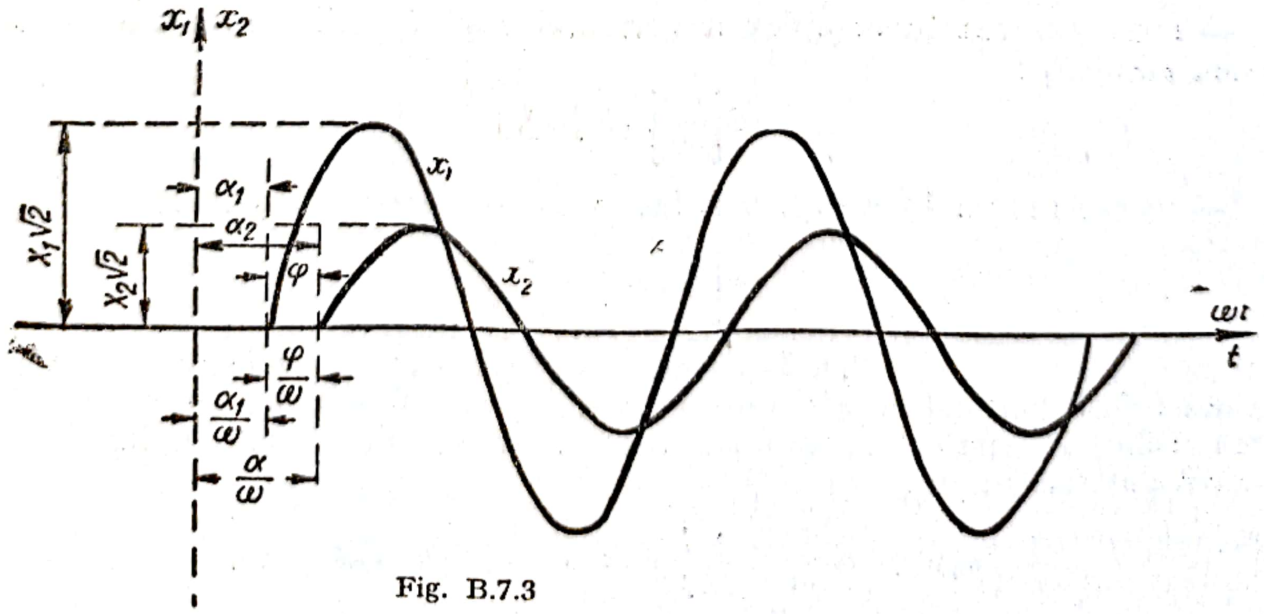


Fig. B.7.3

Scanned with OKEN Scanner

7.7. Reprezentarea în complex a mărimilor sinusoidale. Unei funcțiuni sinusoidale

$$x = X\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha) \tag{7.7 a}$$

i se asociază mărimea complexă

$$\underline{X} = Xe^{j\alpha}, \tag{7.7 b}$$

denumită reprezentarea în complex a funcțiunii sinusoidale x sau fazorul $\underline{X}$.

Fazorul $\underline{X}$ are modulul egal cu valoarea efectivă X a funcțiunii sinusoidale x pe care o reprezintă și argumentul egal cu unghiul fazic inițial α al funcțiunii sinusoidale. În expresia fazorului s-a notat $j = \sqrt{-1}$, e fiind baza logaritmilor naturali.

Expresia

$$\mathcal{C}[x] = \underline{X} \tag{7.7 c}$$

se citește „reprezentarea în complex a lui x este X — complex". Între x și $\underline{X}$ există o corespondență biunivocă.

7.8. Teoremele fundamentale ale reprezentării în complex se referă la:

— reprezentarea în complex a unei combinații liniare de funcții sinusoidale de aceeași pulsație — *teorema combinațiilor liniare*:

$$\mathcal{C}\left[\sum_{k=1}^{k=n} a_k x_k\right] = \sum_{k=1}^{k=n} a_k \underline{X}_k; \tag{7.8 a}$$

în particular:

$$\mathcal{C}[x_1 + x_2 + \ldots + x_n] = \underline{X}_1 + \underline{X}_2 + \ldots + \underline{X}_n;$$

— reprezentarea în complex a derivatei unei funcții sinusoidale — *teorema derivatei*:

$$\mathcal{C}\left[\frac{dx}{dt}\right] = j\omega\underline{X}; \tag{7.8 b}$$

— reprezentarea în complex a integralei — *teorema integralei*:

$$\mathcal{C}\left[\int x\,dt\right] = \frac{\underline{X}}{j\omega}. \tag{7.8 c}$$

7.9. Determinarea funcțiilor sinusoidale care reprezintă soluții particulare ale unor ecuații integrodiferențiale. Se știe că găsirea soluției particulare a unei ecuații integrodiferențiale liniare și cu coeficienți constanți:

$$a_1 y + a_2 \frac{dy}{dt} + a_3 \int y\,dt = X\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha), \tag{7.9 a}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde a_1, a_2, a_3 sînt coeficienți constanți, revine la găsirea unei funcții sinusoidale :

$$y = Y\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta), \tag{7.9 b}$$

care să verifice ecuația dată (7.9 *e*).

Metoda simbolică folosește reprezentarea în complex reducînd problema la determinarea lui $\underline{Y}$ pe baza rezolvării ecuației algebrice :

$$a_1\underline{Y} + a_2 j\omega\underline{Y} + a_3\frac{\underline{Y}}{j\omega} = \underline{X}. \tag{7.9 c}$$

Această ecuație se obține prin aplicarea teoremelor din paragraful precedent. Din (7.9 *c*) rezultă :

$$\underline{Y} = \frac{\underline{X}}{a_1 + j\omega a_2 + \dfrac{a_3}{j\omega}}. \tag{7.9 d}$$

Ca urmare, soluția căutată este :

$$y = |\underline{Y}| \cdot \sqrt{2}\sin(\omega t + \arg \underline{Y}). \tag{7.9 e}$$

7.10. Reprezentarea vectorială a funcțiilor sinusoidale. Folosind reprezentarea vectorială în planul complex a numerelor complexe, fiecărui fazor (7.7 *b*), asociat unei funcții sinusoidale (7.7 *a*), îi corespunde un vector $\underline{X}$, indicat în figura B.7.4.

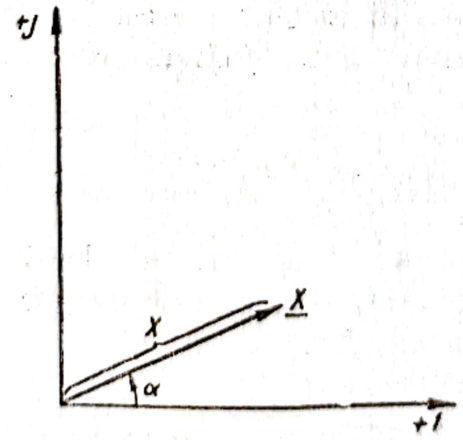


Fig. B.7.4

Asociind cîte un fazor fiecărei funcțiuni sinusoidale de timp, se asociază implicit cîte un vector (în planul complex) pentru fiecare funcție sinusoidală.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiilor integrodiferențiale (7.9 *a*) le corespund, prin intermediul ecuațiilor complexe (7.9 *b*), diagrame vectoriale (fig. B.7.5). La construcția acestor diagrame se ține seamă de faptul că produsul $j\underline{Y} = e^{j\frac{\pi}{2}}\underline{Y} = Ye^{j\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)}$ are argumentul cu $\frac{\pi}{2}$ mai mare decît argumentul lui $\underline{Y}$; astfel, în reprezentarea vectorială, înmulțirii lui $\underline{Y}$ cu j îi corespunde rotirea vectorului $\underline{Y}$ cu $+\frac{\pi}{2}$. Analog, împărțirii cu j îi corespunde rotirea cu $-\frac{\pi}{2}$ (v. fig. B.7.6).

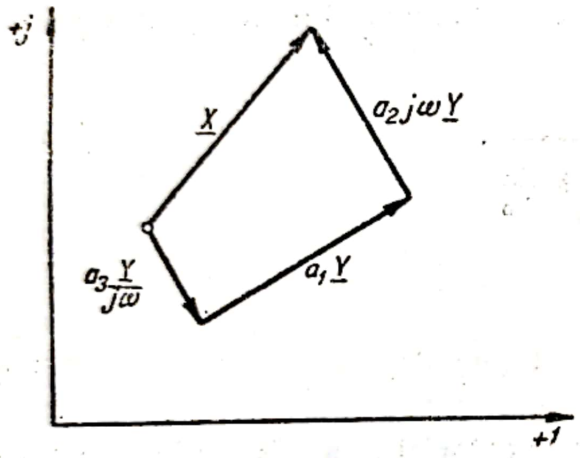


Fig. B.7.5

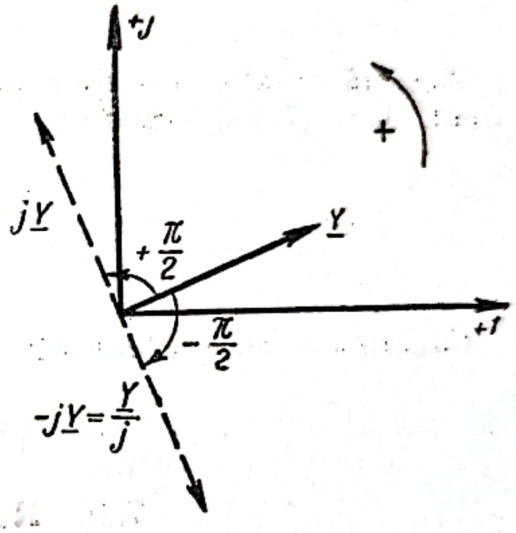


Fig. B.7.6

7.11. Forma generală de reprezentare în complex a mărimilor sinusoidale. Uneori, în locul reprezentării în complex indicate în § 7.7 se utilizează următoarea formă generală de reprezentare în complex a funcțiunii (7.7 *a*) :

$$\underline{x} = Xe^{j(\omega t+\alpha)}. \tag{7.11}$$

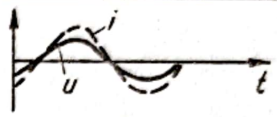
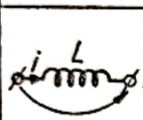
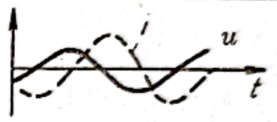
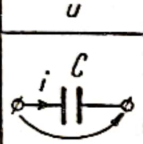
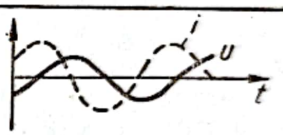
Pentru această formă de reprezentare rămîn valabile teoremele fundamentale, însă vectorii corespunzători din planul complex sînt vectori rotitori (al căror argument este funcție de *t*).

7.12. Elementele de circuit în regim sinusoidal. Prin definiție, regimul sinusoidal (denumit și armonic) este regimul de funcționare a circuitelor electrice în care toate mărimile ce caracterizează starea sa electromagnetică : tensiuni, curenți, tensiuni electromotoare, fluxuri magnetice etc. variază sinusoidal în timp.

Scanned with OKEN Scanner

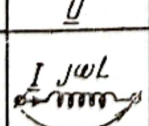
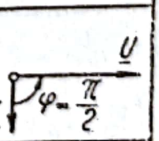
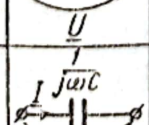
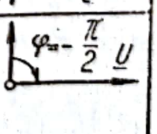
În tabela 1 sînt reprezentate elementele ideale ale circuitelor electrice: rezistorul ideal, bobina ideală, condensatorul ideal și sursa ideală, ecuațiile de funcționare în regim sinusoidal și diagramele.

Tabela 1

Elementul de circuit	Schema	Relația între tensiune și curent în valori instantanee	Expresiile tensiunii și curentului	Diagrama tensiunii și curentului
Rezistorul ideal (rezistența)		$u = ri$	$u = U_m \sin(\omega t + \gamma)$ $i = \frac{U_m}{r} \sin(\omega t + \gamma)$	
Bobina ideală (inductivitatea)		$u = L\frac{di}{dt}$	$u = U_m \sin(\omega t + \gamma)$ $i = \frac{U_m}{L\omega} \sin\left(\omega t + \gamma - \frac{\pi}{2}\right)$	
Condensatorul (ideal capacitatea)		$i = C\frac{du}{dt}$	$u = U_m \sin(\omega t + \gamma)$ $i = \frac{U_m}{\frac{1}{C\omega}} \sin\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right)$	

Ecuațiile de funcționare și diagramele vectoriale ale elementelor ideale de circuit, în metoda simbolică, sînt redate în tabela 2.

Tabela 2

Elementul de circuit	Schema	Ecuația în complex	Expresiile tensiunii și curentului în complex	Impedanța complexă $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$	Diagrama vectorială
Rezistorul ideal (rezistența)		$\underline{U} = r\underline{I}$	$\underline{U} = Ue^{j\gamma}$ $\underline{I} = \frac{U}{r}e^{j\gamma}$	$\underline{Z} = r$	
Bobina ideală (inductivitatea)		$\underline{U} = j\omega L\underline{I}$	$\underline{U} = Ue^{j\gamma}$ $\underline{I} = \frac{U}{\omega L}e^{j\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right)}$	$\underline{Z} = j\omega L$	
Condensatorul ideal (capacitatea)		$\underline{I} = j\omega C\underline{U}$	$\underline{U} = Ue^{j\gamma}$ $\underline{I} = \frac{U}{\frac{1}{C\omega}}e^{j\left(\gamma + \frac{\pi}{2}\right)}$	$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$	

Un element pasiv de circuit (bobină, rezistor, condensator) se reprezintă în schemele electrice așa cum se indică în figura B.7.7. Un astfel de element se caracterizează în metoda simbolică prin *impedanța complexă* definită prin:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}. \qquad (7.12\ a)$$

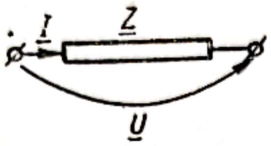


Fig. B.7.7

Valoarea absolută a impedanței complexe se numește *impedanță*:

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{U}{I}. \qquad (7.12\ b)$$

Argumentul impedanței complexe se notează de obicei cu φ și are expresia:

$$\varphi = \arg \underline{Z} = \arg \underline{U} - \arg \underline{I}. \qquad (7.12\ c)$$

Argumentul impedanței complexe este deci egal cu defazajul curentului în urma tensiunii (unghiul fazic inițial al tensiunii, minus unghiul fazic inițial al curentului).

Valorile lui $\underline{Z}$ și φ pentru elementele ideale de circuit sînt indicate în tabela 2.

7.13. Forma complexă a legii lui Ohm generalizate. Pentru un circuit format prin legarea în serie a mai multor elemente (fig. B.7.8), legea lui Ohm generalizată, în valori instantanee, are expresia cunoscută (10.5 *a*):

$$u + e_3 - e_6 = r_1 i + L_2 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C_4}\int i\mathrm{d}t + r_5 i + r_6 i + L_6 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \qquad (7.13\ a)$$

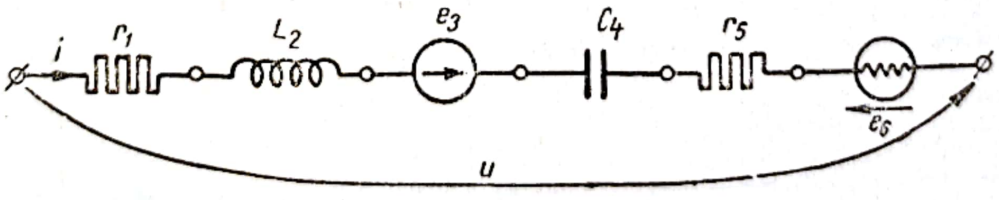


Fig. 7.8

Aplicînd teoremele fundamentale ale metodei simbolice (7.8) pentru regimul sinusoidal, se obține forma în complex a legii lui Ohm generalizate:

$$\underline{U} + \underline{E}_3 - \underline{E}_6 = r_1 \underline{I} + \mathrm{j}\omega L_2 \underline{I} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_4}\underline{I} + r_5 \underline{I} + r_6 \underline{I} + \mathrm{j}\omega L_6 \underline{I}. \qquad (7.13\ b)$$

Scanned with OKEN Scanner

Relației (7.13 *b*) îi corespunde diagrama vectorială din figura B.7.9. Formei generale în valori instantanee:

$$u + \sum e = \sum \left(ri + L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C} \int i \mathrm{d}t \right) \qquad (7.13\ c)$$

îi corespunde *legea lui Ohm generalizată* în formă complexă:

$$\underline{U} + \sum \underline{E} = \sum \underline{Z}\underline{I}. \qquad (7.13\ d)$$

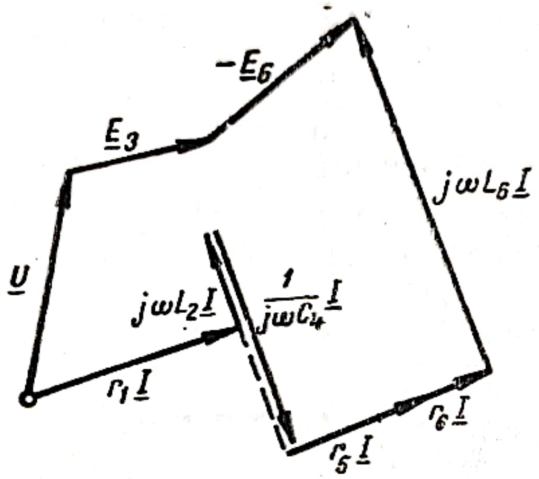


Fig. B.7.9

Enunțul acestei legi este următorul: pentru orice circuit-serie, suma dintre fazorul tensiunii la borne $\underline{U}$ și fazorii t.e.m. $\underline{E}$ este egală cu suma fazorilor căderilor de tensiune $\underline{Z}\underline{I}$. În relația (7.13 *d*) și în enunțul dat se consideră valorile fazorilor corespunzătoare unui sens unic de referință ales (arbitrar) în lungul circuitului.

7.14. Teoremele lui Kirchhoff în formă complexă. Teoremelor lui Kirchhoff în valori instantanee (10.6) și (10.7):

$$\sum i = 0;$$

$$\sum e = \sum \left(ri + L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C} \int i \mathrm{d}t \right).$$

pentru regimul sinusoidal, în metoda simbolică, le corespund:

$$\sum \underline{I} = 0, \qquad (7.14\ a)$$

prima teoremă a lui Kirchhoff în formă complexă, respectiv:

$$\sum \underline{E} = \sum \left(r\underline{I} + \mathrm{j}\omega L \underline{I} + \mathrm{j}\omega M \underline{I} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \underline{I} \right), \qquad (7.14\ b)$$

a doua teoremă a lui Kirchhoff în formă complexă.

Scanned with OKEN Scanner

Notînd cu $\underline{Z} = r$, $\underline{Z} = j\omega L$, $\underline{Z} = j\omega M$, $\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$ diversele impedanțe complexe corespunzătoare rezistenței electrice, inductivităților proprii sau mutuale și capacității, *a doua teoremă a lui Kirchhoff* se pune sub forma:

$$\sum \underline{E} = \sum \underline{Z}\underline{I}. \qquad (7.14\ c)$$

7.15. Dipoli electrici. Dipolul electric este o rețea electrică cu două borne accesibile.

Dipolii electrici se clasifică în:

— dipoli pasivi, dacă conțin numai elemente pasive r, L, C;

— dipoli activi, dacă conțin și surse.

7.16. Impedanța, rezistența și reactanța unui dipol în regim sinusoidal. Asociind sensurile de referință ale tensiunii și curentului la bornele unui dipol pasiv, așa cum se indică în figura B.7.10, impedanța sa complexă (echivalentă) este prin definiție:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}. \qquad (7.16\ a)$$

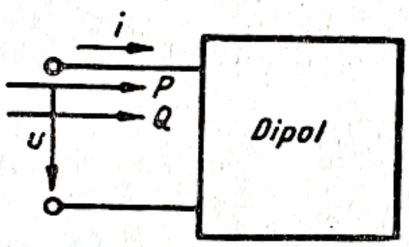


Fig. B.7.10

Partea reală a impedanței complexe se numește *rezistența* dipolului (echivalentă):

$$R = \mathrm{Re}\,[\underline{Z}]. \qquad (17.16\ b)$$

Partea imaginară (coeficientul lui j) a impedanței complexe se numește *reactanța* dipolului (echivalentă):

$$X = \mathrm{Im}\,[\underline{Z}]. \qquad (17.16\ c)$$

Rezultă următoarea expresie (algebrică) a impedanței complexe:

$$\underline{Z} = R + jX. \qquad (7.16\ d)$$

În sistemul internațional (SI) de unități, Z, R, X au ca unitate comună 1 ohm (1Ω).

7.17. Admitanța, conductanța și susceptanța unui dipol. Uneori, în locul impedanței complexe $\underline{Z}$ a dipolului se utilizează valoarea sa inversă $\underline{Y}$, denumită *admitanță complexă* și definită:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}\ (7.17\ a) \text{ sau } \underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}. \qquad (7.17\ b)$$

Scanned with OKEN Scanner

Partea reală a admitanței complexe se numește *conductanța* dipolului (echivalentă) :

$$G = \mathrm{Re}\,[\underline{Y}]. \qquad (7.17\ c)$$

Partea imaginară cu semn schimbat a admitanței complexe se numește *susceptanța* dipolului (echivalentă) :

$$B = -\,\mathrm{Im}\,[Y]. \qquad (7.17\ d)$$

Rezultă următoarea expresie pentru *admitanța complexă* :

$$\underline{Y} = G - \mathrm{j}B. \qquad (7.17\ e)$$

În sistemul internațional de unități Y, G, B au ca unitate comună 1 siemens (1 S).

7.18. Parametrii elementelor de circuit. În conformitate cu definițiile date în cele două paragrafe precedente pentru elementele ideale ale circuitelor electrice (care constituie cîte un caz particular de dipol) corespund parametrii indicați în tabela 3.

Tabela 3

Dipolul	Impedanța complexă	Rezistența R	Reactanța X	Admitanța complexă	Conductanța G	Susceptanța B
Rezistorul ideal	$\underline{Z} = R$	R	0	$\underline{Y} = \frac{1}{R}$	$\frac{1}{R}$	0
Bobina ideală	$\underline{Z} = \mathrm{j}\omega L$	0	ωL	$\underline{Y} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega L}$	0	$\frac{1}{\omega L}$
Condensatorul ideal	$\underline{Z} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$	0	$-\frac{1}{\omega C}$	$\underline{Y} = \mathrm{j}\omega C$	0	$-\omega C$

Din definiția conductanței și susceptanței, (7.17 *c*) și (7.17 *d*), rezultă că un dipol cu impedanța complexă $\underline{Z} = R + \mathrm{j}X$ are o admitanță complexă :

$$\underline{Y} = \frac{1}{R + \mathrm{j}X} = \frac{R - \mathrm{j}X}{R^2 + X^2}, \qquad (7.18\ a)$$

o *conductanță*

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \qquad (7.18\ b)$$

Scanned with OKEN Scanner

și o *susceptanță*

$$B = \frac{X}{R^2 + X^2}. \qquad (7.18\ c)$$

Analog, un dipol cu admitanța complexă $\underline{Y} = G - jB$ are următoarele valori ale parametrilor săi R și X:

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}; \qquad (7.18\ d)$$

$$X = \frac{B}{G^2 + B^2}. \qquad (7.18\ e)$$

7.19. Componentele active și reactive ale curentului și tensiunii la bornele unui dipol pasiv. Tensiunea $\underline{U}$ la bornele unui dipol (fig. 7. 10) se poate descompune, pe baza relațiilor (7.16 a, b, c) în două componente:

$$\underline{U} = R\,\underline{I} + jX\underline{I}. \qquad (7.19\ a)$$

Componenta activă a tensiunii este prin definiție:

$$\underline{U}_a = R\,\underline{I}, \qquad (7.19\ b)$$

valoarea ei instantanee u_a fiind deci în fază cu intensitatea curentului electric.

Componenta reactivă a tensiunii este prin definiție:

$$\underline{U}_r = jX\underline{I}; \qquad (7.19\ c)$$

valoarea ei instantanee u_r este deci defazată cu $\frac{\pi}{2}$ față de intensitatea curentului.

Rezultă

$$\underline{U} = \underline{U}_a + \underline{U}_r \qquad (7.19\ d)$$

și

$$u = u_a + u_r. \qquad (7.19\ e)$$

Intensitatea i a curentului electric se descompune analog într-o componentă activă i_a în fază cu tensiunea și o componentă i_r defazată cu un sfert de perioadă $\frac{\pi}{2}$ față de tensiunea la borne:

$$\underline{I} = G\underline{U} - jB\underline{U}; \qquad (7.19\ f)$$

$$\underline{I}_a = G\underline{U}; \qquad (7.19\ g)$$

$$\underline{I}_r = -jB\underline{U} \qquad (7.19\ h)$$

Scanned with OKEN Scanner

Descompunerile în componente active și reactive sînt reprezentate grafic în figura B.7.11, *a* și *b*.

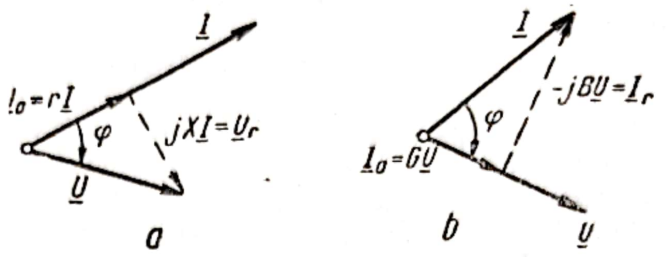


Fig. B.7.11

7.20. Circuitul-serie. Pentru un circuit-serie (fig. B.7.12 *a*) format din n elemente de impedanță complexă $\underline{Z}_k$, relația dintre tensiunea la borne și curent este dată de legea lui Ohm generalizată, în forma:

$$\underline{U} = \left(\sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k\right) \cdot \underline{I} \cdot \qquad (7.20\ a)$$

Ca urmare, circuitul serie este echivalent, în ceea ce privește relația dintre curent și tensiune la borne, cu un element de impedanță echivalentă:

$$\underline{Z}_e = \sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k. \qquad (7.20\ b)$$

Egalînd părțile reale din cei doi membri ai relației (7.20 *b*), rezultă *rezistența echivalentă a circuitului-serie*:

$$R_e = \sum_{k=1}^{n} R_k. \qquad (7.20\ c)$$

Egalînd părțile imaginare din cei doi membri ai relației (7.20 *b*), rezultă *reactanța echivalentă a circuitului-serie*:

$$X_e = \sum_{k=1}^{n} X_k \cdot \qquad (7.20\ d)$$

În figura B.7.12 *b* este reprezentată diagrama vectorială a circuitului-serie corespunzătoare ecuației:

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \ldots + \underline{U}_n \qquad (7.20\ e)$$

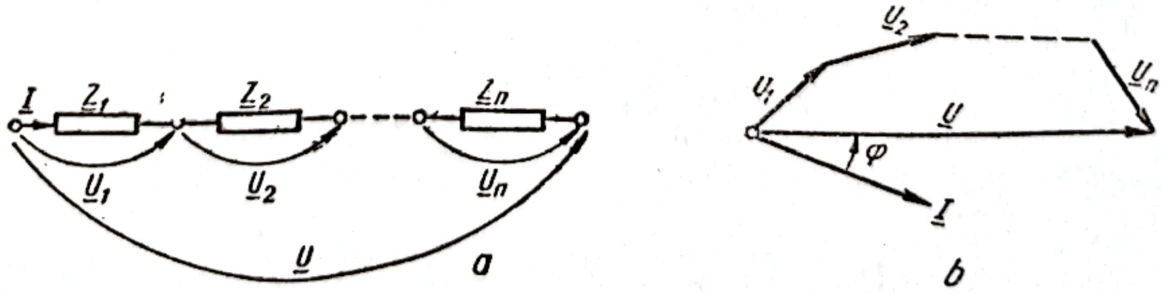


Fig. B.7.12

7.21. Circuitul R, L, C serie în regim sinusoidal. În figura B.7.13 *a* este reprezentat un caz particular de circuit-serie, format din legarea în serie a unui condensator ideal, a unui rezistor ideal și a unei bobine ideale.

Din legea lui Ohm generalizată rezultă ecuația:

$$\underline{U} = \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega\,C}\underline{I} + R\underline{I} + \mathrm{j}\omega L\underline{I}; \qquad (7.21\ a)$$

diagrama vectorială corespunzătoare este reprezentată în figura B.7.13 *b* pentru cazul $\varphi < 0$.

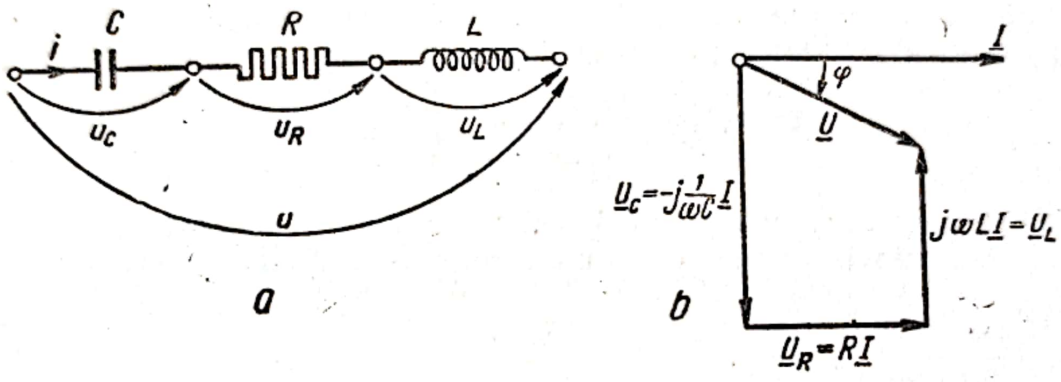


Fig. B.7.13

Impedanța complexă a circuitului-serie *R*, *L*, *C* este deci:

$$\underline{Z} = \mathrm{R} + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \qquad (7.21\ b)$$

Ca urmare, fazorul curentului are expresia:

$$\underline{I} = \frac{U}{Z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\arg \underline{U} - \arg \underline{Z})}. \qquad (7.21\ c)$$

Pentru

$$u = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \gamma)$$

rezultă

$$i = \sqrt{2}\frac{U}{Z}\sin\,(\omega t + \gamma - \varphi), \qquad (7.21\ d)$$

în care

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \text{ și } \mathrm{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \qquad (7.21\ e)$$

Scanned with OKEN Scanner

Pulsația $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ se numește *pulsația de rezonanță*. Pentru $\omega = \omega_0$ rezultă :

$$X = 0; \quad \operatorname{tg}\varphi = 0 \text{ și } \underline{Z} = R; \tag{7.21 f}$$

în acest caz, circuitul este în *rezonanță de tensiune*.

7.22. Circuitul-derivație în regim sinusoidal. Pentru un circuit-derivație (fig. B.7.14, *a*) format din n dipoli legați în derivație și având admitanțele $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \ldots \underline{Y}_n$, intensitatea curentului total este dată de prima teoremă a lui Kirchhoff :

$$\underline{I} = \sum_{k=1}^{n} \underline{I}_k. \tag{7.22 a}$$

Diagrama vectorială corespunzătoare este reprezentată în figura B.7.14, *b*.

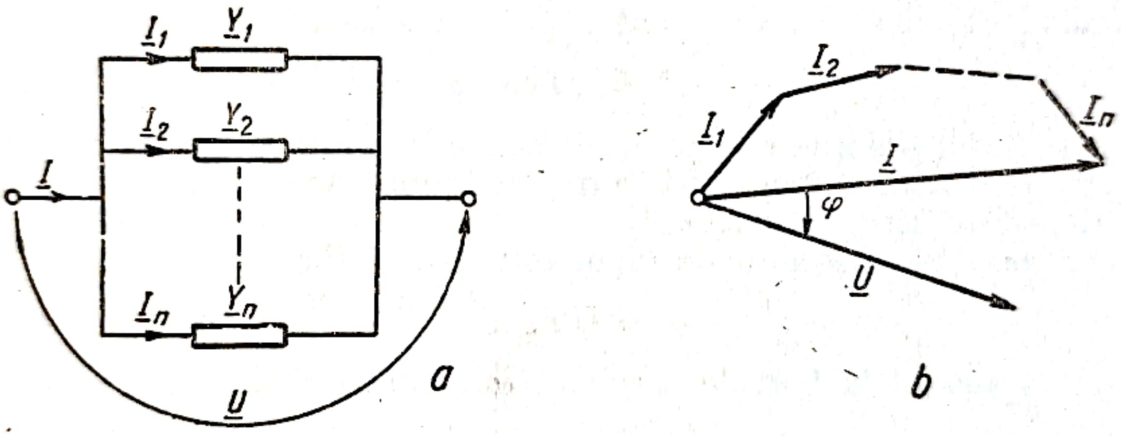


Fig. B.7.14

Exprimînd curenții din laturi pe baza legii lui Ohm, rezultă :

$$\underline{I} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k \cdot \underline{U}. \tag{7.22 b}$$

Ca urmare, admitanța echivalentă a circuitului-derivație are expresia :

$$\underline{Y} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k. \tag{7.22 c}$$

Conductanța echivalentă a circuitului-derivație este suma conductanțelor legate în derivație :

$$G_e = \sum_{k=1}^{n} G_k. \tag{7.22 d}$$

Scanned with OKEN Scanner

Susceptanța echivalentă a circuitului-derivație se exprimă analog:

$$B_e = \sum_{k=1}^{n} B_k. \qquad (7.22\ e)$$

Rezonanța de curent a circuitului-derivație se realizează pentru $B_e = 0$.

7.23. Puterea activă, reactivă și aparentă. Puterea instantanee absorbită de circuitul dipol reprezentat în figura B.7. 10 are expresia:

$$p = ui = \sqrt{2}\, U \sin(\omega t + \gamma) \cdot I \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma - \varphi). \qquad (7.23\ a)$$

Prin definiție, *puterea activă* absorbită de acest circuit este valoarea medie a puterii instantanee pe timp de o perioadă T:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt. \qquad (7.23\ b)$$

Efectuînd calculele, rezultă pentru puterea activă:

$$P = UI\cos\varphi, \qquad (7.23\ c)$$

unde U și I sînt valorile eficace ale tensiunii la borne, respectiv curentului, iar φ este defazajul curentului în urma tensiunii. Acest defazaj „în urmă" poate fi pozitiv sau negativ.

Puterea reactivă absorbită de dipol este prin definiție:

$$Q = UI\sin\varphi. \qquad (7.23\ d)$$

Puterea aparentă la bornele dipolului este prin definiție:

$$S = UI. \qquad (7.23\ e)$$

Mărimea $\cos\varphi$ se numește *factor de putere* al circuitului. Se observă relația:

$$\cos\varphi = \frac{P}{S}. \qquad (7.23\ f)$$

În sistemul de unități internațional se folosesc unitățile de măsură indicate mai jos:

P...1 watt (1W)

Q...1 volt-amper reactiv (1 var)

S...1 volt-amper (1VA)

7.24. Teoremele circuitelor în regim sinusoidal. Se demonstrează că, folosind metoda simbolică bazată pe reprezentarea în complex a funcțiunilor sinusoidale, se obțin teoreme analoge celor stabilite în curent continuu: teorema superpoziției, teorema generatorului echivalent etc.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru obținerea teoremelor respective se înlocuiesc valorile curenților și tensiunilor prin valorile complexe corespunzătoare, iar rezistența electrică se înlocuiește cu impedanța complexă.

7.25. Calculul puterii în metoda simbolică. Definind *puterea complexă* $\underline{S}$ prin:

$$\underline{S} = P + jQ \qquad (7.25\ a)$$

și notînd cu asterisc valorile complexe conjugate se obțin relațiile:

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* \quad (7.25\ b) \quad \text{și} \quad \underline{S}^* = \underline{U}^*\underline{I}. \qquad (7.25\ c)$$

Rezultă:

$$P = \mathrm{Re}\,[\underline{U}\ \underline{I}^*] \quad \text{și} \quad P = \mathrm{Re}\,[\underline{U}^*\underline{I}] \qquad (7.25\ d)$$

$$Q = \mathrm{Im}\,[\underline{U}\ \underline{I}^*] \quad \text{și} \quad Q = -\mathrm{Im}\,[\underline{U}^*\underline{I}]. \qquad (7.25\ e)$$

B. PROBLEME

7.1. O spiră dreptunghiulară avînd suprafața A (fig. 7.1), se rotește în jurul uneia din laturile sale cu o viteză constantă de n rot/min într-un cîmp magnetic uniform de inducție $B = \text{const}$.

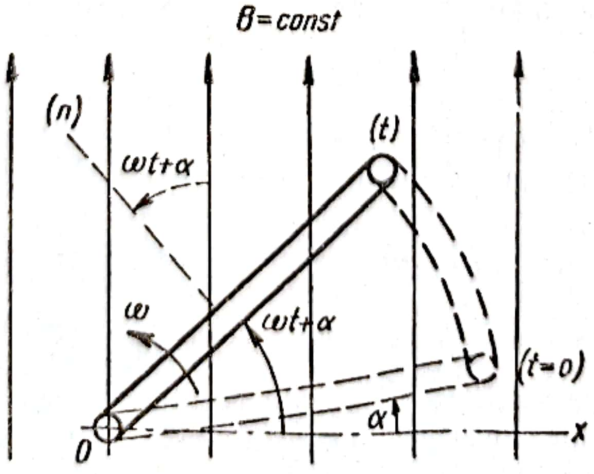


Fig. 7.1

Se cer:

a) expresia fluxului magnetic Φ care străbate spira;

b) tensiunea electromotoare indusă în spiră;

c) expresiile de la *a*) și *b*), dacă se alege ca origine de timp momentul în care spira este perpendiculară pe liniile cîmpului magnetic;

d) expresiile de la *a*) și *b*) și poziția spirei la momentul $t = 0$, dacă se alege ca origine de timp momentul în care valoarea instantanee a tensiunii electromotoare este egală cu valoarea eficace a tensiunii electromotoare.

Aplicație numerică: $A = 200$ cm²; $n = 150$ rot/min;
$B = 5\,000$ Gs.

7.2 (R). O spiră conductoare circulară fixă, de rază a (fig. 7.2) este plasată într-un cîmp magnetic uniform, a cărui inducție variază în timp după legea:

$$B = B_m \sin \omega t.$$

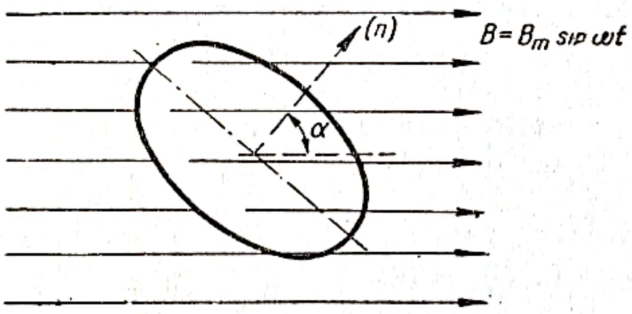


Fig. 7.2

Dacă normala la planul spirei face un unghi constant α cu liniile cîmpului magnetic, se cer:

a) expresia t.e.m. indusă în spiră;

b) expresia intensității curentului electric care apare în spiră dacă spira conductoare are o rezistență R;

c) sarcina electrică care străbate secțiunea spirei între momentele $t_1 = 0$ și $t_2 = \frac{T}{4}$;

d) puterea medie pe o perioadă T, disipată în spira conductoare prin efect Joule-Lenz. Să se reprezinte grafic variația acestei puteri cu poziția spirei dată de unghiul α.

Să se particularizeze expresiile de mai sus pentru cazul $\alpha = 0$.

Aplicație numerică: $a = 5$ cm; $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $f = 50$ Hz;

$$B_m = 0{,}8 \frac{Wb}{m^2}; \quad R = 2\Omega.$$

Scanned with OKEN Scanner

7.3. Un conductor rectiliniu și infinit de lung, parcurs de curentul sinusoidal $i = 10\sqrt{2}\sin \omega t$ (A) este situat perpendicular pe liniile unui cîmp magnetic uniform de inducție $B = 0{,}6$ Wb/m². Să se determine expresia valorii instantanee, valoarea medie pe o jumătate de perioadă și pe o perioadă a forței electrodinamice care se exercită asupra unității de lungime a conductorului.

7.4.(I). Două conductoare paralele, infinit de lungi, situate la o distanță a unul de altul, sînt parcurse respectiv de curenții sinusoidali:

$$i_1 = I_1\sqrt{2}\sin \omega t; \qquad i_2 = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi).$$

Să se determine valoarea medie pe o perioadă a forței electrodinamice care se exercită între cele două conductoare pe fiecare unitate de lungime a conductoarelor și să se reprezinte variația ei în raport cu unghiul de defazaj φ.

Aplicație numerică: $a = 20$ cm;

$$I_1 = 5 \text{ A}; \quad I_2 = 8 \text{ A}; \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

7.5. Inducția magnetică din întrefierul unui electromagnet a cărui înfășurare este alimentată cu un curent alternativ are valoarea instantanee:

$$B = B_m \sin \omega t.$$

Să se determine valoarea medie a forței portante care se exercită pe unitatea de suprafață a întrefierului.

Aplicație numerică: $B_m = 0{,}2$ Wb/m².

7.6. Se consideră mărimile cu variație sinusoidală în timp:

$$x_1 = 10 \sin (50\,t + 0{,}2);$$
$$-x_2 = 10 \sin (12\,t + 4);$$
$$-x_3 = 10 \sin (314\,t - 0{,}03);$$
$$-x_4 = 10 \sin (62{,}8\,t - 16),$$

în care fazele acestor mărimi sînt exprimate în radiani.

Se cere să se calculeze:

a) frecvențele acestor mărimi;

b) fazele inițiale în grade și să se transcrie mărimile de mai sus, astfel ca fazele inițiale exprimate în grade să fie în valoare absolută cuprinse în intervalul (0, 180°).

Scanned with OKEN Scanner

7.7. Să se rezolve problema 7.6 pentru mărimile:

$x_1 = 20 \sin (100\pi t + 448°)$;

$x_2 = -20 \sin (100\pi t - 1\,500°)$;

$x_3 = 20 \sin \left(\frac{100}{3}\pi t - 900°\right)$;

$x_4 = 20 \sin (400\ \pi t + 1\,395°)$.

7.8. Să se scrie expresia valorii instantanee a intensității unui curent sinusoidal, știind că perioada sa este T și față de originea de fază aleasă satisface condițiile:

$$(i)_{t=\frac{T}{4}} = I_1;\ (i)_{t=\frac{T}{2}} = I_2.$$

Aplicație numerică: $T = 20$ ms; $I_1 = 3$ A; $I_2 = 4$ A.

7.9. Doi curenți sinusoidali de aceeași frecvență sînt defazați între ei cu un unghi $\varphi = 45°$ corespunzător unui defazaj în timp de $t_0 = 2{,}5$ ms.

Se cer:

a) frecvența acestor curenți alternativi;

b) expresiile valorilor lor instantanee, alegînd unul din curenți ca origine de fază.

7.10. Intensitatea unui curent sinusoidal are valoarea instantanee:

$$i_1 = 5\sqrt{2} \sin \left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \text{(A)}.$$

Să se scrie expresia valorii instantanee a unui alt curent sinusoidal i_2 de aceeași frecvență, știind că acesta este defazat în timp în urma lui i_1 cu $t = \frac{5}{6}$ ms și că satisface condiția:

$$(i_2)_{t=\frac{T}{8}} = 3\sqrt{2}\ \text{(A)},$$

în care T este perioada curentului considerat.

7.11. Două generatoare de tensiune sinusoidală sînt conectate în serie și au tensiunile electromotoare e_1 și e_2 defazate respectiv cu $\psi_1 = \frac{\pi}{6}$ rad înainte și $\psi_2 = \frac{\pi}{3}$ în urma tensiunii electromotoare rezul-

Scanned with OKEN Scanner

tante $e = e_1 + e_2$. Știind că defazajul în timp între tensiunile electromotoare e_1 și e_2 este $t_{12} = 5$ ms, iar valoarea eficace a tensiunii electromotoare e este $E = 400$ V, să se scrie expresiile valorilor instantanee ale tensiunilor electromotoare e_1, e_2, și e.

7.12. Se consideră mărimile sinusoidale:

$$u = U\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)\text{ (V)};$$

$$i = I\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)\text{ (A)}.$$

Să se scrie valorile aceloraşi mărimi dacă:

a) se decalează originea de timp cu $t_0 = \frac{T}{8}$ s în urma originei de timp date;

b) se decalează originea de fază cu $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ rad înaintea originei de fază date;

c) se alege originea de fază, astfel încît faza inițială a tensiunii u să fie nulă;

d) se alege originea de fază, astfel încît faza inițială a curentului să fie nulă.

Să se reprezinte grafic variația acestor mărimi în timp și să se indice originea de timp sau de fază pe aceeași diagramă, în fiecare din cazurile de mai sus.

7.13. Într-un nod al unei rețele, figura 7.13, se cunosc:

$$i_1 = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha_1);$$
$$i_2 = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha_2).$$

Se scrie expresia valorii instantanee a curentului i_3.

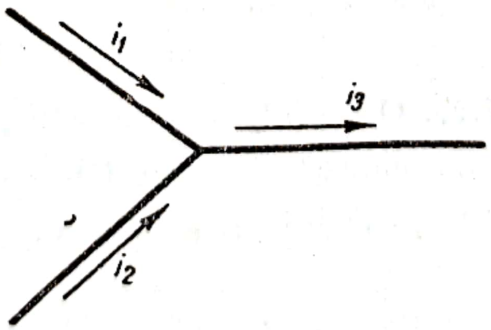


Fig. 7.13

Aplicație numerică: $I_1 = 50$ A; $I_2 = 20$ A;

$$\alpha_1 = \frac{5\pi}{6};\quad \alpha_2 = \frac{\pi}{6}.$$

Scanned with OKEN Scanner

7.14. Într-un nod al unei rețele, figura 7.14, se cunosc :

$$i_1 = I_1 \sqrt{2} \sin (\omega t + \alpha_1);$$

$$i_2 = I_2 \sqrt{2} \sin (\omega t + \alpha_2).$$

Se cere să se determine expresia valorii instantanee a curentului i_3, astfel încît curentul i să fie nul la orice moment.

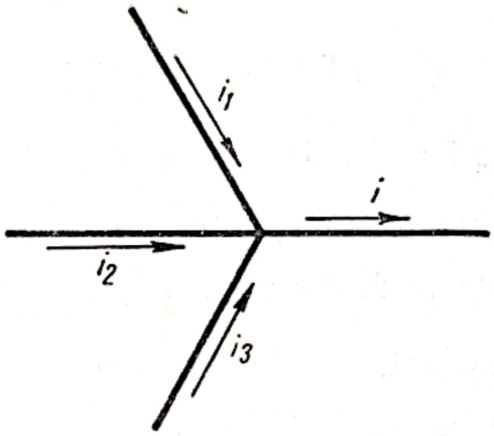


Fig. 7.14

Aplicație numerică : $I_1 = 74$ A; $\alpha_1 = 45°$;

$I_2 = 60$ A; $\alpha_2 = 150°$;

7.15. O rezistență de valoare $R = 10\ \Omega$ străbătută de un curent sinusoidal absoarbe o putere $P = 160$ W. Se cer valorile maxime ale intensității curentului care străbate rezistența și a tensiunii la bornele ei.

7.16. Un rezistor (receptor pur rezistiv) are o putere nominală $P_1 = 880$ W, la o tensiune nominală eficace de $U_n = 220$ V.

Să se determine valoarea maximă a curentului sinusoidal care va străbate acest receptor dacă i se aplică o tensiune sinusoidală de valoare eficace $U = 110$ V.

7.17. O bobină are o rezistență $R = 2{,}4\ \Omega$, o inductanță $L = \frac{3{,}2}{\pi}$ mH și este alimentată cu o tensiune sinusoidală de frecvență $f = 50$ Hz și valoare eficace $U = 80$ mV.

Se cer :

a) impedanța complexă $\underline{Z}$ a bobinei;

b) expresia valorii instantanee a curentului care străbate bobina, considerînd nulă faza inițială a tensiunii;

c) puterea activă, reactivă și aparentă;

d) factorul de putere al bobinei.

Scanned with OKEN Scanner

7.18. Un circuit format dintr-o rezistență $R = 8\Omega$ în serie cu o bobină de reactanță inductivă de valoare $X_L = 6\Omega$ este alimentat cu o tensiune alternativă sinusoidală avînd valoarea eficace $U = 220$ V.

Se cer:

a) valoarea eficace I a curentului din circuit și defazajul acestuia în urma tensiunii aplicate;

b) valorile eficace ale tensiunilor U_R și U_L la bornele rezistenței, respectiv la bornele inductanței, și defazajul lor ψ_R și ψ_L față de tensiunea aplicată;

c) diagrama fazorilor;

d) puterea activă, reactivă și aparentă absorbite de circuit;

e) factorul de putere al circuitului.

7.19. O bobină este alimentată cu o tensiune sinusoidală de frecvență $f = 50$ Hz și valoare eficace $U = 120$ V. Ampermetrul și wattmetrul montate în circuitul bobinei, după cum se arată în figura 7.19, indică respectiv un curent $I = 4$ A și o putere activă $P = 160$ W.

Se cere să se determine rezistența R și inductanța L a bobinei.

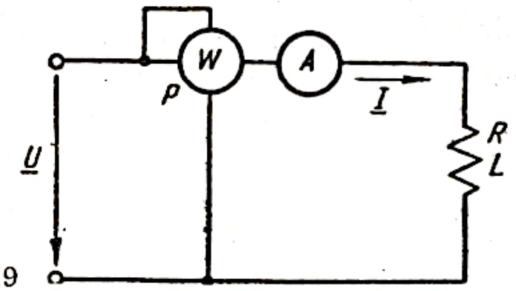


Fig. 7.19

7.20. Un circuit format dintr-o rezistență $R = 30\ \Omega$ și o capacitate $C = \frac{250}{\pi}\ \mu$F conectate în serie este alimentat cu o tensiune sinusoidală de frecvență $f = 50$ Hz și valoare eficace $U = 120$ V.

Se cer:

a) valoarea eficace I a curentului din circuit și defazajul acestuia față de tensiunea aplicată;

b) valorile eficace ale tensiunilor U_R și U_c la bornele rezistenței, respectiv capacității, și defazajele lor ψ_R și ψ_c față de tensiunea aplicată;

c) diagrama fazorilor;

d) puterea activă, reactivă și aparentă;

e) factorul de putere al circuitului.

7.21. (I). Un condensator cu pierderi alimentat cu o tensiune alternativă sinusoidală de frecvență $f = 50$ Hz și valoare eficace $U = 400$ V absoarbe un curent de valoare eficace $I = 8$ A și o putere activă $P = 1$ W.

Scanned with OKEN Scanner

Se cer să se determine circuitele echivalente formate dintr-o rezistență R_s și o capacitate C_s montate în serie sau dintr-o rezistență R_p și o capacitate C_p montate în paralel și valorile acestor parametri.

7.22. (I). Un receptor de reactanță neglijabilă avînd puterea nominală $P_n = 2{,}4$ kW și tensiunea nominală $U_n = 120$ V, trebuie alimentat de la o rețea de curent alternativ de frecvență $f = 50$ Hz și tensiune de valoare eficace $U = 220$ V. În acest scop se montează în serie cu receptorul un element de impedanță $\underline{Z}$ (fig. 7.22). Se cere să se determine valoarea impedanței $\underline{Z}$, astfel încît la bornele receptorului să se obțină tensiunea nominală, în următoarele ipoteze:

a) impedanța $\underline{Z}$ este pur rezistivă $\underline{Z} = R$;

b) impedanța $\underline{Z}$ este pur inductivă $\underline{Z} = jX_L$; în acest caz să se determine și valoarea inductanței L corespunzătoare;

c) impedanța $\underline{Z}$ este pur capacitivă $\underline{Z} = -\mathrm{j}X_c$; în acest caz se cere să se determine valoarea capacității C corespunzătoare;

d) elementul de impedanță $\underline{Z}$ este o bobină de rezistență R și reactanță inductivă X_L; în acest caz se cere să se determine valorile rezistenței R și a inductanței corespunzătoare L, astfel încît factorul de putere al întregului circuit să fie $\cos\varphi = 0{,}8$;

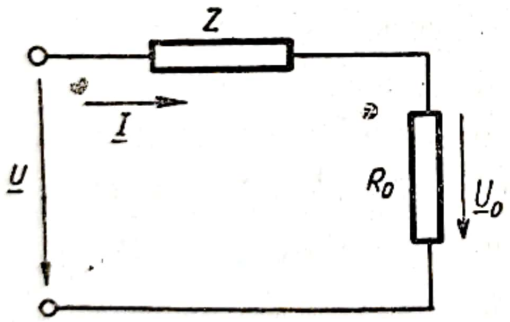


Fig. 7.22

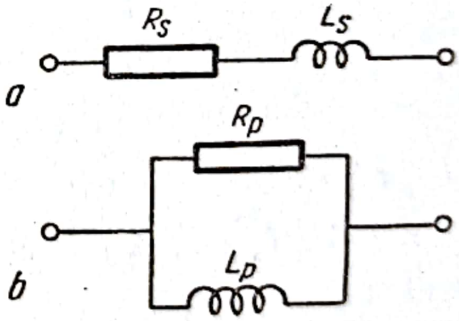


Fig. 7.23

e) elementul de impedanță $\underline{Z}$ este format dintr-o rezistență R legată în serie cu un condensator de reactanță capacitivă X_c; în acest caz se cere să se determine valorile rezistenței R și a capacității C, astfel încît factorul de putere al întregului circuit să fie de asemenea $\cos\varphi = 0{,}8$.

7.23. Să se determine relațiile existente între parametrii unui circuit-serie (fig. 7.23, *a*) de rezistența R_s și inductanță L_s și parametrii unui circuit derivație (fig. 7.23, *b*) echivalent, format dintr-o rezistență R_p și o inductanță L_p. În ce ipoteză $L_s = L_p$?

Scanned with OKEN Scanner

7.24. Să se determine relațiile existente între elementele unui circuit-serie (fig. 7.24, *a*), format dintr-un rezistor de rezistență R_s și cu condensator ideal C_s și elementele circuitului său echivalent din figura 7.24, *b*, format dintr-un rezistor de rezistență R_p conectată în paralel cu un condensator ideal de capacitate C_p. În ce ipoteză $C_s = C_p$?

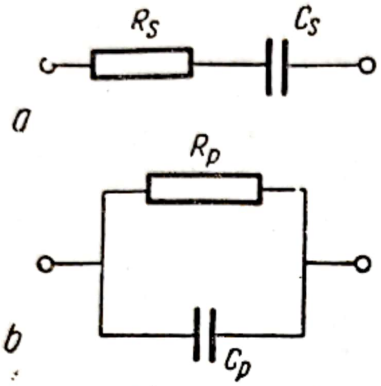


Fig. 7.24

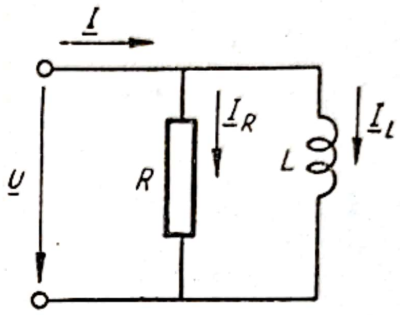


Fig. 7.25

7.25(R). La bornele unui circuit format dintr-o bobină ideală de inductanță $L = \frac{400}{\pi}$ mH în paralel cu o rezistență $R = 30\ \Omega$ (fig. 7.25) este aplicată o tensiune sinusoidală de frecvență $f = 50$ Hz și valoare eficace $U = 120$ V.

Să se determine:

a) valorile eficace I, I_L, I_R ale curenților din laturile circuitului și defazajele lor față de tensiunea aplicată;

b) diagrama fazorilor curenților $\underline{I}$, $\underline{I}_L$, $\underline{I}_R$;

c) puterile activă, reactivă și aparentă absorbite de circuit;

d) factorul de putere al circuitului;

e) cît va fi variația relativă $\frac{\Delta I}{I}$ a curentului total absorbit, dacă inductanța L a circuitului are o creștere relativă $\frac{\Delta L}{L} = 5\%$?

7.26. Un circuit format dintr-un condensator de capacitate $C = \frac{500}{3\pi}\ \mu F$ în paralel cu un rezistor de rezistență $R = 80\Omega$ (fig. 7.26) este alimentat la o tensiune sinusoidală de frecvență $f = 50$ Hz și valoare eficace $U = 450$ V.

Să se determine:

a) valorile eficace I, I_c, I_R ale curenților din laturile circuitului și defazajele lor față de tensiunea aplicată;

Scanned with OKEN Scanner

b) diagrama fazorilor curenților $\underline{I}$, $\underline{I}_R$, $\underline{I}_c$;
c) puterile activă, reactivă și aparentă;
d) factorul de putere al circuitului;
e) cît va fi variația relativă $\frac{\Delta I}{I}$ a curentului total absorbit, dacă capacitatea C are o creștere relativă $\frac{\Delta C}{C} = 5\%$?

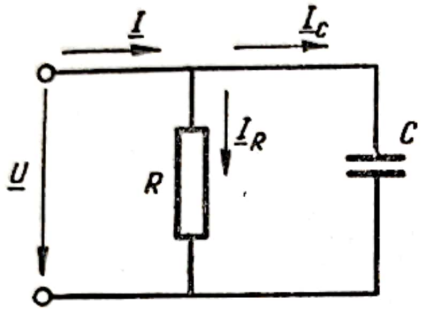


Fig. 7.26

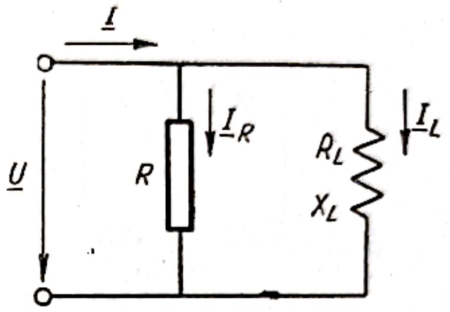


Fig. 7.27

7.27. Un circuit format dintr-un rezistor de rezistență $R = 40\Omega$, conectat în paralel cu o bobină, avînd $R_L = 5\Omega$ și $X_L = 15\Omega$ (fig. 7.27), este alimentat cu o tensiune sinusoidală de valoare eficace $U = 220$ V.

Se cer:
a) valorile eficace I, I_R, I_L, ale curenților din laturile circuitului și defazajele lor față de tensiunea aplicată;
b) diagrama fazorilor curenților $\underline{I}$, $\underline{I}_R$, $\underline{I}_L$;
c) puterea activă, reactivă și aparentă;
d) factorul de putere al circuitului;
e) variația relativă $\frac{\Delta R}{R}$ a rezistenței R, pentru ca să avem pentru curentul I o creștere relativă $\frac{\Delta I}{I} = 5\%$?

7.28. Un circuit format dintr-o rezistență $R = 30\Omega$, o inductanță $L = \frac{600}{\pi}$ mH și o capacitate $C = \frac{500}{\pi}$ μF este alimentat la o tensiune sinusoidală de frecvență $f = 50$ Hz și valoare eficace $U = 200$ V (fig. 7.28).

Să se determine:
a) valoarea eficace a curentului I din circuit și defazajul său față de tensiunea aplicată;

Scanned with OKEN Scanner

b) valorile eficace U_R, U_L, U_C ale tensiunilor la bornele elementelor de rezistență R, inductanță L și capacitate C și defazajele lor față de tensiunea aplicată U;

c) diagrama fazorilor tensiunilor, $\underline{U}$, $\underline{U}_R$, $\underline{U}_L$, $\underline{U}_C$ și curentului $\underline{I}$;

d) puterile activă, reactivă și aparentă absorbite de circuit;

e) factorul de putere al circuitului.

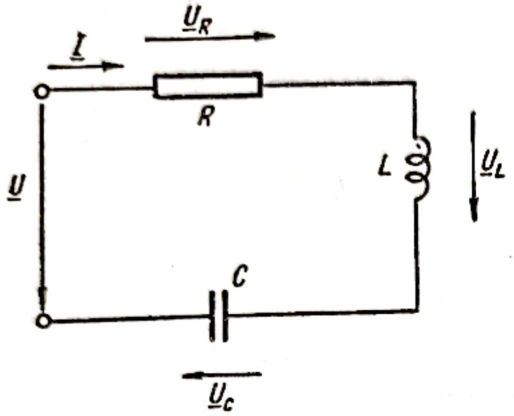


Fig. 7.28

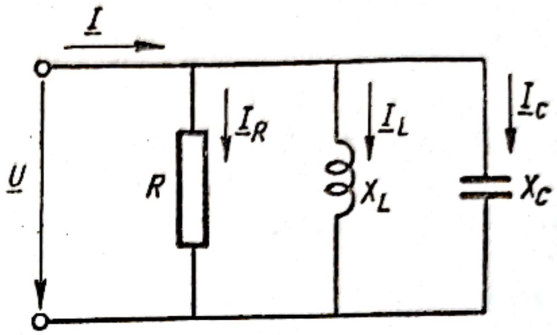


Fig. 7.29

7.29. Un circuit format dintr-un rezistor $R = 20\Omega$, o bobină de reactanță inductivă $X_L = 40\Omega$ și un condensator de reactanță capacitivă $X_C = 30\Omega$ conectate în derivație este alimentat de o tensiune alternativă sinusoidală de valoare eficace $U = 120$ V (fig. 7.29).

Se cere să se determine:

a) valorile eficace I_R, I_L, I_C, I ale curenților și defazajele lor față de tensiunea aplicată $\underline{U}$;

b) diagrama fazorilor curenților $\underline{I}_R$, $\underline{I}_L$, $\underline{I}_C$, $\underline{I}$ și tensiunii $\underline{U}$;

c) puterile activă, reactivă și aparentă absorbite de circuit;

d) factorul de putere al circuitului.

7.30. Se consideră circuitele din figura 7.30, *a*, *b*, *c* pentru care $R = 40\ \Omega$, $L = \frac{200}{\pi}$ mH, $C = \frac{200}{\pi}$ μF. Tensiunea de alimentare este sinusoidală, avînd frecvența $f = 50$ Hz și valoarea eficace $U = 100$ V.

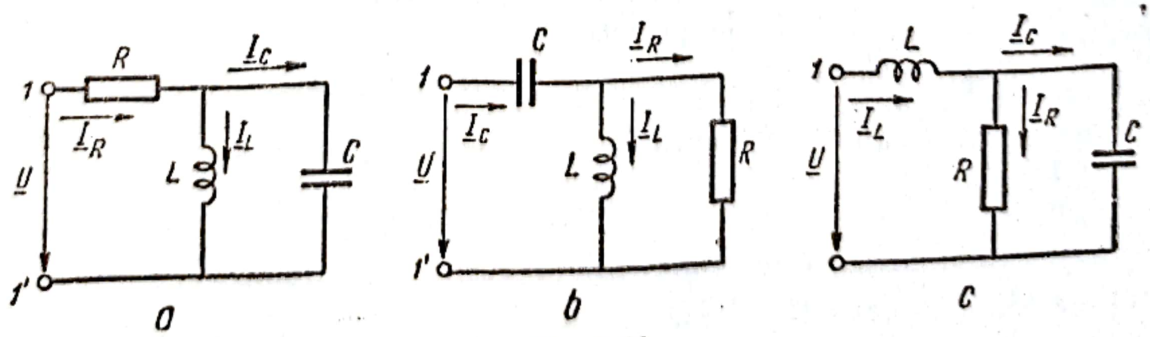


Fig. 7.30

Scanned with OKEN Scanner

Pentru fiecare din circuitele considerate se cer:
a) impedanțele echivalente la bornele *1—1'*;
b) valorile eficace I_R, I_L, I_C ale curenților și defazajele lor față de tensiunea aplicată $\underline{U}$;
c) diagramele fazorilor $\underline{I}_R$, $\underline{I}_L$, $\underline{I}_C$, $\underline{I}$, $\underline{U}$;
d) bilanțul puterilor;
e) factorii de putere.

7.31(I). Circuitul din figura 7.31 este alimentat la bornele AB de o tensiune sinusoidală de valoare eficace U și pulsație ω. Să se stabilească relația ce trebuie să existe între capacitatea C și inductivitatea L, astfel ca valoarea curentului din impedanța $\underline{Z}$ să nu depindă de mărimea acesteia.

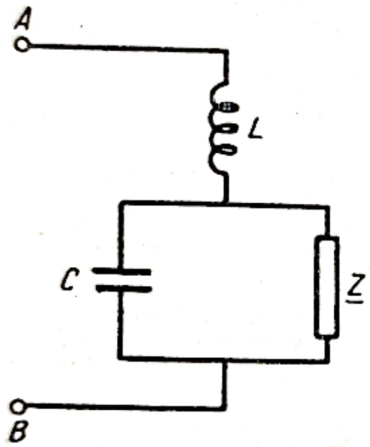


Fig. 7.31

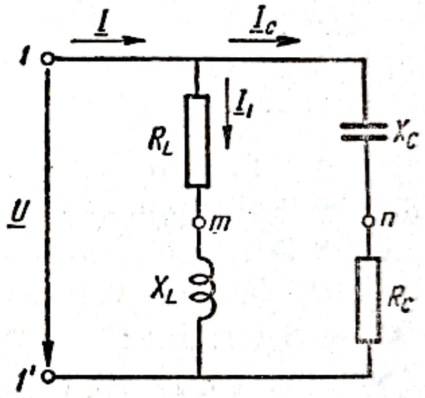


Fig. 7.32

7.32. Se consideră circuitul-derivație din figura 7.32, în care $R_L = 8\Omega$, $X_L = 6\Omega$, $R_C = 3\Omega$, $X_C = 4\Omega$, căruia i se aplică o tensiune sinusoidală avînd valoarea eficace $U = 200$ V.

Se cer:
a) impedanța echivalentă a circuitului între bornele 1—1';
b) valorile eficace ale curenților I_L, I_C și a tensiunii U_{mn} între bornele *m* și *n* și defazajele lor față de tensiunea aplicată $\underline{U}$;
c) diagrama fazorilor de la punctul *b*;
d) bilanțul puterilor;
e) factorul de putere al circuitului;
f) impedanța circuitului între bornele *m* și *n*, dacă se scurtcircuitează bornele *1—1'*.

7.33. Se consideră circuitul cu conexiune mixtă din figura 7.33, în care $R_1 = 4\Omega$, $L_1 = \frac{30}{\pi}$ mH, $R_2 = 12\Omega$, $C_2 = \frac{2\,500}{\pi}$ μF,

$L_3 = \frac{40}{\pi}$ mH, $C_3 = \frac{1\,000}{\pi}$ μF, care este alimentat la bornele *1 — 1'* cu o tensiune alternativă sinusoidală de frecvență $f = 50$ Hz și având valoarea eficace $U = 220$ V.

Se cer:

a) impedanța circuitului la bornele *1—1'*;

b) valorile eficace ale curenților I_1, I_2, I_3 și tensiunilor U_{pq}, U_{mn} și defazajele lor față de tensiunea aplicată $\underline{U}$;

c) diagrama fazorilor de la punctul *b*;

d) bilanțul puterilor;

e) factorul de putere al circuitului;

f) impedanța circuitului între bornele *m* și *n*, când se scurtcircuitează bornele *1—1'*.

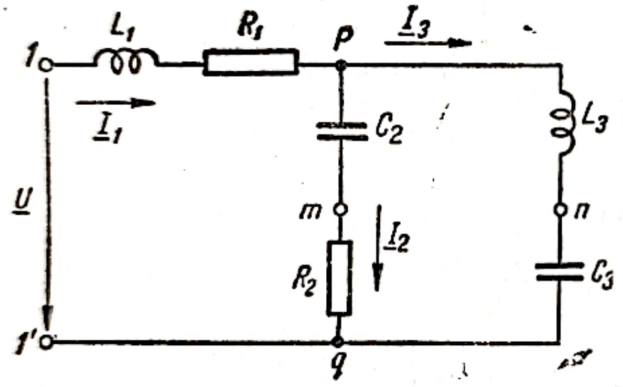


Fig. 7.33

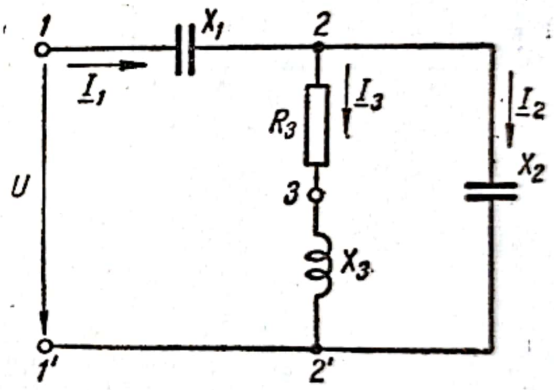


Fig. 7.34

7.34. Se consideră circuitul din figura 7.34 în care se cunosc $X_1 = 12\Omega$, $X_2 = 30\Omega$, $R_3 = 40\Omega$, $X_3 = 30\Omega$ și valoarea eficace a curentului $I_3 = 4$A.

Se cer:

a) impedanța circuitului între bornele *1—1'*;

b) valorile eficace U, I_1, I_2 ale tensiunii și curenților și defazajul acestora față de curentul $\underline{I}_3$;

c) diagrama fazorilor mărimilor de la punctul *b*;

d) bilanțul puterilor;

e) factorul de putere al circuitului;

f) impedanța circuitului între bornele *1* și *3* când se scurtcircuitează bornele *1—1'*.

Scanned with OKEN Scanner

7.35. Se consideră circuitul din figura 7.35, în care $R = 10\Omega$, $C = \frac{1\,000}{\pi}\,\mu F$, căruia i se aplică o tensiune sinusoidală de frecvență $f = 50$ Hz și valoarea eficace $U = 100$ V.

Se cer:

a) impedanța circuitului între bornele *1—1'*;

b) valorile eficace ale curenților din laturile circuitului și defazajele lor față de tensiunea aplicată $\underline{U}$;

c) diagrama fazorilor mărimilor de la punctul *b*;

d) factorul de putere al circuitului.

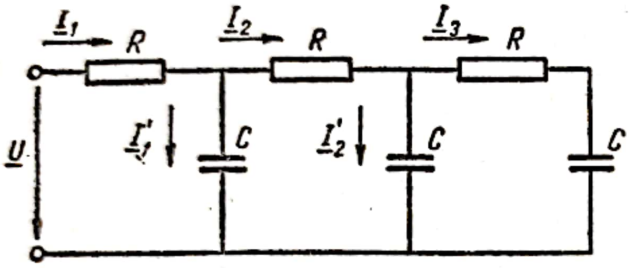


Fig. 7.35

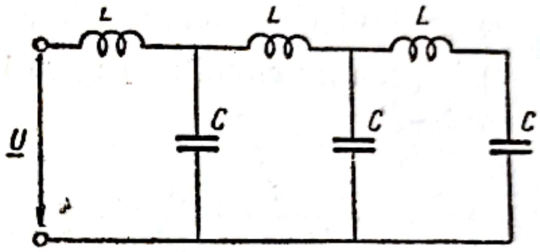


Fig. 7.36

7.36. Să se rezolve problema **7.35** pentru circuitul din figura 7.36, în care $L = \frac{100}{\pi}$ mH, $C = \frac{1\,000}{\pi}\,\mu F$, $f = 50$ Hz, $U = 100$ V.

7.37(I). Se dă lanțul de cuadripoli identici din figura 7.37, alcătuiți din impedanțele $\underline{Z}_1$ și $\underline{Z}_2$ cunoscute. Care este valoarea impedanței $\underline{Z}_s$ conectate la bornele de ieșire *2—2'* ale lanțului, dacă impedanța măsurată la bornele *1—1'* nu depinde de numărul cuadripolilor din lanț.

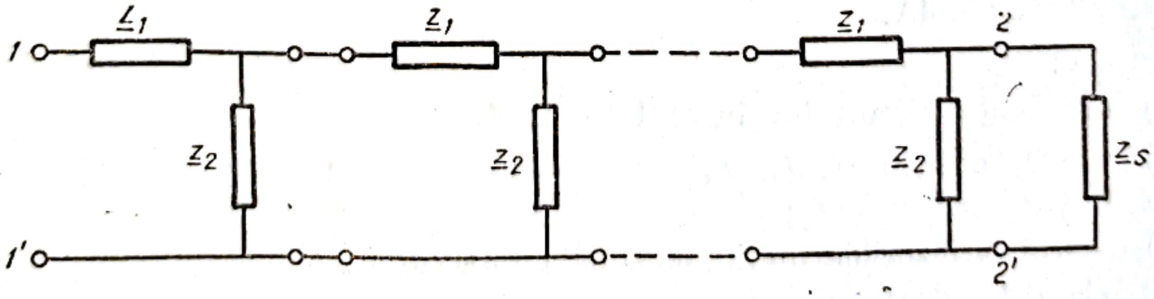


Fig. 7.37

7.38. Se consideră puntea de impedanțe din figura 7.38, în care $\underline{Z}_1 = 5\Omega$, $\underline{Z}_2 = 3 + j\ 4(\Omega)$, $\underline{Z}_4 = 8\Omega$.

Scanned with OKEN Scanner

Se cere să se determine valoarea impedanței $\underline{Z}_3$, astfel încît tensiunea între bornele 2—2′ să fie nulă.

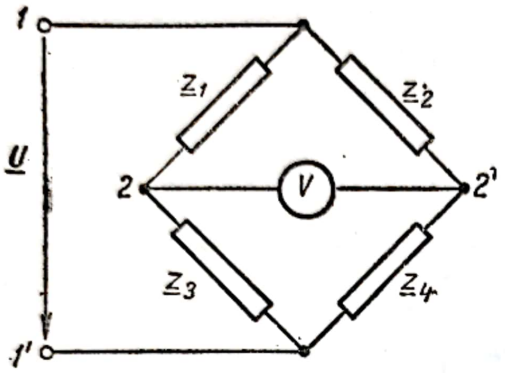


Fig. 7.38

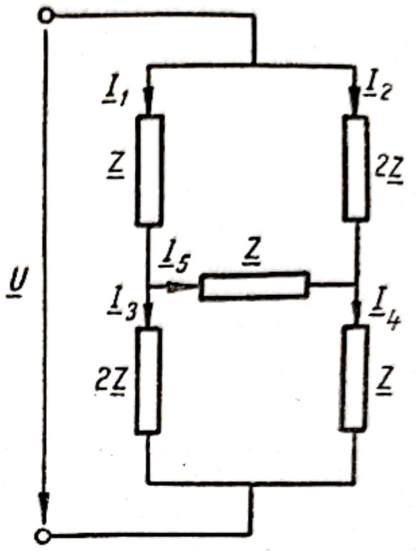


Fig. 7.39

7.39. Să se calculeze valoarea eficace și faza tensiunii aplicate la bornele din figura 7.39, cunoscînd valoarea impedanței $\underline{Z}$ și a curentului $\underline{I}_5$ considerat origine de fază.

7.40. Se consideră cuadripolul din figura 7.40, în care $X_L = 2\Omega$, $X_C = 5\Omega$. Să se determine impedanța de sarcină $\underline{Z}$, astfel încît tensiunea sinusoidală aplicată la intrarea u să fie în fază cu curentul de intrare i_1. În acest caz să se determine valorile eficace ale curenților I_1 și I_2 și defazajul lor față de tensiunea aplicată, considerînd că tensiunea aplicată are valoarea eficace $U = 100$ V.

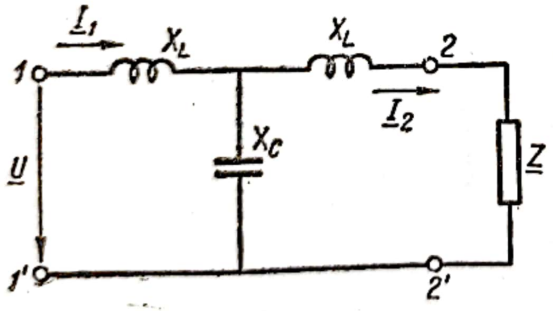


Fig. 7.40

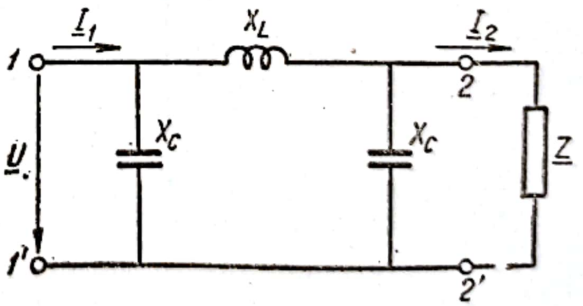


Fig. 7.41

7.41. Să se rezolve problema precedentă pentru cuadripolul din figura 7.41.

7.42 (I). O bobină avînd rezistența R_L și inductanța L este alimentată la o tensiune sinusoidală de pulsație ω și valoare eficace U (fig. 7.42).

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine valoarea capacității C care trebuie montată în paralel cu bobina, pentru ca factorul de putere al circuitului să aibă o valoare dată $\cos \varphi$. Să se determine valoarea eficace a curentului care alimentează circuitul înainte și după introducerea capacității C.

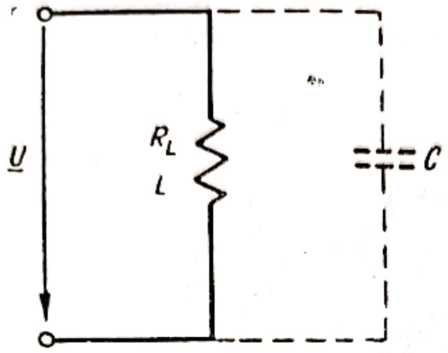


Fig. 7.42

Aplicație numerică: $R_L = 30\Omega$; $L = \frac{200}{\pi}$ mH; $\omega = 100\pi$ rad/s; $U = 220$ V; $\cos\varphi = 0{,}9$.

7.43. Un receptor inductiv avînd puterea nominală P_n la tensiunea nominală U_n și factorul de putere $\cos\varphi$ este montat în circuitul reprezentat în figura 7.43, în care valoarea rezistenței r este dată. Circuitul este alimentat la o tensiune sinusoidală de frecvență f și valoarea eficace U.

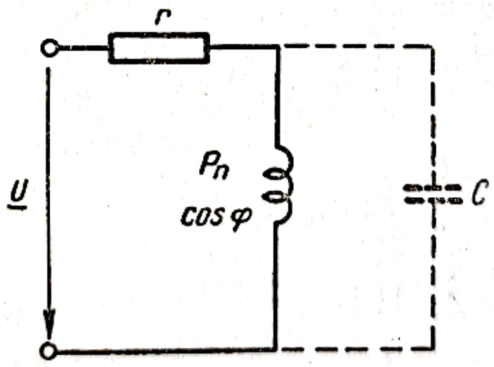


Fig. 7.43

Să se determine:

a) valoarea capacității C montate în paralel pe receptorul inductiv, pentru ca factorul de putere să fie ameliorat la o valoare $\cos\varphi' > \cos\varphi$;

b) pierderile de putere activă în rezistența r, înainte și după introducerea capacității C.

Aplicație numerică: $P_n = 4$ kW; $U_n = 220$ V; $\cos\varphi = 0{,}7$; $r = 1\Omega$; $U = 220$ V; $f = 50$ Hz.

Scanned with OKEN Scanner

7.44 (I). Un receptor inductiv avînd puterea nominală $P_n = 10$ kW la tensiunea nominală $U_n = 220$ V și factorul de putere $\cos\varphi = 0{,}6$ este alimentat printr-un cablu, avînd rezistența $r = 0{,}2\ \Omega$ și reactanța inductivă $x = 0{,}5\ \Omega$, de la o sursă de tensiune sinusoidală de frecvență $f = 50$ Hz.

Să se determine:

a) valoarea eficace a tensiunii sursei de alimentare, pentru ca receptorului să i se aplice la borne tensiunea nominală;

b) valoarea capacității C care trebuie montată la bornele receptorului, pentru ca factorul de putere al receptorului să devină $\cos\varphi' = 0{,}9$;

c) valoarea eficace a curentului în cablul de alimentare înainte și după introducerea capacității.

7.45. Într-un atelier mecanic se află motoarele specificate mai jos prin puterea lor nominală și factorul lor de putere:

$$P_1 = 1\text{kW};\quad \cos\varphi_1 = 0{,}6;$$
$$P_2 = 4\text{kW};\quad \cos\varphi_2 = 0{,}7;$$
$$P_3 = 5\ \text{kW};\quad \cos\varphi_3 = 0{,}76;$$
$$P_4 = 10\ \text{kW};\quad \cos\varphi_4 = 0{,}8.$$

Toate aceste motoare sînt alimentate în paralel sub o tensiune sinusoidală avînd frecvența $f = 50$ Hz și valoarea eficace $U = 220$ V.

Să se determine:

a) valorile eficace ale curenților absorbiți de motoare și ale curentului total;

b) factorul de putere al instalației;

c) valoarea capacității bateriei de condensatoare care trebuie montată în paralel cu motoarele, pentru ca factorul de putere al întregii instalații să fie ameliorat la valoarea $\cos\varphi = 0{,}9$;

d) valoarea eficace a curentului absorbit de instalație după introducerea bateriei de condensatoare.

7.46. Un circuit-serie avînd o rezistență $R = 10\Omega$, o inductanță $L = \frac{2}{\pi}$ H și o capacitate $C = \frac{50}{\pi}\ \mu$F este alimentat cu o tensiune alternativă de valoare eficace $U = 120$ V (fig. 7.46).

Să se determine:

a) frecvența de rezonanță f_0;

b) valorile eficace ale curentului I_0, tensiunilor U_{R0}, U_{L0}, U_{C0} la rezonanță și să se traseze diagrama fazorilor respectivi;

Scanned with OKEN Scanner

c) pentru o creștere a frecvenței cu 5% față de frecvența de rezonanță, să se determine variațiile relative ale valorii eficace ale curentului I și tensiunilor U_R, U_L, U_C față de valorile corespunzătoare la rezonanță;

d) să se reprezinte grafic curbele de variație ale valorilor eficace ale curentului I, defazajului său față de tensiunea $\underline{U}$, tensiunilor U_L și U_C, valoarea impedanței Z și reactanței X a circuitului în funcție de pulsație.

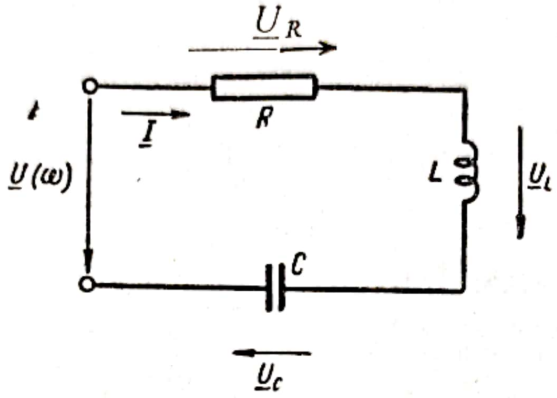


Fig. 7.46

7.47. Un circuit-serie R, L, C are $R = 5\Omega$, $L = \frac{0{,}5}{\pi}$ H, capacitatea C variabilă și este alimentat cu o tensiune sinusoidală de frecvență $f = 50$ Hz și valoare eficace $U = 100$ V (fig. 7.47).

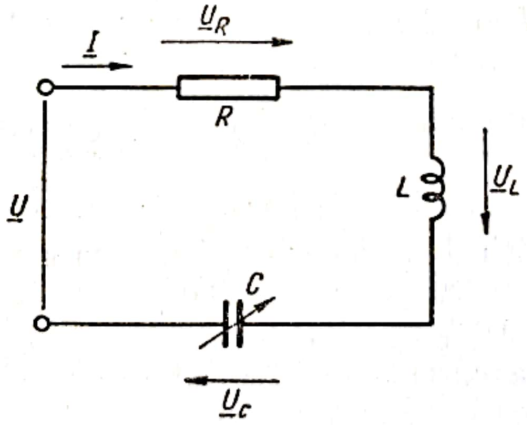


Fig. 7.47

Să se determine:

a) valoarea C_0 a capacității pentru care circuitul ajunge la rezonanță;

b) valorile eficace I_0, U_{R0}, U_{L0} și U_{C0} la rezonanță;

c) variațiile relative ale valorilor eficace ale curentului I și tensiunilor U_R, U_L, U_C față de valorile corespunzătoare la rezonanță pentru o creștere relativă de 5% a capacității față de valoarea ei la rezonanță;

d) curbele de variație ale valorilor eficace ale curentului I, defazajului său față de tensiunea $\underline{U}$, tensiunilor U_L, U_C, impedanței Z și reactanței X în raport cu capacitatea C.

Scanned with OKEN Scanner

7.48. Un circuit-derivație avînd într-o ramură o bobină de reactanță $R_L = 4\Omega$, $L = \frac{5}{\pi}$ H, iar în cealaltă ramură un condensator avînd $C = \frac{125}{16\pi}$ μF, este alimentat cu o tensiune alternativă de valoare eficace $U = 20$ V (fig. 7.48).

Să se determine:

a) frecvența de rezonanță f_0;

b) valorile eficace ale curenților I, I_L, I_C la rezonanță;

c) să se reprezinte grafic curbele de variație ale intensităților curenților I, I_L, I_C, ale defazajului φ al curentului I față de tensiunea u și ale impedanței Z în funcție de pulsația ω.

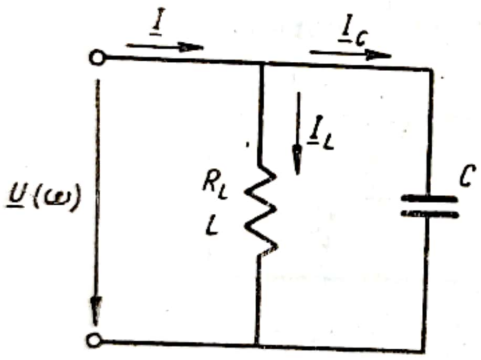


Fig. 7.48

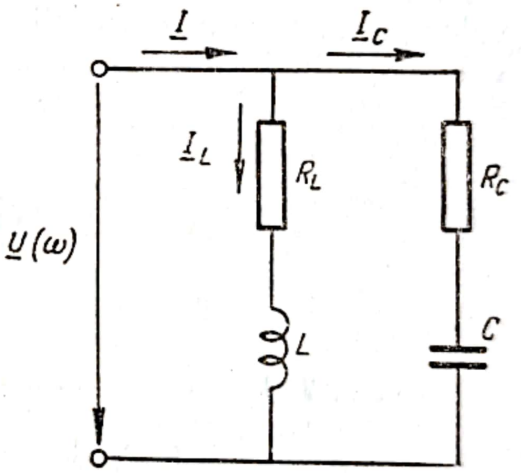


Fig. 7.49

7.49. Se consideră circuitul-derivație din figura 7.49, în care $R_L = 2\Omega$, $L = \frac{8}{\pi}$ H, tensiunea de alimentare fiind sinusoidală, de frecvență $f = 100$ Hz și valoare eficace $U = 40$ V.

Să se determine:

a) valoarea C_0 a capacității pentru care circuitul intră în rezonanță;

b) valorile eficace ale curenților I, I_L, I_C la rezonanță și să se traseze diagrama fazorilor respectivi;

c) să se reprezinte grafic curbele de variație ale valorilor eficace ale curenților I, I_L, I_C, ale defazajului φ al curentului I față de tensiunea $\underline{U}$ și ale impedanței Z în raport cu pulsația ω.

Scanned with OKEN Scanner

7.50. Se consideră circuitul-derivație din figura 7.47, în care $R_L = 10\Omega$, $R_c = 20\Omega$, $L = \frac{30}{\pi}$ mH, $C = \frac{125}{\pi}$ μF și care este alimentat cu o tensiune sinusoidală avînd valoarea eficace $U = 120$ V.

Să se calculeze:

a) frecvența de rezonanță f_0;

b) valorile eficace ale curenților I, I_L, I_C la rezonanță și să se traseze diagrama fazorilor.

7.51. Aplicînd la bornele circuitului din figura 7.51 o tensiune sinusoidală de frecvență $f = 50$ Hz, indicația ampermetrului este 10 A, iar indicația voltmetrului 100 V. Știind că $R = R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 10\Omega$, să se calculeze:

a) valorile eficace și fazele curenților i_1 și i_2 din laturile în derivație, considerînd tensiunea la borne de fază nulă;

b) valoarea eficace a tensiunii la bornele circuitului;

c) valorile inductivității L și a capacității C.

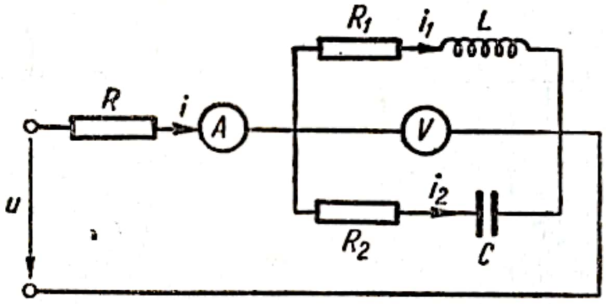


Fig. 7.51

7.52. Se consideră circuitele din figura 7.52 *a*, *b*, *c*. Să se reprezinte pentru aceste circuite curbele de variație ale reactanței în raport cu frecvența, determinîndu-se frecvențele de rezonanță.

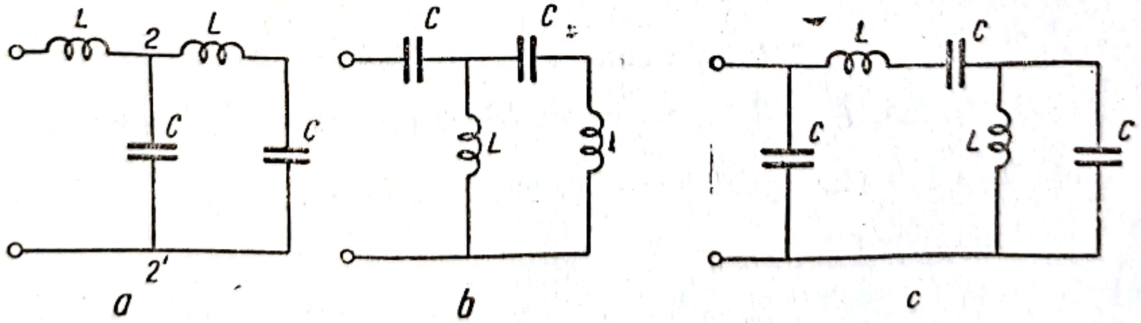


Fig. 7.52

7.53. Se consideră circuitele cuplate inductiv din figura 7.53, în care $R_1 = 4\Omega$, $L_1 = 63{,}5$ mH, $R_2 = 2\Omega$, $L_2 = 38{,}2$ mH, $M = 30$ mH, $C_2 = 64$ μF, tensiunea de alimentare fiind sinusoidală, de frecvență $f = 50$ Hz și valoarea eficace $U_1 = 100$ V.

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine:

a) schemele echivalente serie, fără cuplaje magnetice, pentru primar și secundar;

b) valorile eficace ale curenților I_1 și I_2, respectiv din primar și secundar, și să se traseze diagrama fazorilor;

c) bilanțul puterilor.

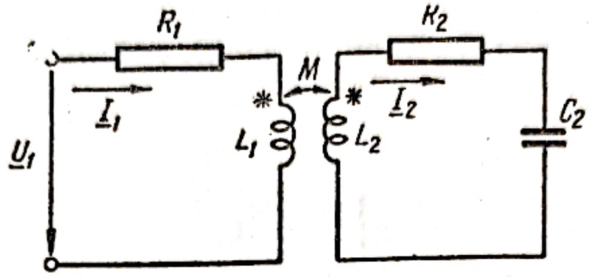


Fig. 7.53

7.54. Se consideră circuitul din figura 7.54, în care $R = 60\Omega$, $L_1 = \frac{360}{\pi}$ mH, $L_2 = \frac{160}{\pi}$ mH, $M = \frac{140}{\pi}$ mH, tensiunea aplicată fiind alternativă sinusoidală, avînd frecvența $f = 50$ Hz și valoarea eficace $U = 200$ V.

Să se determine:

a) impedanța circuitului;

b) valoarea eficace a curentului I și defazajul φ față de tensiunea aplicată și să se trasezę diagrama fazorilor;

c) factorul de putere al circuitului $\cos\varphi$;

d) cît trebuie să fie valoarea capacității C conectată în paralel la bornele circuitului, pentru ca factorul de putere al circuitului să devină $\cos\varphi' = 0{,}9$;

e) să se repete calculele de la punctele *a*, *b*, *c*, în ipoteza că se inversează borna polarizată a bobinei L_2.

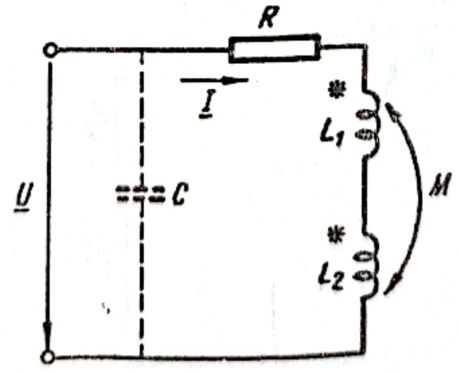


Fig. 7.54

7.55. Elementele circuitului din figura 7.55 au valorile: $R_1 = 30\Omega$, $R_2 = 40\Omega$, $X_1 = 24\Omega$, $X_2 = 14\Omega$, $X_m = 16\Omega$. Tensiunea aplicată circuitului este sinusoidală, avînd valoarea eficace $U = 400$ V.

Scanned with OKEN Scanner

Să se calculeze:
a) impedanța circuitului;
b) valorile eficace ale curenților I_1, I_2, I și defazajele lor față de tensiunea aplicată $\underline{U}$;
c) diagrama fazorilor;
d) factorul de putere cos φ al circuitului;
e) valoarea capacității C care trebuie conectată în paralel cu circuitul, pentru ca factorul de putere să capete valoarea cosφ = 1.

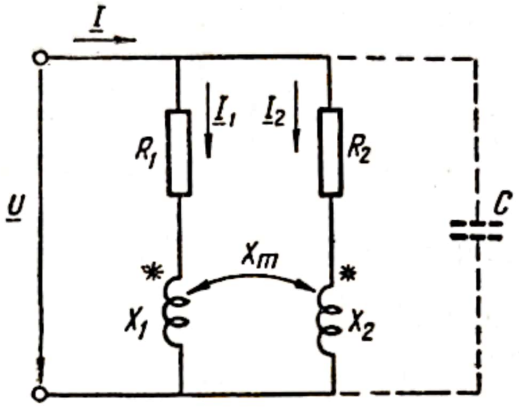


Fig. 7.55

7.56. În circuitul din figura 7.56 se cunosc: $L = \frac{640}{\pi}$ mH, $L_1 = \frac{250}{\pi}$ mH, $M = \frac{160}{\pi}$ mH, $R_2 = 60\Omega$, $C_2 = \frac{125}{\pi}$ μF, tensiunea de alimentare fiind sinusoidală de frecvență $f = 50$ Hz și valoarea eficace $U = 220$ V.

Să se determine:
a) impedanța circuitului;
b) valorile eficace ale curenților I, I_1, I_2 și defazajele lor față de tensiunea aplicată $\underline{U}$ și diagrama fazorilor.

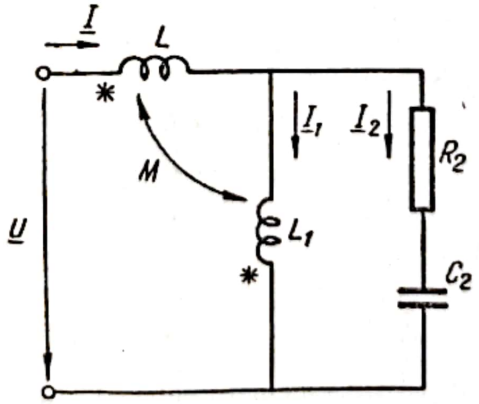


Fig. 7.56

7.57. Se consideră circuitul 7.57, în care se cunosc $X_L = 20\Omega$, $X_m = 8\Omega$, $X_c = 30\Omega$, $R = 16\Omega$, și valoarea eficace a curentului $I = 1$A.

Scanned with OKEN Scanner

Se cere să se determine valorile eficace ale tensiunii aplicate U_1 și ale curenților I_1 și I_2 și să se traseze diagrama fazorilor.

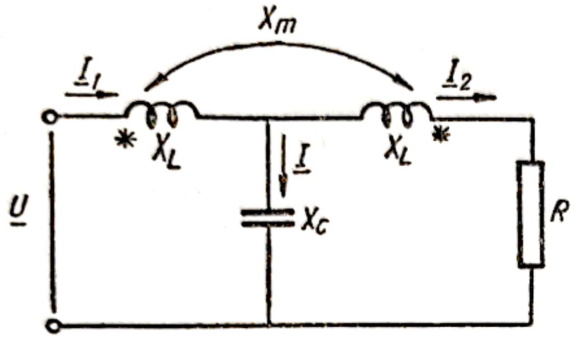


Fig. 7.57

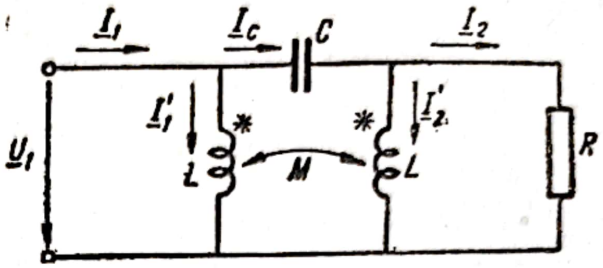


Fig. 7.58

7.58. În circuitul din figura 7.58 se cunosc: $L = \frac{3}{\pi}$ H, $M = \frac{1{,}8}{\pi}$ H, $C = \frac{100}{\pi}$ μF, $R = 200\Omega$, tensiunea de alimentare este sinusoidală de frecvență $f = 50$ Hz și valoarea eficace $U = 100$V.

Se cere să se determine valorile eficace ale curenților I_1, I_2, I_1', I_2', I_C și să se traseze diagrama fazorilor.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 8

CIRCUITE TRIFAZATE ÎN REGIM SINUSOIDAL

A. BREVIAR

8.1. Sisteme trifazate. Un ansamblu de trei mărimi de aceeași natură și de aceeași frecvență, dar de faze inițiale diferite, alcătuiesc un sistem trifazat de mărimi.

Expresiile mărimilor unui sistem trifazat sinusoidal sînt

$$a_k = A_k \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma_k); \; k = 1, 2, 3 \qquad (8.1\,a)$$

sau, în *reprezentare complexă*:

$$\underline{A}_k = A_k e^{j\gamma_k} \; ; \; k = 1, 2, 3. \qquad (8.1\,b)$$

Sistemele trifazate sînt un caz particular al sistemelor polifazate de ordinul m, sau m-fazate.

8.2. Sistemele trifazate simetrice au valorile eficace ale mărimilor componente egale:

$$A_1 = A_2 = A_3 = A \qquad (8.2\,a)$$

și același defazaj între două mărimi succesive:

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_2 - \gamma_3 = \gamma_3 - \gamma_1 = \frac{2\pi}{3}. \qquad (8.2\,b)$$

Expresiile mărimilor unui sistem trifazat simetric sînt

$$\begin{aligned} a_1 &= A \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma); \\ a_2 &= A \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \gamma - \frac{2\pi}{3}\right); \\ a_3 &= A \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \gamma - \frac{4\pi}{3}\right), \end{aligned} \qquad (8.2\,c)$$

Scanned with OKEN Scanner

iar reprezentările complexe corespunzătoare sînt:

$$\underline{A}_1 = A\,e^{j\gamma} = A\underline{|\gamma};$$

$$\underline{A}_2 = A\,e^{j\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right)} = A\underline{|\gamma-\frac{2\pi}{3}} = \underline{A}_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \qquad (8.2\,d)$$

$$\underline{A}_3 = A\,e^{j\left(\gamma-\frac{4\pi}{3}\right)} = A\underline{|\gamma-\frac{4\pi}{3}} = \underline{A}_1 e^{-j\frac{4\pi}{3}} = \underline{A}_1 e^{j\frac{2\pi}{3}}.$$

Diagramele vectoriale ale mărimilor unui sistem trifazat simetric sînt formate din trei vectori liberi, cu același modul și defazați cu $\frac{2\pi}{3}$ unul față de celălalt.

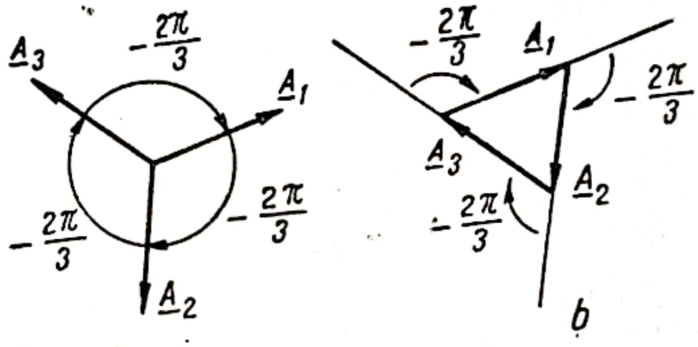


Fig. B.8.1

Grupînd vectorii astfel încît să aibă aceeași origine, se formează o stea regulată ca în figura B.8.1 *a*, iar dacă se dispun vectorii în continuare se formează un triunghi echilateral, ca în figura B.8. 1*b*.

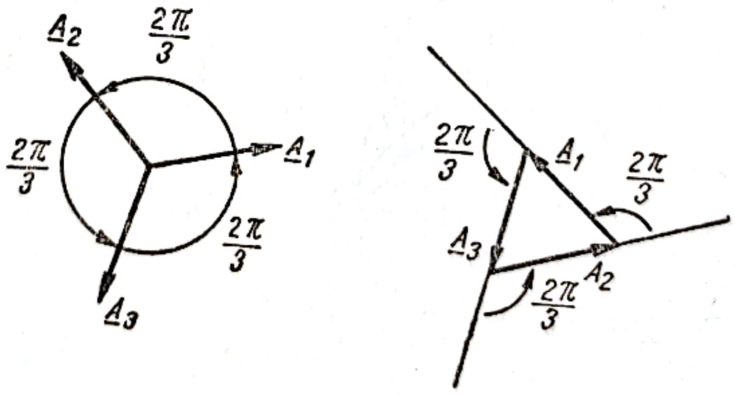


Fig. B.8.2

Succesiunea fazelor. Din ecuațiile (8.2 *d*) rezultă că mărimea $\underline{A}_2$ este defazată cu $\frac{2\pi}{3}$ în urma mărimii $\underline{A}_1$, $\underline{A}_3$ în urma lui $\underline{A}_2$ și $\underline{A}_1$ în urma lui $\underline{A}_3$. Această ordine este considerată convențional succesiune directă și corespunde unei succesiuni a vectorilor din diagramele 8.1. în sensul orar .

Scanned with OKEN Scanner

Succesiunii inverse, în care mărimea $\underline{A}_2$ este defazată înaintea mărimii $\underline{A}_1$ cu $\frac{2\pi}{3}$, $\underline{A}_3$ înaintea lui $\underline{A}_2$ și $\underline{A}_1$ înaintea lui $\underline{A}_3$, îi corespunde o succesiune a vectorilor în sensul antiorar sau trigonometric, ca în figura B.8.2.

8.3. Operatorul a este definit de relația:

$$a = e^{-j\frac{2\pi}{3}} \tag{8.3 a}$$

și verifică identitățile:

$$a^3 = 1; \tag{8.3 b}$$

$$1 + a + a^2 = 0. \tag{8.3 c}$$

Cu operatorul *a* mărimile unui sistem trifazat simetric de succesiune directă pot fi scrise sub forma:

$$\underline{A}_1,\ \underline{A}_2 = a^2\,\underline{A}_1,\ \underline{A}_3 = a\,\underline{A}_1, \tag{8.3 d}$$

iar pentru sistemul de succesiune inversă, sub forma:

$$\underline{A}_1,\ \underline{A}_2 = a\,\underline{A}_1,\ \underline{A}_3 = a^2\,\underline{A}_1. \tag{8.3 e}$$

De obicei, originea de fază se alege astfel încît faza inițială a mărimii a_1 să fie nulă ($\gamma = 0$) și reprezentarea complexă corespunzătoare $\underline{A}_1$ să fie reală.

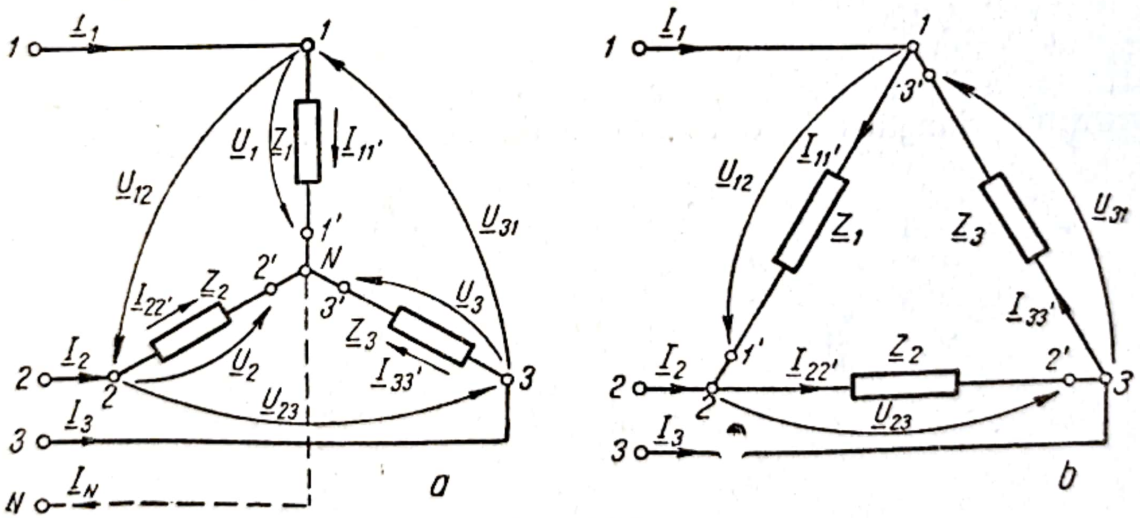


Fig. B.8.3

8.4. Circuitele trifazate sînt alcătuite din trei porțiuni de circuit (numite faze), parcurse fiecare de cîte unul din curenții unui sistem trifazat de curenți.

Conexiunea în stea (Y) a unui circuit trifazat, reprezentată în figura B.8.3 *a*, se realizează legînd extremitățile fazelor într-un punct comun *N*, numit punct

neutru. Sensurile pozitive de referință pe faze se aleg astfel încît converg sau diverg simultan din punctul neutru. Cele trei extremități libere ale fazelor se leagă la liniile de legătură, iar uneori se utilizează și a patra legătură de la punctul neutru prin *firul neutru.*

Conexiunea în triunghi (Δ) se realizează ca în figura B.8.3 *b*, iar sensurile pozitive de referință ale fazelor se aleg în continuare de-a lungul conturului.

8.5. Mărimi de fază și mărimi de linie. Tensiunile $\underline{U}_{11'}$, $\underline{U}_{22'}$, și $\underline{U}_{33'}$, între extremitățile aceleiași faze, se numesc *tensiuni de fază* iar curenții $\underline{I}_{11'}$, $\underline{I}_{22'}$ și $\underline{I}_{33'}$ care parcurg fazele se numesc *curenți de fază.*

Tensiunile de linie sînt tensiunile $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$ și $\underline{U}_{31}$ între două faze succesive, iar curenții de linie sînt curenții $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ și $\underline{I}_3$, care parcurg liniile de legătură.

Pentru *conexiunea în stea* între mărimile de fază și de linie există relațiile :

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11'};\ \underline{I}_2 = \underline{I}_{22'};\ \underline{I}_3 = \underline{I}_{33'}; \tag{8.5 a}$$

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{11'} - \underline{U}_{22'};\ \underline{U}_{23} = \underline{U}_{22'} - \underline{U}_{33'};\ \underline{U}_{31} = \underline{U}_{33'} - \underline{U}_{11'}, \tag{8.5 b}$$

iar pentru *conexiunea în triunghi* :

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11'} - \underline{I}_{33'};\ \underline{I}_2 = \underline{I}_{22'} - \underline{I}_{11'};\ \underline{I}_3 = \underline{I}_{33'} - \underline{I}_{22'}; \tag{8.5 c}$$

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{11'};\ \underline{U}_{23} = \underline{U}_{22'};\ \underline{U}_{31} = \underline{U}_{33'}. \tag{8.5 d}$$

În cazul conexiunii în stea, curenții de fază se notează de obicei $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ după notația curenților de linie cu care sînt egali, iar în cazul conexiunii în triunghi se notează $\underline{I}_{12}$, $\underline{I}_{23}$, $\underline{I}_{31}$, punînd astfel în evidență modul de conectare al fazelor.

8.6. Circuitul trifazat stea cu fir neutru reprezentat în figura B. 8.4 este alcătuit dintr-un generator trifazat stea avînd tensiunile electromotoare ale fazelor $\underline{E}_1$, $\underline{E}_2$, $\underline{E}_3$ și impedanțele $\underline{Z}_{g1}$, $\underline{Z}_{g2}$, $\underline{Z}_{g3}$, la bornele căruia este legat, prin intermediul unor linii de impedanțe $\underline{Z}_{l1}$, $\underline{Z}_{l2}$, $\underline{Z}_{l3}$, receptorul în stea avînd impedanțele fazelor $\underline{Z}_{s1}$, $\underline{Z}_{s2}$ și $\underline{Z}_{s3}$.

Admitanța echivalentă a unei faze este :

$$\underline{Y}_k = \frac{1}{\underline{Z}_k} = \frac{1}{\underline{Z}_{gk} + \underline{Z}_{lk} + \underline{Z}_{sk}};\ k = 1,\ 2,\ 3. \tag{8.6 a}$$

Curenții de linie $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ și *curentul din conductorul neutru* $\underline{I}_N$ satisfac ecuațiile :

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1\ (\underline{E}_1 - \underline{U}_N);\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_2\ (\underline{E}_2 - \underline{U}_N);\ \underline{I}_3 = \underline{Y}_2\ (\underline{E}_3 - \underline{U}_N) \tag{8.6 b}$$

$$\underline{I}_N = \underline{Y}_N\ \underline{U}_N \tag{8.6 c}$$

și

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_N. \tag{8.6 d}$$

Scanned with OKEN Scanner

Tensiunea între neutrul receptorului N și neutrul O al generatorului, numită și *deplasarea neutrului*, determinată din ecuațiile precedente este:

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{Y}_1 \underline{E}_1 + \underline{Y}_2 \underline{E}_2 + \underline{Y}_3 \underline{E}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_N}. \qquad (8.6\,e)$$

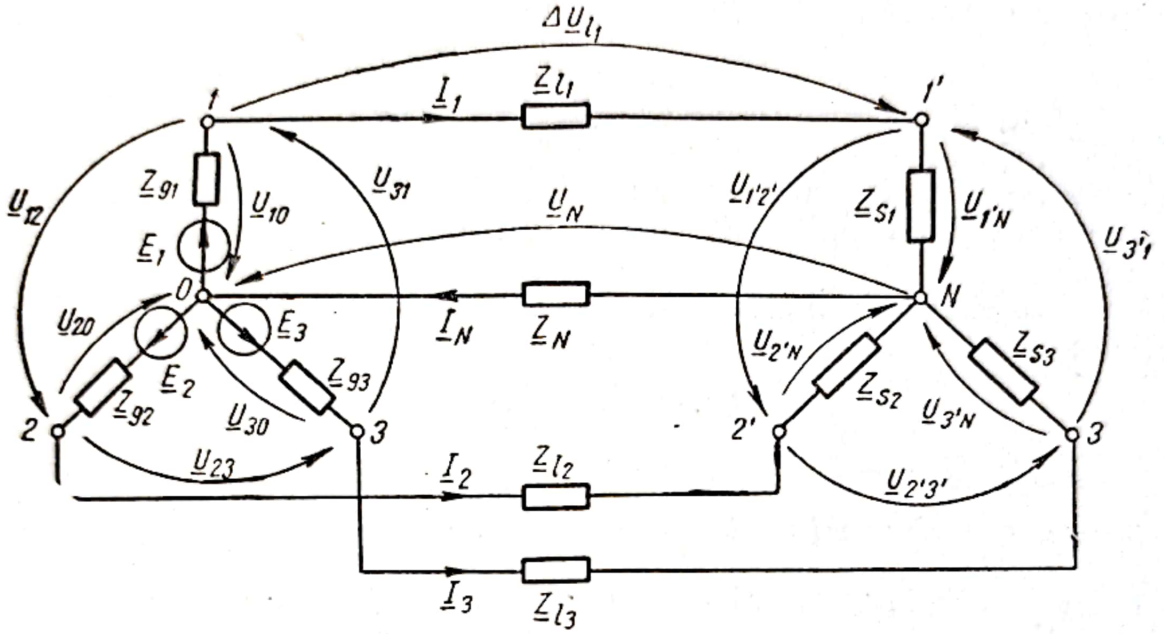


Fig. B.8.4

Tensiunile de fază ale generatorului sînt:

$$\underline{U}_{10} = \underline{E}_1 - \underline{Z}_{g1}\,\underline{I}_1;\ \underline{U}_{20} = \underline{E}_2 - \underline{Z}_{g2}\,\underline{I}_2;\ \underline{U}_{30} = \underline{E}_3 - \underline{Z}_{g3}\,\underline{I}_3, \qquad (8.6\,f)$$

iar *tensiunile de fază ale receptorului*:

$$\underline{U}_{1'N} = \underline{Z}_{s1}\,\underline{I}_1;\ \underline{U}_{2'N} = \underline{Z}_{s2}\,\underline{I}_2;\ \underline{U}_{3'N} = \underline{Z}_{s3}\,\underline{I}_3. \qquad (8.6\,g)$$

Tensiunile de linie de la bornele generatorului din ecuațiile (8.5 *b*) sînt:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{10} - \underline{U}_{20};\ \underline{U}_{23} = \underline{U}_{20} - \underline{U}_{30};\ \underline{U}_{31} = \underline{U}_{30} - \underline{U}_{10} \qquad (8.6\,h)$$

și, similar, *tensiunile de linie de la bornele receptorului* sînt:

$$\underline{U}_{1'2'} = \underline{U}_{1'N} - \underline{U}_{2'N};\ \underline{U}_{2'3'} = \underline{U}_{2'N} - \underline{U}_{3'N};\ \underline{U}_{3'1'} = \underline{U}_{3'N} - \underline{U}_{1'N}. \qquad (8.6\,i)$$

Căderile de tensiune pe liniile de legătură sînt:

$$\Delta\,\underline{U}_{l1} = \underline{Z}_{1l}\,\underline{I}_1;\ \Delta\,\underline{U}_{l2} = \underline{Z}_{2l}\,\underline{I}_2;\ \Delta\,\underline{U}_{l3} = \underline{Z}_{3l}\,\underline{I}_3. \qquad (8.6\,j)$$

Diagrama vectorială a tensiunilor și curenților circuitului trifazat stea, construită pe baza ecuațiilor (8.6), este reprezentată în figura B.8.5. S-a considerat cazul cel mai frecvent, cînd tensiunile electromotoare formează un sistem trifazat simetric. Curenții și tensiunile care apar în circuitul trifazat nu formează, în general, sisteme trifazate simetrice de mărimi.

Scanned with OKEN Scanner

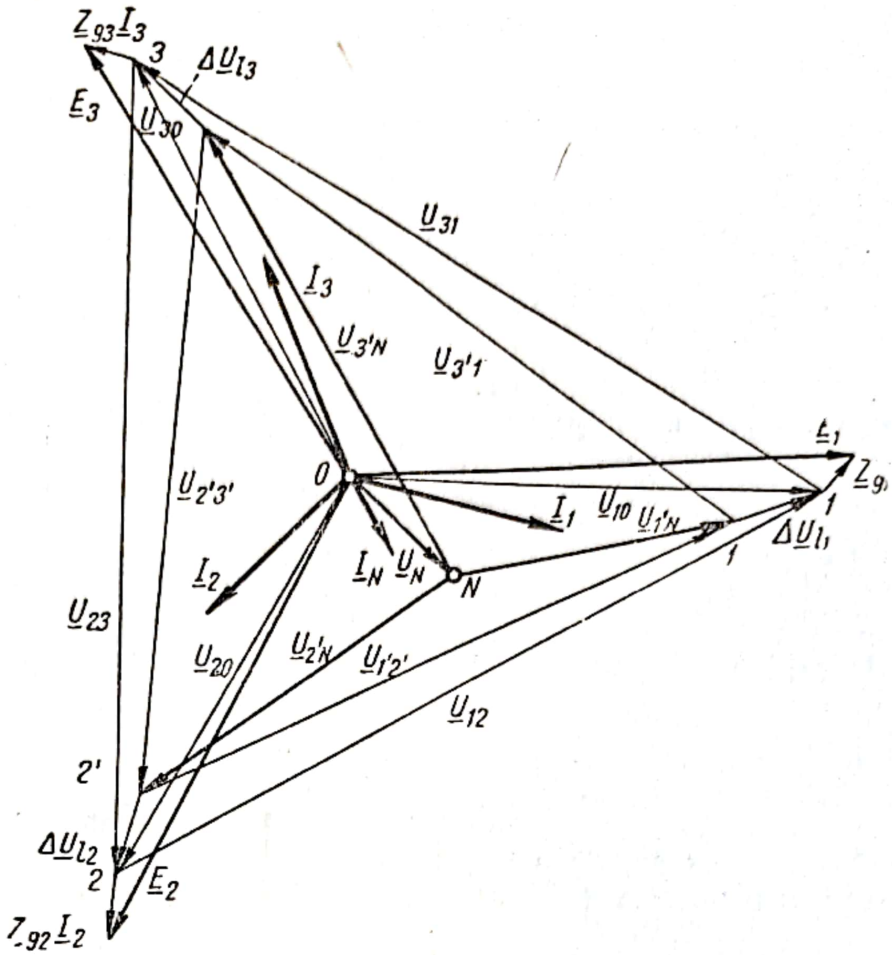


Fig. B.8.5

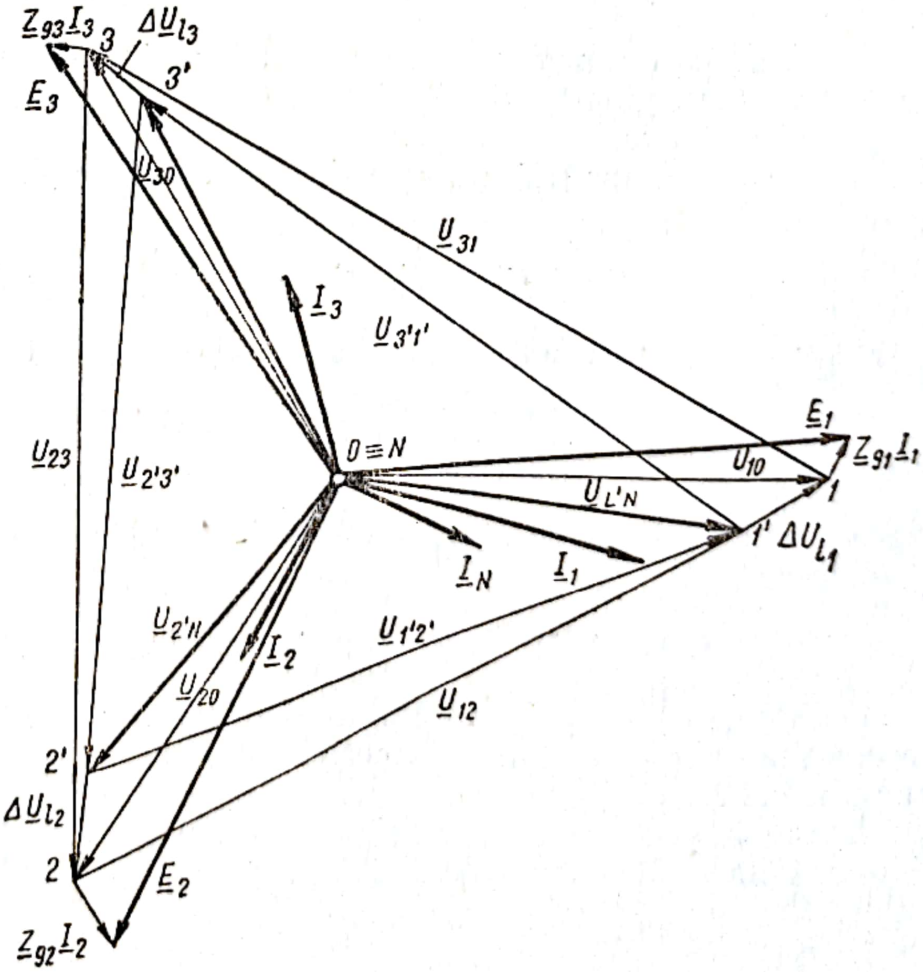


Fig. B.8.6

Scanned with OKEN Scanner

Dacă impedanța conductorului neutru este nulă $\underline{Z}_N = 0$, deplasarea neutrului dispare $\underline{U}_N = 0$ și diagrama vectorială ia forma din figura B.8.6. Circuitul trifazat poate fi considerat format din trei circuite monofazate independente, în care curenții se determină direct:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \underline{E}_1;\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_2 \underline{E}_2;\ \underline{I}_3 = \underline{Y}_3 \underline{E}_3;\ \underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3. \quad (8.6\ k)$$

8.7. Circuitul trifazat cu conexiune în stea fără fir neutru este un caz particular al circuitului stea cu fir neutru, cînd admitanța acestuia este nulă $\underline{Y}_N = 0$.

Deplasarea neutrului va fi în acest caz:

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{Y}_1 \underline{E}_1 + \underline{Y}_2 \underline{E}_2 + \underline{Y}_3 \underline{E}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}. \quad (8.7\ a)$$

Curentul de neutru este nul $\underline{I}_N = 0$ și relația (8.6 *d*) devine:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0. \quad (8.7\ b)$$

8.8. Circuitul trifazat simetric (echilibrat) cu conexiune în stea este un caz particular al circuitului din figura B.8.4, pentru care admitanțele echivalente ale fazelor sînt egale:

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \underline{Y}_3 = \underline{Y}. \quad (8.8\ a)$$

Regimurile de funcționare ale circuitelor trifazate în care tensiunile electromotoare, curenții și tensiunile formează sisteme trifazate simetrice se numesc regimuri simetrice.

Pentru un circuit trifazat stea simetric în regim simetric, tensiunile electromotoare sînt:

$$\underline{E}_1 = \underline{E};\ \underline{E}_2 = a^2 \underline{E};\ \underline{E}_3 = a \underline{E}. \quad (8.8\ b)$$

Deplasarea neutrului, calculată cu relația (8.6 *e*) este nulă:

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{Y}\,\underline{E} + \underline{Y}\,a^2\underline{E} + \underline{Y}\,a\underline{E}}{3\,\underline{Y} + \underline{Y}_N} = \frac{(1 + a + a^2)\,\underline{Y}\,\underline{E}}{3\,\underline{Y} + \underline{Y}_N} = 0, \quad (8.8\ c)$$

iar curenții de linie, calculați cu ecuațiile (8.6 *b*), formează un sistem trifazat simetric:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}\,\underline{E};\ \underline{I}_2 = \underline{Y}\,a^2\underline{E} = a^2\underline{I}_1;\ \underline{I}_3 = \underline{Y}\,a\underline{E} = a\underline{I}_1. \quad (8.8\ d)$$

Tensiunile de fază și de linie ale generatorului și receptorului formează de asemenea sisteme trifazate simetrice, iar diagrama vectorială ia forma din figura B.8.7.

În regim simetric este suficientă rezolvarea circuitului trifazat pentru o singură fază, pe schema echivalentă din figura B.8.8. Mărimile corespunză-

Scanned with OKEN Scanner

toare celorlalte faze se obțin pentru succesiunea directă prin defazarea în urmă cu $\frac{2\pi}{3}$ și, respectiv, $\frac{4\pi}{3}$ a mărimii corespunzătoare primei faze.

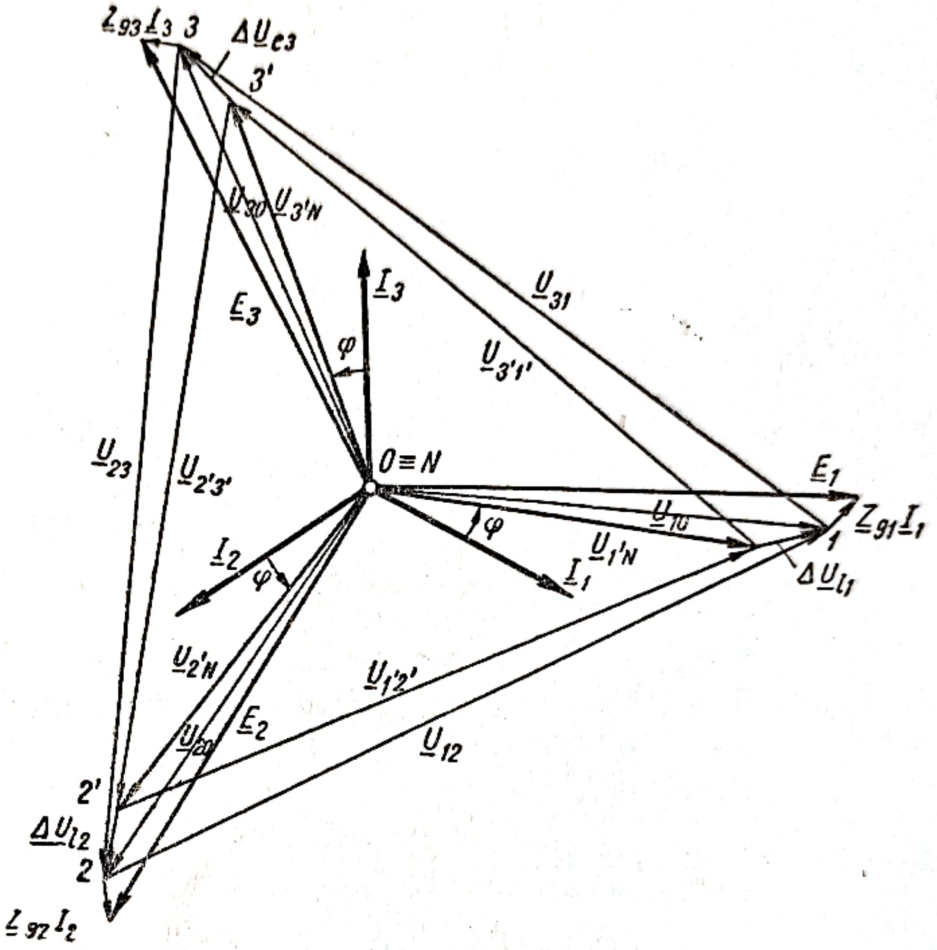


Fig. B.8.7

Relațiile între mărimile de linie și de fază exprimate de relațiile (8.5 *a*) și (8.5 *b*) devin :

$$\text{Y} \begin{cases} I_l = I_f & \text{(8.8 } e\text{)} \\ U_l = \sqrt{3}\, U_f & \text{(8.8 } f\text{)} \end{cases}$$

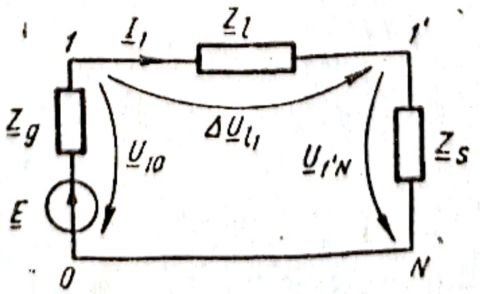


Fig. B.8.8

Tensiunile de linie sînt defazate înaintea tensiunilor de fază cu 30° pentru succesiunea directă.

8.9. Circuitul trifazat cu conexiune în triunghi este reprezentat în figura B.8.9. În cazul particular cînd impedanțele generatorului și ale liniilor de legătură sînt neglijabile, rezultă

$$\underline{U}_{12} = \underline{E}_{12};\ \underline{U}_{23} = \underline{E}_{23} \text{ și } \underline{U}_{31} = \underline{E}_{31}.$$

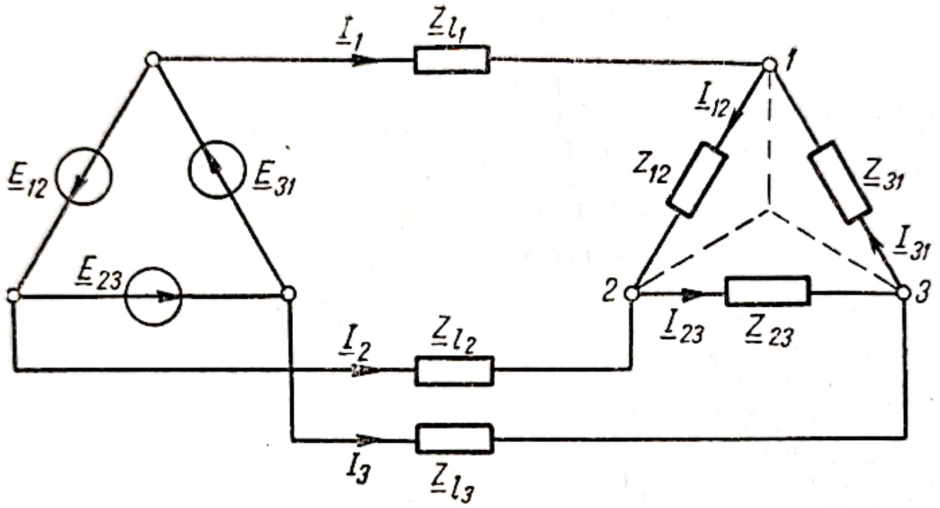


Fig. B.8.9

Corespunzător curenții de fază sînt:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} = \frac{\underline{E}_{12}}{\underline{Z}_{12}};\quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} = \frac{\underline{E}_{23}}{\underline{Z}_{23}};\quad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}} = \frac{\underline{E}_{31}}{\underline{Z}_{31}}, \qquad (8.9\ a)$$

iar curenții de linie rezultă din ecuațiile (8.5 *c*):

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31};\quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12};\quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}. \qquad (8.9\ b)$$

Curenții de linie satisfac relația:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0. \qquad (8.9\ c)$$

Diagrama vectorială pentru cazul particular considerat este cea din figura B.8.10.

Dacă impedanțele liniilor nu sînt neglijabile, se transfigurează receptorul cu conexiune în triunghi într-un receptor echivalent cu conexiunea în stea (v. § 2.13), care se rezolvă ca la § 8.7.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Pentru ca înfășurările unui generator în triunghi să nu fie străbătute de curent cînd generatorul este în gol, este necesar și suficient ca tensiunile electromotoare ale fazelor să îndeplinească condiția:

$$\underline{E}_{12} + \underline{E}_{23} + \underline{E}_{31} = 0. \qquad (8.9\ d)$$

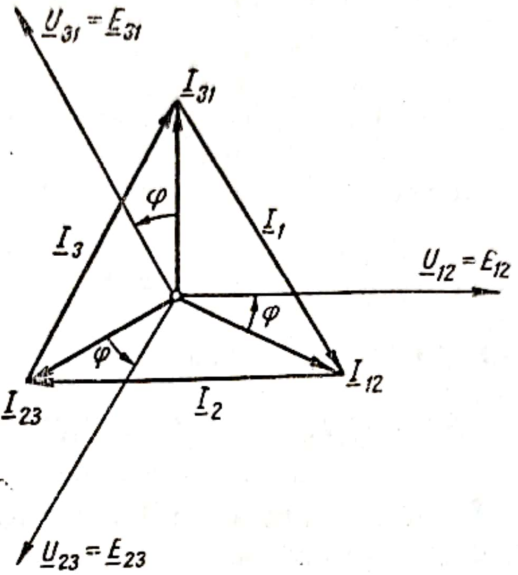


Fig. B.8.10

8.10. Circuitul trifazat triunghi simetric în regim simetric este un caz particular al celui precedent, în care impedanțele fazelor sînt egale:

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31} = \underline{Z}, \qquad (8.10\ a)$$

iar tensiunile electromotoare formează un sistem trifazat simetric:

$$\underline{E};\ a^2\underline{E};\ a\underline{E}. \qquad (8.10\ b)$$

Curenții de fază, calculați cu relațiile (8.9 *a*) și curenții de linie obținuți cu relațiile (8.9 *b*) alcătuiesc de asemenea sisteme trifazate simetrice de mărimi.

Relațiile între mărimile de linie și de fază, exprimate de ecuațiile (8.5 *c*) și (8.5 *d*), devin în acest caz:

$$\Delta \begin{cases} U_l = U_f & (8.10\ c) \\ I_l = \sqrt{3}\, I_f. & (8.10\ d) \end{cases}$$

Curenții de linie sînt defazați în urmă cu 30° față de curenții de fază.

8.11. Puterea în circuitele trifazate. Puterea aparentă complexă primită de un receptor trifazat este suma puterilor aparente complexe corespunzătoare fiecărei faze.

Pentru receptorul în stea rezultă:

$$\underline{S} = \underline{U}_1\underline{I}_1^* + \underline{U}_2\underline{I}_2^* + \underline{U}_3\underline{I}_3^*, \qquad (8.11\ a)$$

Scanned with OKEN Scanner

iar pentru receptorul în triunghi:

$$\underline{S} = \underline{U}_{12}\underline{I}^*_{12} + \underline{U}_{23}\underline{I}^*_{23} + \underline{U}_{31}\underline{I}^*_{31}. \qquad (8.11\ b)$$

Puterea aparentă complexă a unui receptor stea cu fir neutru, exprimată în funcție de curenții de linie și de potențialele bornelor receptorului față de un punct de referință ales arbitrar, este:

$$\underline{S} = \underline{V}_1\underline{I}^*_1 + \underline{V}_2\underline{I}^*_2 + \underline{V}_3\underline{I}^*_3 + \underline{V}_N\underline{I}^*_N, \qquad (8.11\ c)$$

iar a receptorului în stea fără fir neutru sau în triunghi este:

$$\underline{S} = \underline{V}_1\underline{I}^*_1 + \underline{V}_2\underline{I}^*_2 + \underline{V}_3\underline{I}^*_3. \qquad (8.11\ d)$$

Puterea cedată de un generator trifazat este:

$$\underline{S} = \underline{E}_1\underline{I}^*_1 + \underline{E}_2\underline{I}^*_2 + \underline{E}_3\underline{I}^*_3. \qquad (8.11\ e)$$

8.12. Puterea circuitelor trifazate în regim simetric este de trei ori puterea corespunzătoare unei faze. Indiferent de modul de conectare în stea sau triunghi, puterea activă a unui circuit trifazat în regim simetric este:

$$P = 3\,U_f I_f \cos\varphi = \sqrt{3}\,U_l I_l \cos\varphi. \qquad (8.12\ a)$$

Puterea reactivă este:

$$Q = 3\,U_f I_f \sin\varphi = \sqrt{3}\,U_l I_l \sin\varphi, \qquad (8.12\ b)$$

unde φ este defazajul între tensiunea și curentul de fază, iar puterea aparentă este:

$$S = 3\,U_f I_f = \sqrt{3}\,U_l I_l. \qquad (8.12\ c)$$

8.13. Ameliorarea factorului de putere al circuitelor trifazate în regim simetric. Pentru a aduce factorul de putere al unui receptor inductiv de la o valoare $\cos\varphi$ la o valoare $\cos\varphi'$, se montează în paralel cu receptorul o baterie de condensatoare conectate în triunghi, a căror putere reactivă capacitivă Q_c compensează o parte din puterea reactivă a receptorului.

Valorile capacității fiecăruia din cele trei condensatoare necesare sînt:

$$C = \frac{Q_c}{3\omega U^2} = \frac{P(\mathrm{tg}\varphi - \mathrm{tg}\varphi')}{3\omega U^2}. \qquad (8.13)$$

Scanned with OKEN Scanner

În figura B.8.11 este reprezentată diagrama de puteri a circuitului format din receptorul trifazat în paralel cu bateria de condensatoare.

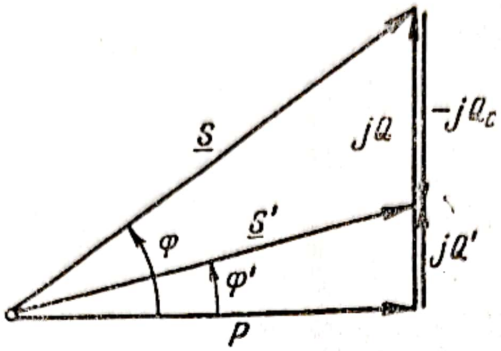


Fig. B.8.11

B. PROBLEME

8.1 (I). La bornele unui circuit trifazat în stea se măsoară tensiunile : $U_{1N}=100$ V ; $U_{2N}=44{,}7$ V ; $U_{3N}=80$ V ; $U_{12}=126{,}5$ V ; $U_{23}=120{,}9$ V ; $U_{31}=124$ V. Știind că tensiunile formează un sistem de succesiune directă, să se scrie expresiile reprezentărilor în complex ale acestor tensiuni și să se deseneze diagrama vectorială considerînd $\underline{U}_{1N}$ origine de fază.

8.2. Să se determine reprezentările complexe ale tensiunilor din problema 8.1, dacă se consideră $\underline{U}_{12}$ origine de fază.

8.3. Tensiunile de fază ale unui generator trifazat alcătuiesc un sistem simetric de succesiune inversă : $\underline{E}_1=\underline{E}$, $\underline{E}_2=a\underline{E}$ și $\underline{E}_3=a^2\underline{E}$. Să se scrie expresiile tensiunilor de linie la bornele A, B, C ale generatorului pentru conexiunile din figura 8.3 și să se reprezinte diagramele vectoriale ale tensiunilor.

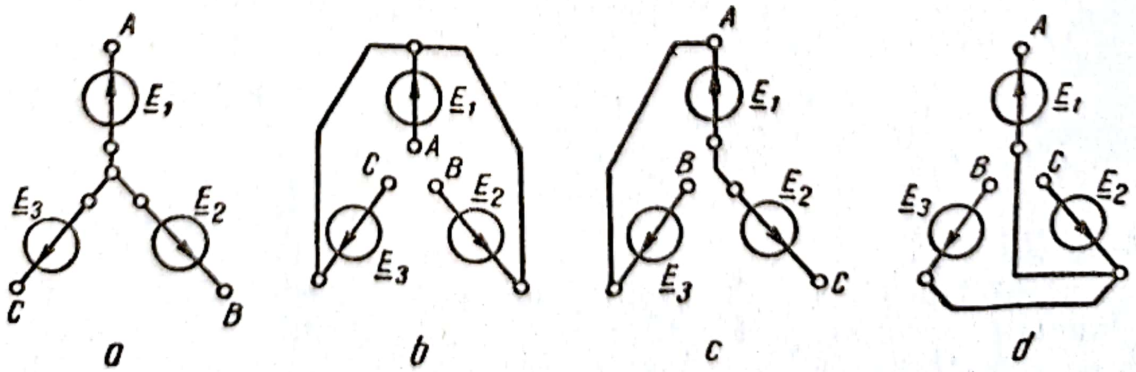


Fig. 8.3

8.4. Reprezentările complexe a doi curenți de linie dintr-o rețea trifazată fără fir neutru sînt :

$$\underline{I}_1 = 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right)A; \quad \underline{I}_3 = 10\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right)A.$$

Să se verifice dacă sistemul de curenți trifazați este simetric și să se stabilească succesiunea fazelor.

8.5. Să se stabilească sistemul trifazat de tensiuni de linie care acționează în circuitul din problema 8.4, dacă receptorul este alcătuit din trei impedanțe egale $\underline{Z} = (8{,}68 + j5)\Omega$ legate în stea. Să se reprezinte diagrama vectorială a curenților și tensiunilor din circuit.

8.6. Care este conexiunea unui receptor trifazat format din trei impedanțe egale $Z = 10\Omega$, alimentat de o rețea trifazată de 208 V, dacă mărimea curenților de linie este de 12 A?

8.7. Care este mărimea rezistenței și reactanței fazelor receptorului trifazat din problema 8.6, dacă puterea activă absorbită din rețeaua trifazată este $P = 4\,320$ W?

8.8(R). Un receptor trifazat simetric format din trei impedanțe egale $\underline{Z} = (4 + j3)\Omega$ legate în stea este alimentat de o rețea trifazată cu tensiunea de linie 208 V. Se cer :

a) curenții de fază și de linie ai receptorului;

b) diagrama vectorială a tensiunilor și curenților;

c) bilanțul puterilor;

d) diagrama puterilor.

8.9. Să se calculeze valorile condensatoarelor care, montate în triunghi la bornele receptorului din problema 8.8, îmbunătățesc valoarea factorului de putere al circuitului la $\cos\varphi' = 1$.

8.10. Să se rezolve problema 8.8 dacă conexiunea receptorului ar fi în triunghi.

8.11(I). Regimul de lucru al unui generator trifazat simetric conectat în stea este următorul : tensiunea de fază la borne 120 V, curentul de linie 10 A și factorul de putere 0,707. Să se calculeze tensiunea de linie și factorul de putere al receptorului inductiv ($\varphi > 0$), dacă acesta este conectat la generator printr-o linie de legătură avînd $\underline{Z}_l = (1 + j2)\Omega$. Să se deseneze diagrama vectorială a tensiunilor și curenților pentru faza 1.

Scanned with OKEN Scanner

8.12. Un circuit trifazat simetric conectat în triunghi (fig. 8.12) este alcătuit din trei bobine avînd inductivitățile $L = \frac{100}{\pi}$ mH, rezistențele $R = 10\Omega$ și inductivitățile mutuale $M = \frac{50}{\pi}$ mH, una față de alta. Să se determine curenții de fază și de linie, puterea activă și puterea reactivă, cînd circuitul este alimentat cu un sistem trifazat simetric de tensiuni de linie cu frecvența $f = 50$ Hz și valorile eficace $U_l = 208$ V. Să se stabilească schema echivalentă monofazată a circuitului.

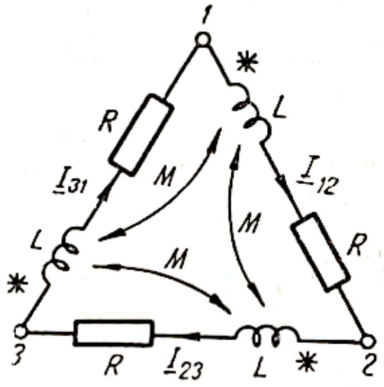


Fig. 8.12

8.13. Să se rezolve problema 8.12, pentru conexiunea în stea a receptorului.

8.14 (R). Să se stabilească schemele echivalente în stea și în triunghi ale unui receptor trifazat simetric, care absoarbe de la rețeaua de 380 V și 50 Hz o putere activă $P = 6{,}4$ kW, la un factor de putere $\cos \varphi = 0{,}8$.

8.15 (I). Să se determine bateria de condensatoare care, montată în paralel cu receptorul din problema 8.14, aduce factorul de putere al ansamblului la valoarea $\cos \varphi' = 0{,}9$. Se vor considera cazurile de conectare în stea și în triunghi și se va stabili conexiunea mai avantajoasă.

8.16 (I). Un generator trifazat simetric conectat în stea, avînd tensiunea electromotoare de fază $E = 120$ V și impedanța neglijabilă, alimentează două receptoare trifazate simetrice conectate în triunghi ca în figura 8.16. Valorile impedanțelor receptoarelor sînt $\underline{Z}' = (6 + j\,9)\,\Omega$ și $\underline{Z}'' = (9 + j6)\,\Omega$, iar impedanțele liniilor de alimentare sînt $\underline{Z}_l = 1\Omega$, $\underline{Z}'_l = \underline{Z}''_l = (1 + j)\,\Omega$. Să se determine:

a) schema echivalentă în stea a circuitului;

b) curentul de linie al generatorului;

Scanned with OKEN Scanner

c) curenții de linie și de fază ai receptoarelor;
d) diagrama vectorială a tensiunilor și curenților;
e) bilanțul și diagrama puterilor.

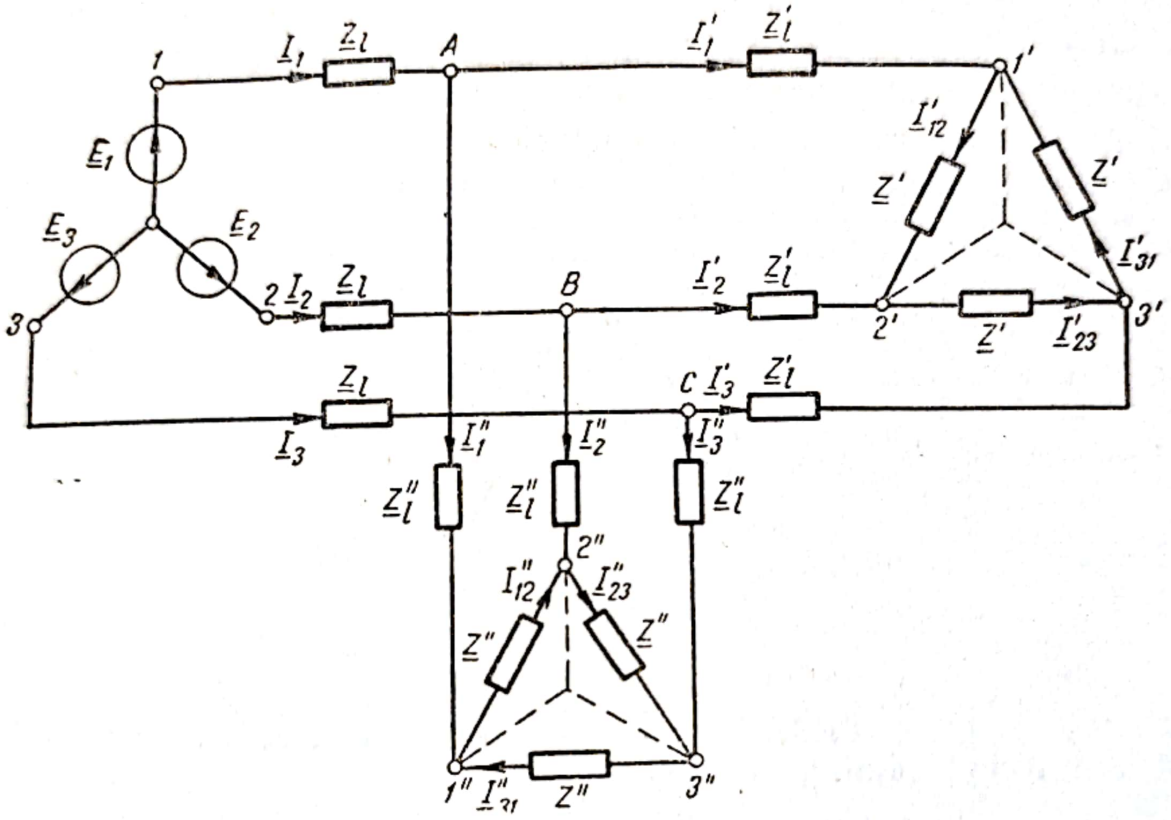


Fig. 8.16

8.17. O rețea trifazată de 380 V alimentează două motoare legate în paralel: un motor asincron care dezvoltă o putere mecanică $P'_m = 10$ kW, cu un randament $\eta' = 80\%$ și un factor de putere $\cos\varphi' = 0{,}8$ inductiv, și un motor sincron având puterea mecanică $P''_m = 17$ kW, randamentul $\eta'' = 85\%$ și factorul de putere $\cos\varphi'' = 0{,}95$ capacitiv. Să se calculeze factorul de putere al ansamblului și puterea aparentă cerută rețelei. Să se deseneze diagrama puterilor.

8.18 (R). O linie trifazată de 208 V alimentează un motor care absoarbe o putere activă $P' = 10$ kW, la un factor de putere $\cos\varphi' = 0{,}8$. În paralel cu motorul este conectat un receptor format din trei impedanțe egale $\underline{Z}'' = (3 + j3)\,\Omega$, legate în triunghi. Să se stabilească:

a) curenții de linie ai motorului și ai receptorului;
b) curenții de linie ai rețelei trifazate;
c) diagrama vectorială a tensiunilor și curenților;
d) bilanțul puterilor și diagrama puterilor.

Scanned with OKEN Scanner

8.19 (R). Să se calculeze valoarea eficace a curentului care trece prin înfășurarea releului de protecție conectat ca în figura 8.19, la scurtcircuitul trifazat, dacă curentul din secundarul transformatoarelor de curent este de 10 A.

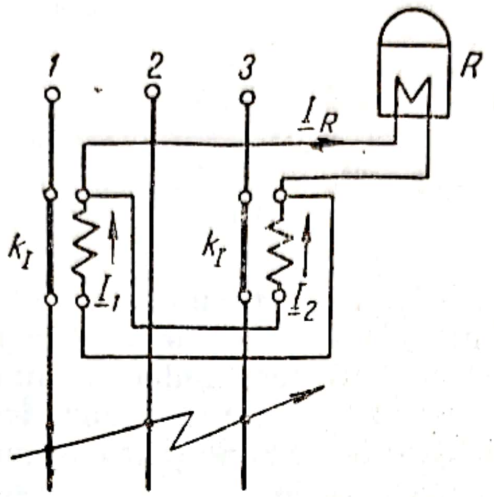


Fig. 8.19

8.20. O linie trifazată este străbătută de curenți de linie de intensitate 30 A și frecvență de 50 Hz. Să se calculeze căderea de tensiune și pierderea de putere, pe kilometrul de linie, dacă diametrul conductorului de cupru este $d = 6{,}18$ mm, iar distanța dintre două conductoare este $D = 2$ m. Inductivitatea echivalentă (de calcul) a unui conductor pe unitatea de lungime se calculează cu relația:

$$L_{l0} = 2 \cdot 10^{-4} \ln \frac{2D}{d} \quad \text{H/km.}$$

8.21. Un motor trifazat simetric are tensiunea de linie, la borne, de 380 V și absoarbe o putere de 9 kW la un factor de putere $\cos \varphi = 0{,}8$. Să se calculeze tensiunea de linie de la bornele de intrare ale liniei de alimentare lungă de 2 km, dacă aceasta are rezistența liniară $R_{l0} = 5 \cdot 10^{-4}$ Ω/m și inductivitatea liniară $L_{l0} = 3{,}18$ μH/m. Frecvența tensiunilor sinusoidale este 50 Hz.

8.22 (R). Măsurarea puterii absorbite de un circuit trifazat fără fir neutru se face utilizînd metoda celor două wattmetre cu

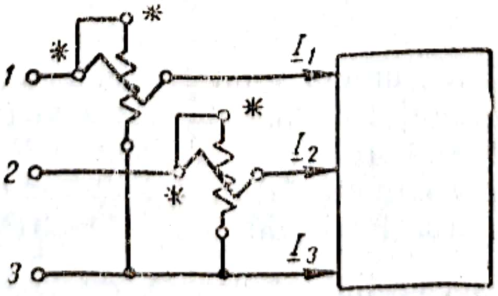


Fig. 8.22

montajul din figura 8.22. Să se demonstreze că puterea receptorului trifazat este suma puterilor P_1 și P_2 măsurate de cele două wattmetre.

Scanned with OKEN Scanner

8.23 (R). Puterea activă a unui circuit trifazat echilibrat se măsoară cu metoda celor două wattmetre (montajul din fig. 8.22). Indicațiile aparatelor fiind P_1 și P_2, să se calculeze factorul de putere al circuitului.

8.24 (I). La măsurarea prin metoda celor două wattmetre a puterii active a unui receptor trifazat simetric, alimentat de la o rețea de 200 V, indicația primului wattmetru a fost de 1 930 W. Să se stabilească indicația celuilalt wattmetru și factorul de putere al circuitului, dacă curentul de linie al receptorului este 10 A. Erorile de măsură se consideră neglijabile.

8.25 (R). Puterea unui receptor trifazat în regim simetric se măsoară cu metoda celor două wattmetre, utilizînd montajul din figura 8.22. Să se precizeze caracterul inductiv sau capacitiv al receptorului, dacă la conectarea în paralel cu acesta a unui receptor trifazat format din trei condensatoare identice de capacități foarte mici indicația mai mare crește, iar indicația mai mică scade.

8.26 (R). Să se rezolve problema 8.25, dacă la conectarea sistemului de condensatoare indicațiile ambelor wattmetre cresc.

8.27. Să se calculeze factorul de putere al unui receptor trifazat simetric, dacă indicațiile a două wattmetre conectate la bornele sale ca în figura 8.27 sînt P_1 și P_2.

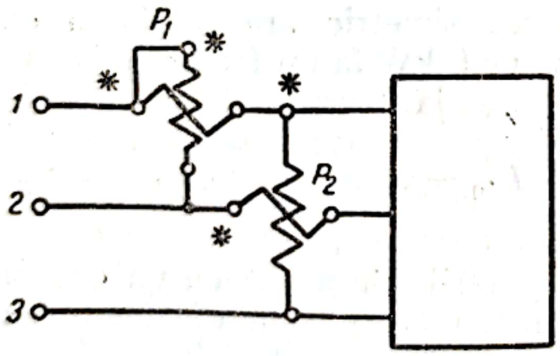


Fig. 8.27

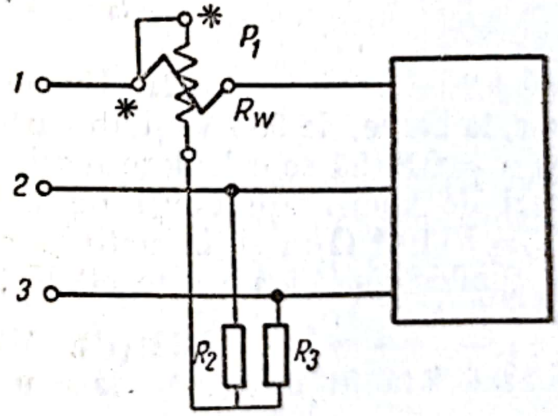


Fig. 8.28

8.28. Puterea unui receptor trifazat simetric fără fir neutru se măsoară cu montajul cu punct neutru virtual din figura 8.28, în care rezistențele R_2 și R_3 se iau egale cu rezistența R_W a bobinei de tensiune a wattmetrului. Indicația wattmetrului fiind P_1, să se demonstreze că puterea activă absorbită de receptorul trifazat este $P = 3P_1$.

8.29. O linie trifazată de 208 V alimentează nouă lămpi cu incandescență conectate în triunghi, ca în figura 8.29. Se cer:

a) curenții de fază ai receptorului în triunghi;

Scanned with OKEN Scanner

b) curenții de linie în rețeaua de alimentare;
c) diagrama tensiunilor și a curenților.

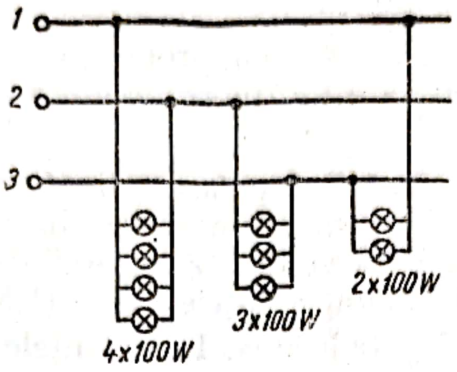


Fig. 8.29

8.30 (R). Un receptor trifazat este alcătuit din impedanțele $\underline{Z}_{12} = 10\Omega$; $\underline{Z}_{23} = 20\,|\underline{-30°}\,\Omega$ și $\underline{Z}_{31} = 20\,|\underline{30°}\,\Omega$, legate în triunghi. Să se calculeze curenții de fază, curenții de linie și puterile receptorului, cînd la bornele sale se aplică un sistem de tensiuni de linie simetric de valori eficace 200 V și succesiune: *a)* directă; *b)* inversă.

8.31 (R). Un circuit trifazat are schema din figura B.8.4 (din breviar), în care tensiunile electromotoare ale generatorului sînt $\underline{E}_1 = E = 120$ V, $\underline{E}_2 = a^2E$ și $\underline{E}_3 = a\,E$, impedanțele echivalente ale fazelor sînt $\underline{Z}_1 = 5\Omega$, $\underline{Z}_2 = (4 - j\,3)\,\Omega$ și $\underline{Z}_3 = (4 + j\,3)\,\Omega$, iar impedanța firului neutru este neglijabilă $\underline{Z}_N = 0$. Să se stabilească:
a) curenții de linie ai circuitului;
b) puterea activă și puterea reactivă a generatorului;
c) diagrama vectorială a tensiunilor și a curenților.

8.32. Să se rezolve problema 8.31 în ipoteza întreruperii firului neutru.

8.33. Să se rezolve problema 8.31 pentru o succesiune inversă a fazelor generatorului.

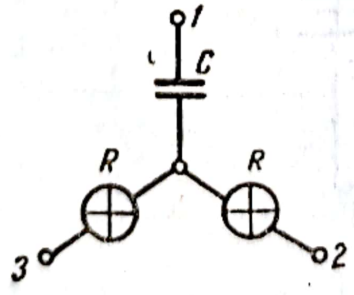


Fig. 8.34

8.34 (I). Un indicator de succesiune a fazelor are schema din figura 8.34, în care reactanța condensatorului este egală cu

Scanned with OKEN Scanner

rezistențele lămpilor cu incandescență. Să se stabilească succesiunea fazelor rețelei trifazate simetrice la care a fost conectat indicatorul, dacă becul din faza a doua luminează mai intens.

8.35. Să se rezolve problema 8.34 dacă în locul condensatorului s-ar afla o inductivitate a cărei reactanță ar fi egală cu rezistențele lămpilor cu incandescență.

8.36. Circuitul trifazat din figura B.8.4 este alcătuit dintr-un generator de tensiuni electromotoare simetrice de valori eficace 220 V și având impedanța fiecărei faze $\underline{Z}_g = (0{,}5 + \mathrm{j})\,\Omega$ care alimentează un receptor trifazat format din impedanțele $\underline{Z}_{s_1} = (1{,}5 + \mathrm{j})\,\Omega$; $\underline{Z}_{s_2} = (1{,}5 + \mathrm{j}\,2)\,\Omega$; $\underline{Z}_{s_3} = (2{,}5 + \mathrm{j})\,\Omega$, legate în stea. Impedanțele liniei sînt $\underline{Z}_{l_1} = \underline{Z}_{l_2} = \underline{Z}_{l_3} = (1 + \mathrm{j})\,\Omega$. Se consideră circuitul fără fir neutru. Se cer:

a) tensiunea de deplasare a neutrului;
b) curenții de linie;
c) tensiunile de fază și de linie ale generatorului;
d) tensiunile de fază și de linie ale receptorului;
e) căderile de tensiune pe linii;
f) diagrama vectorială a tensiunilor și curenților;
g) bilanțul puterilor.

8.37 (R). O rezistență $R = 10\Omega$, un condensator și o bobină de reactanțe $X_C = X_L = R$ sînt legate în stea. La bornele circuitului se aplică un sistem trifazat simetric de tensiuni de valori eficace 208 V. Să se calculeze curenții și puterile pentru:

a) succesiunea directă a tensiunilor;
b) succesiunea inversă a tensiunilor.

Să se reprezinte în ambele cazuri diagramele vectoriale ale curenților și tensiunilor.

8.38 (R). Să se stabilească indicația voltmetrului conectat ca în figura 8.38, dacă $X_L = X_C = R = 10\Omega$, iar tensiunea de linie a rețelei trifazate simetrice este de 208 V.

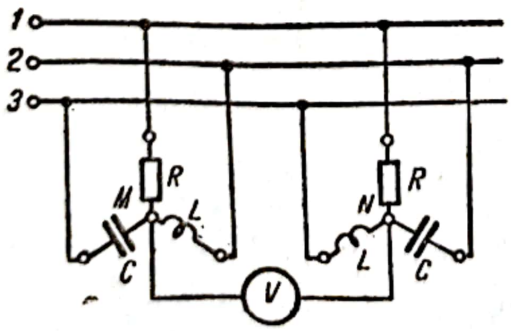


Fig. 8.38

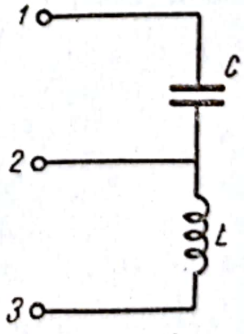


Fig. 8.39

8.39. Să se calculeze curenții de linie și de fază ai receptorului din figura 8.39, conectat la o rețea trifazată simetrică cu $U_l =$

$= 380$ V, știind că $X_L = X_C = 10\ \Omega$. Să se reprezinte diagrama vectorială de curenți și tensiuni.

8.40. Să se traseze locul geometric descris în diagrama tensiunilor de punctul neutru al circuitului din figura 8.40, cînd R variază între zero și infinit. Se dau: $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = (4 + j\,3)\,\Omega$ și $U_{12} = U_{23} = U_{31} = 208$ V.

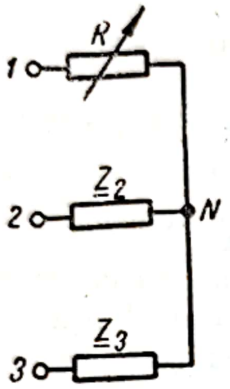


Fig. 8.40

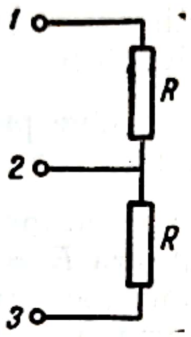


Fig. 8.41

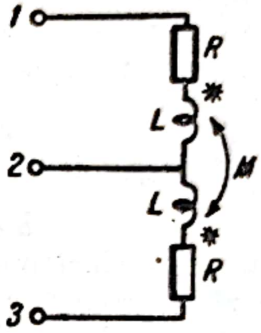


Fig. 8.42

8.41. Să se calculeze curenții de linie absorbiți de la rețeaua trifazată de 208 V de receptorul din figura 8.41, avînd $R = 10\ \Omega$. Să se reprezinte diagrama de tensiuni și curenți.

8.42. Circuitul din figura 8.42 este conectat la o rețea trifazată simetrică de 208 V și 50 Hz. Să se determine curenții de fază și curenții de linie ai circuitului. Se dau $R = 10\ \Omega$, $L = \frac{100}{\pi}$ mH și $M = \frac{50}{\pi}$ mH.

8.43 (R). Ce tensiune va măsura voltmetrul conectat ca în figura 8.43, dacă rapoartele de transformare ale transformatoarelor de tensiune sînt $K_v = 30$, iar tensiunea de deplasare a neutrului rețelei trifazate este $U_N = 120$ V față de punctul neutru al generatorului presupus simetric.

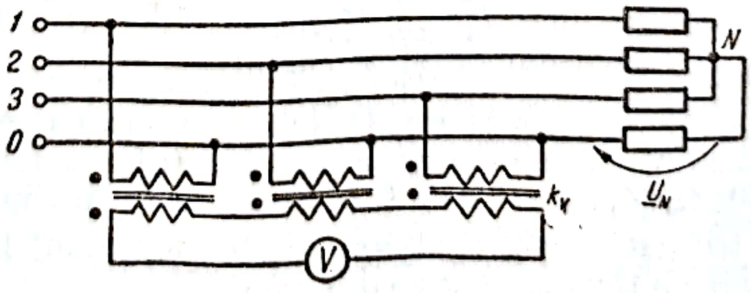


Fig. 8.43

8.44. O rețea trifazată de 200 V alimentează un receptor trifazat echilibrat format din trei impedanțe egale $\underline{Z} = 10\,\underline{|30°}\ \Omega$ legate în stea, în paralel cu un receptor neechilibrat format din impedan-

Scanned with OKEN Scanner

țele $\underline{Z}_{12} = 20\ \underline{|45°}\ \Omega$, $\underline{Z}_{23} = 5\ \Omega$, $\underline{Z}_{31} = 10\ \underline{|-30°}\ \Omega$ legate în triunghi. Să se calculeze curenții de linie absorbiți din rețea, puterea activă și puterea reactivă totală a circuitului.

8.45. Un sistem trifazat nesimetric de tensiuni $U_{12} = 200$ V, $U_{23} = 250$ V, $U_{31} = 150$ V alimentează un receptor trifazat echilibrat, în triunghi, alcătuit din trei impedanțe egale: $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31} = (4 + j\,3)\ \Omega$. Se cer:

a) curenții de faze și de linie ai receptorului considerînd $\underline{U}_{12}$ origine de fază;
b) diagrama vectorială a tensiunilor și curenților;
c) puterea activă și puterea reactivă ale fiecărei faze și ale receptorului trifazat.

8.46. Să se rezolve problema 8.45 dacă se inversează fazele a doua și a treia pentru a modifica succesiunea tensiunilor de linie.

8.47. (I). Un generator trifazat simetric conectat în stea, avînd tensiunea electromotoare de fază $E = 220$ V și impedanța neglijabilă, alimentează un receptor trifazat format din trei impedanțe $\underline{Z} = (6 + j\,5)\ \Omega$ legate în stea prin intermediul unei linii de impedanțe $\underline{Z}_l = (1 + j\,0{,}5)\ \Omega$. Ca urmare a unui defect se scurtcircuitează fazele a doua și a treia la bornele receptorului. Să se calculeze curenții de linie în noua situație și să se reprezinte diagrama vectorială a curenților și tensiunilor.

8.48. Să se rezolve problema 8.8 dacă s-au conectat invers bornele fazei întîi a generatorului.

8.49. Să se găsească curenții de linie ai generatorului din problema 8.47 la scurtcircuitarea bornelor fazei întîi a receptorului.

8.50. Un generator trifazat simetric conectat în triunghi are tensiunile de fază de 100 V. La bornele sale este legat un receptor trifazat simetric format din trei impedanțe $\underline{Z} = (4 + j\,3)\ \Omega$ legate în triunghi. În urma unei defecțiuni se întrerupe faza 2-3 a generatorului. Se cer:

a) curenții de fază ai receptorului $\underline{I}'_{12}$, $\underline{I}'_{23}$, $\underline{I}'_{31}$;
b) curenții de fază ai generatorului $\underline{I}''_{12}$, $\underline{I}''_{23}$, $\underline{I}''_{31}$;
c) curenții de linie $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$;
d) diagrama tensiunilor și a curenților.

8.51 (I). O linie trifazată cu tensiunile de linie simetrice de 208 V alimentează un receptor trifazat format din impedanțele $\underline{Z}_1 = 5\ \underline{|60°}\ \Omega$, $\underline{Z}_2 = 5\ \underline{|-60°}\ \Omega$ și $\underline{Z}_3 = 5\ \Omega$ legate în stea, în paralel cu un receptor trifazat în triunghi format din impedanțele: $\underline{Z}_{12} = 10\ \Omega$; $\underline{Z}_{23} = (5 + j\,8{,}66)\ \Omega$; $\underline{Z}_{31} = (5 - j\,8{,}66)\ \Omega$.

Se cer:

a) să se stabilească receptorul în triunghi echivalent;
b) să se calculeze curenții de linie ai rețelei;
c) puterea activă, puterea reactivă și puterea aparentă a sistemului.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 9

CIRCUITE ELECTRICE LINIARE ÎN REGIM PERIODIC NESINUSOIDAL

A. BREVIAR

9.1. Funcția periodică $f(t)$ satisface relația de definiție:

$$f(t) = f(t + kT), \tag{9.1}$$

unde T este perioada funcției, iar k — un număr întreg oarecare.

9.2. Dezvoltarea în serie Fourier. Orice funcție periodică $f(t)$ de perioadă T care satisface condițiile lui Dirichlet * poate fi descompusă într-o infinitate de sinusoide cu frecvențele multipli ai frecvenței $f = \frac{1}{T}$ a funcției:

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\omega t + \varphi_k) \tag{9.2 a}$$

sau:

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos k\omega t. \tag{9.2 b}$$

Componenta sinusoidală de pulsație $k\omega$ din seria Fourier (9.2 *a*) se numește armonică de ordinul k a funcției periodice.

9.3. Coeficienții seriei Fourier pot fi determinați analitic cu relațiile:

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt; \tag{9.3 a}$$

$$A_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin k\omega t\,dt; \quad B_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos k\omega t\,dt; \tag{9.3 b}$$

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}; \ \operatorname{tg}\varphi_k = \frac{B_k}{A_k}. \tag{9.3 c}$$

---

* Funcția este mărginită și are în fiecare perioadă un număr finit de discontinuități și extreme.

Scanned with OKEN Scanner

9.4. Pentru cazuri particulare de funcții periodice, unii din coeficienții seriei Fourier sînt nuli:

Curbele uzual întîlnite în electrotehnică:

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right) \text{ au } C_0 = A_{2k} = B_{2k} = 0. \qquad (9.4\,a)$$

Curbele simetrice față de axa ordonatelor:

$$f(t) = f(-t) \text{ au } A_k = 0. \qquad (9.4\,b)$$

Curbele simetrice față de origine:

$$f(t) = -f(-t) \text{ au } C_0 = B_k = 0. \qquad (9.4\,c)$$

9.5. Determinarea coeficienților seriei Fourier cînd curba de variație în timp a funcției este cunoscută sub formă grafică (fig. B.9.1) se face aproximînd integralele din relațiile (9.3 *a*) și (9.3 *b*) cu sume. Se împarte perioada în m părți egale și, notînd cu f_n valoarea funcției corespunzătoare diviziunii a n-a, rezultă:

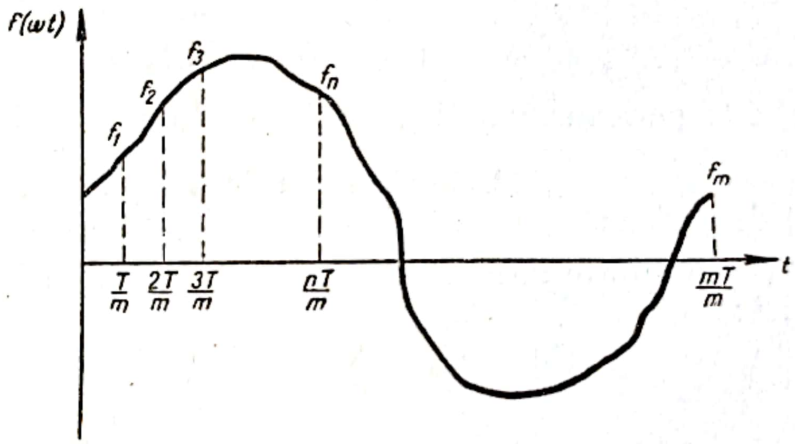


Fig. B.9.1

$$C_0 \simeq \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} f_n\,; \qquad (9.5\,a)$$

$$A_k \simeq \frac{2}{m}\sum_{n=1}^{m} f_n \sin\left(2\pi\,\frac{nk}{m}\right); \qquad B_k \simeq \frac{2}{m}\sum_{n=1}^{m} f_n \cos\left(2\pi\,\frac{nk}{m}\right). \qquad (9.5\,b)$$

Pentru a putea calcula coeficienții seriei Fourier pînă la un rang N, este necesară o împărțire a perioadei în cel puțin $m = 2N$ părți.

9.6. Rezolvarea circuitelor electrice liniare în regim nesinusoidal se face dezvoltînd tensiunile electromotoare nesinusoidale în serie Fourier și rezolvînd circuitul cu teoremele lui Kirchhoff pentru fiecare armonică în parte. Curenții în laturile circuitului se obțin conform teoremei

Scanned with OKEN Scanner

superpoziției prin sumarea armonicelor de curent, calculate pentru diferitele armonice ale tensiunilor electromotoare.

În cazul unui circuit R, L, C serie, căruia i se aplică o tensiune nesinusoidală :

$$u = \sum_k \sqrt{2}\, U_k \sin (k\,\omega t + \gamma_k) \tag{9.6 a}$$

rezultă un curent :

$$i = \sum_k \sqrt{2}\, I_k \sin (k\,\omega t + \gamma_k - \varphi_k), \tag{9.6 b}$$

în care :

$$I_k = \frac{U_k}{Z_k} \text{ este valoarea eficace a armonicei } k \text{ a curentului;} \tag{9.6 c}$$

$$\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{k\omega L - \dfrac{1}{k\omega C}}{R} \text{ — defazajul între armonicele } k \text{ de tensiune și curent;} \tag{9.6 d}$$

$$Z_k = \sqrt{R^2 + \left(k\,\omega L - \frac{1}{k\,\omega C}\right)^2} \text{ — impedanța circuitului pentru armonica de ordinul } k. \tag{9.6 e}$$

9.7. Valoarea eficace a tensiunii sau curentului nesinusoidal definit prin relațiile :

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2\, \mathrm{d}t} \text{ și } I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\, \mathrm{d}t} \tag{9.7 a}$$

se poate calcula în funcție de valorile eficace ale armonicelor, folosind relațiile :

$$U = \sqrt{\sum_k U_k^2} \text{ și } I = \sqrt{\sum_k I_k^2}. \tag{9.7 b}$$

9.8. Valoarea medie a tensiunii sau a curentului este, prin definiție :

$$U_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T u\, \mathrm{d}t \text{ și } I_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T i\, \mathrm{d}t. \tag{9.8 a}$$

Din relația (9.3 *a*) rezultă :

$$U_{med} = U_0 \text{ și } I_{med} = I_0. \tag{9.8 b}$$

Scanned with OKEN Scanner

Valoarea medie redresată a tensiunii sau curentului se definește prin relațiile :

$$U_{med,r} = \frac{1}{T}\int_0^T |u|\,dt; \quad I_{med,r} = \frac{1}{T}\int_0^T |i|\,dt. \tag{9.8 c}$$

9.9. **Factorul de formă al tensiunii,** respectiv curentului sinusoidal, este prin definiție :

$$F_U = \frac{U}{U_{med,r}}; \quad F_I = \frac{I}{I_{med,r}}. \tag{9.9}$$

9.10. **Factorul de ondulație** este definit de relațiile :

$$\gamma_U = \frac{\sqrt{U^2 - U_0^2}}{U_0}; \quad \gamma_I = \frac{\sqrt{I^2 - I_0^2}}{I_0}. \tag{9.10}$$

9.11. **Coeficientul de distorsiune** se definește prin relațiile :

$$\delta_U = \frac{\sqrt{U^2 - U_1^2 - U_0^2}}{\sqrt{U^2 - U_0^2}}; \quad \text{și} \quad \delta_I = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2 - I_0^2}}{\sqrt{I^2 - I_0^2}}. \tag{9.11}$$

9.12. **Puterea activă** a unui receptor monofazat în regim nesinusoidal este suma puterilor active corespunzătoare fiecărei armonice de tensiune și de curent :

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k \geq 1} U_k I_k \cos \varphi_k. \tag{9.12}$$

9.13. **Puterea reactivă** a unui receptor monofazat în regim nesinusoidal se definește ca suma puterilor reactive corespunzătoare fiecărei armonice :

$$Q = \sum_{k \geq 1} U_k I_k \sin \varphi_k. \tag{9.13}$$

9.14. **Puterea aparentă** este prin definiție produsul valorilor eficace ale tensiunii și curentului :

$$S = UI = \sqrt{\left(\sum_k U_k^2\right)\left(\sum_k I_k^2\right)}. \tag{9.14}$$

9.15. **Puterea deformantă se definește prin relația :**

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}. \tag{9.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

B. PROBLEME

9.1 (I). Să se dezvolte în serie Fourier funcțiile periodice nesinusoidale din figura 9.1.

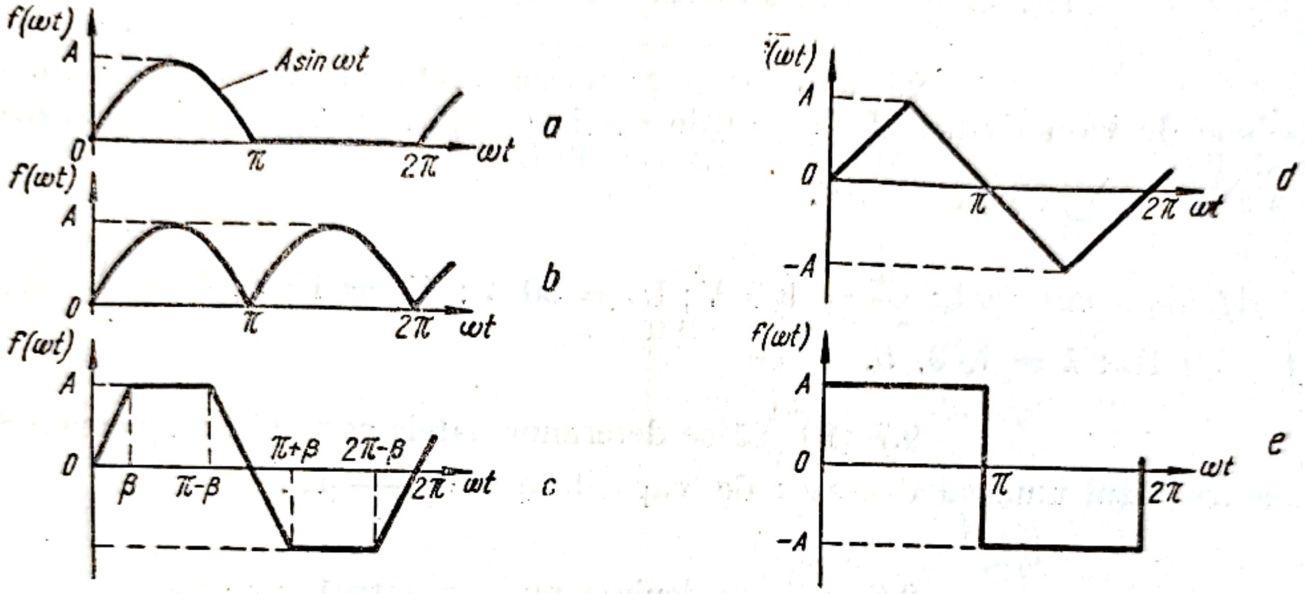


Fig. 9.1

9.2. Să se calculeze valorile medii și valorile eficace ale tensiunilor nesinusoidale ale căror curbe de variație în timp sînt cele din figura 9.1.

9.3. Să se compare valorile eficace determinate în problema 9.2 pentru funcțiile reprezentate în figura 9.1 cu cele obținute într-un calcul aproximativ, luînd în considerație numai primele trei armonice ale tensiunii.

9.4. Să se calculeze coeficientul de distorsiune pentru tensiunile nesinusoidale din problema 9.2.

9.5. La bornele de ieșire ale redresorului bialternanță din figura 9.5 se obține la mers în gol o tensiune avînd curba de variație în timp din figura 9.1 *b*, amplitudinea $U_m = 110$ V și frecvența $f = 50$ Hz. Să se calculeze:

a) valoarea instantanee a curentului în rezistența de sarcină $R_s = 100\ \Omega$;

b) valoarea medie și valoarea eficace a curentului;

Scanned with OKEN Scanner

c) factorul de formă și factorul de ondulație al curentului. Rezistența internă a redresorului măsurată la bornele de ieșire este $R' = 100\,\Omega$.

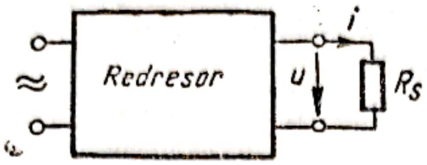


Fig. 9.5

9.6 (R). Să se calculeze reactanța echivalentă a unei bobine de inductivitate L la bornele căreia se aplică o tensiune nesinusoidală $u = \sum_{k=1}^{N} U_k \sqrt{2} \sin k\omega t$.

Aplicație numerică: $U_1 = 100$ V; $U_3 = 30$ V; $U_5 = 10$ V; $L = \frac{1}{\pi}$ H; $f = 50$ Hz; $k = 1, 3, 5$.

9.7 (R). Să se determine datele cerute în problema 9.6 pentru cazul unui condensator de capacitate $C = \frac{100}{\pi}\,\mu$F.

9.8. Să se calculeze puterea activă, puterea reactivă, puterea aparentă și puterea deformantă pentru:

a) bobina din problema 9.6;
b) condensatorul din problema 9.7.

9.9 (I). La bornele circuitului din figura 9.9 în care $R = 10\,\Omega$, $L = 11{,}77$ mH și $C = 23{,}93\,\mu$F se aplică o tensiune nesinusoidală:

$$u = 30\sqrt{2}\sin\omega t + 10\sqrt{2}\sin 3\omega t \text{ V}.$$

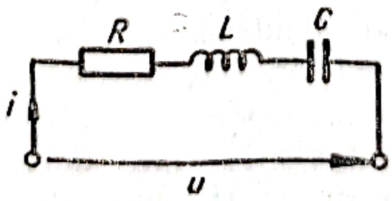


Fig. 9.9

Care este frecvența armonicei fundamentale a tensiunii, dacă amplitudinea armonicei a treia a curentului în circuit este de două ori mai mare decît amplitudinea fundamentalei acestuia?

Scanned with OKEN Scanner

9.10 (R). Pentru circuitul din problema 9.9 să se calculeze valoarea eficace a curentului, puterea activă, puterea reactivă, puterea aparentă și puterea deformantă. Frecvența primei armonice a tensiunii u este 100 Hz.

9.11. Să se calculeze curenții i, i_L și i_C în laturile circuitului din figura 9.11, în care $R = R_L = R_C = 10\ \Omega$; $\omega L = 5\ \Omega$; $\frac{1}{\omega C} = 20\ \Omega$, iar tensiunea electromotoare a sursei este:

$$e = 120\sqrt{2}\sin\omega t + 10\sqrt{2}\sin(3\omega t - 30°) + 30\sqrt{2}\sin(5\omega t - 135°)\ \text{V}.$$

Fig. 9.11

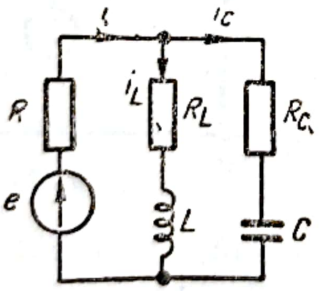
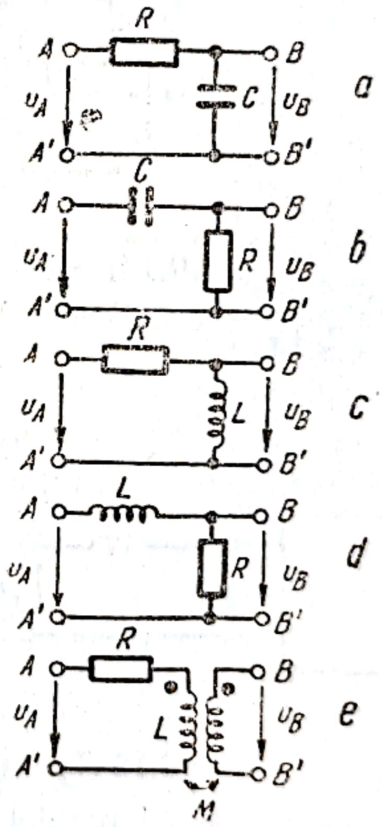


Fig. 9.12



9.12. La bornele AA' ale cuadripolilor din figura 9.12 se aplică o tensiune nesinusoidală $u_A = 100\sqrt{2}\sin\omega t + 50\sqrt{2}\sin(3\omega t - 45°)$V. Se cer pentru fiecare caz:

a) tensiunea u_B de la bornele de ieșire BB' ale cuadripolului sub forma instantanee și reprezentarea ei grafică;

b) valorile eficace ale tensiunilor u_A și u_B;

c) coeficientul de distorsiune al tensiunilor u_A și u_B.

Scanned with OKEN Scanner

Se cunosc :

$$R = \omega L = \frac{1}{\omega C} = \omega M = 10\Omega.$$

9.13. Să se rezolve problema 9.12 pentru circuitele din figura 9.13, în care $R = 10\Omega$, $\omega L = 5\Omega$ și $\frac{1}{\omega C} = 45\Omega$.

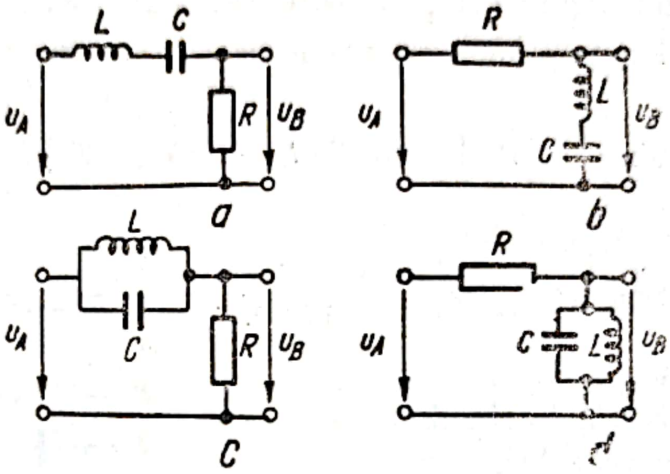


Fig. 9.13

9.14. Să se rezolve problema 9.5, dacă în serie cu rezistența de sarcină se montează o bobină de inductivitate $L = 350$ mH, ca în figura 9.14.

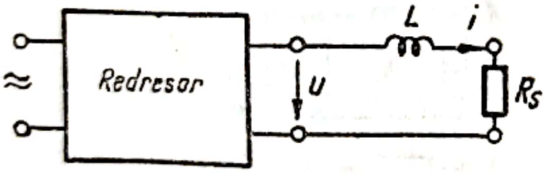


Fig. 9.14

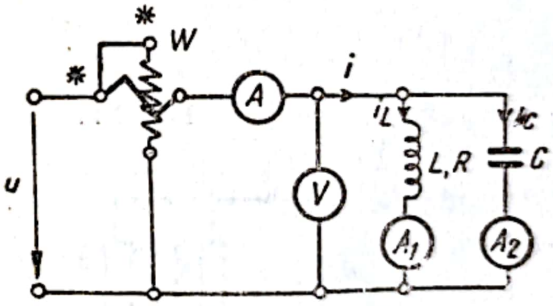


Fig. 9.15

9.15 (I). O bobină cu rezistența $R = 6\Omega$ și reactanța $\omega L = 1\Omega$ este legată în paralel cu un condensator de reactanță $\frac{1}{\omega C} = 9\Omega$, ca în figura 9.15. La bornele circuitului se aplică o tensiune nesinusoidală :

$$u = 18 + 120 \sin \omega t + 30 \sin (3\,\omega t - 60°)\ \text{V}.$$

a) Să se stabilească indicațiile voltmetrului și ale ampermetrelor, știind că aceste aparate sînt de tip electromagnetic.

b) Să se rezolve punctul *a*, dacă voltmetrul și ampermetrul sînt de tip magnetoelectric.

c) Care este indicația wattmetrului electrodinamic W?

d) Care este puterea deformantă a circuitului?

Scanned with OKEN Scanner

9.16. Un miliampermetru de curent alternativ cu punte redresoare are schema din figura 9.16, în care aparatul indicator este un miliampermetru de curent continuu. Scara aparatului a fost gradată astfel încît indicația sa să fie egală cu valoarea eficace a curentului, cînd acesta este sinusoidal. Să se stabilească indicațiile aparatului cînd este parcurs de curenți nesinusoidali de valoare eficace I_{ef} și a căror variație în timp are formele reprezentate în figura 9.1.

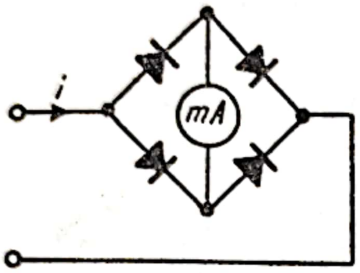


Fig. 9.16

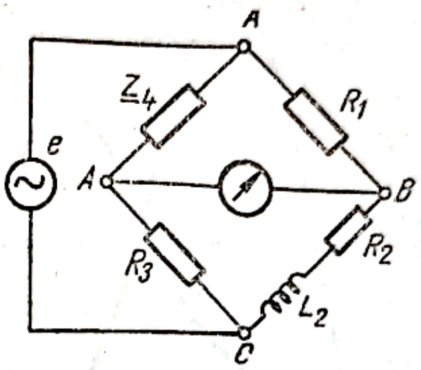


Fig. 9.17

9.17. Ce structură trebuie să aibă impedanța $\underline{Z}_4$ din brațul punții de curent alternativ din figura 9.17, pentru ca echilibrul acesteia să nu fie afectat de forma de undă a tensiunii nesinusoidale a generatorului de alimentare?

9.18 (I). Să se determine primele trei armonice ale unei funcții periodice a cărei curbă de variație în timp este reprezentată în figura 9.18.

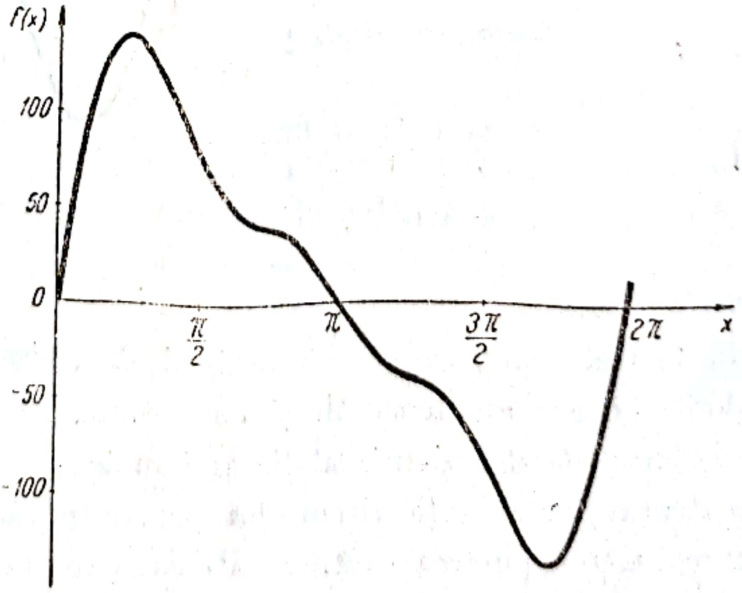


Fig. 9.18

9.19 (I). Tensiunea la borne și curentul care străbate un circuit electric în regim deformant au curbele de variație în timp din oscilograma reprezentată în figura 9.19.

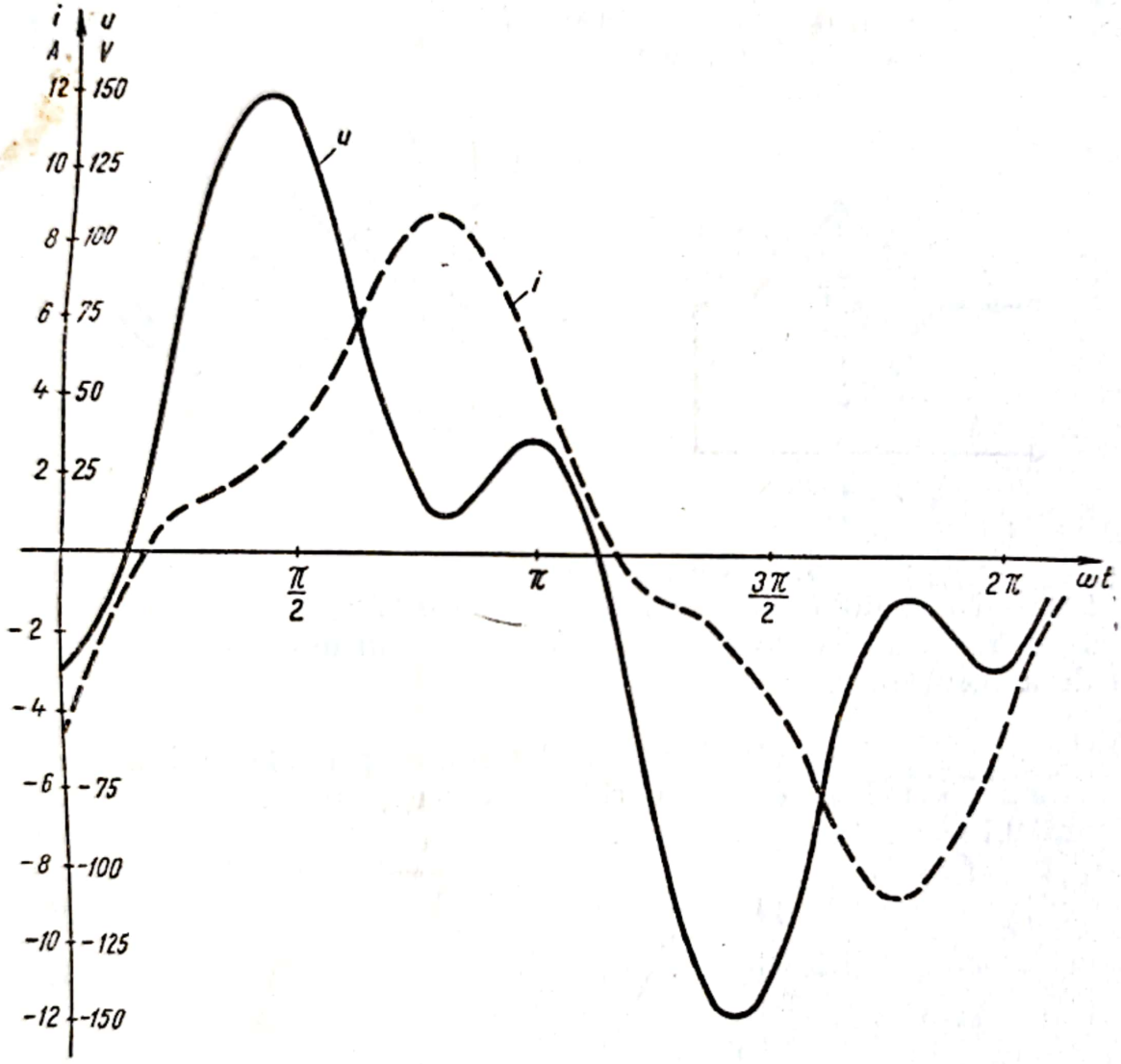


Fig. 9.19

Se cer:

a) primele trei armonice ale tensiunii și ale curentului;

b) valorile eficace ale tensiunii și curentului;

c) coeficientul de distorsiune al fiecărei unde;

d) rezistența și reactanța circuitului pentru prima și a treia armonică;

e) puterea activă, puterea reactivă, puterea aparentă și puterea deformantă.

Scanned with OKEN Scanner

9.20 (R). Circuitul din figura 9.20 este alcătuit dintr-un generator trifazat simetric cu conexiunea în stea, avînd pe prima fază tensiunea electromotoare:

$$e = 220\sqrt{2}\sin\omega t + 90\sqrt{2}\sin(3\omega t + 30°) + 40\sqrt{2}\sin(5\omega t - 45°) + 20\sqrt{2}\sin(7\omega t - 10°)\ \text{V}$$

și impedanța de fază neglijabilă, care alimentează un receptor simetric în stea, avînd pe fiecare fază o rezistență $R = 8\ \Omega$ în serie cu o bobină de reactanță $X_1 = 6\ \Omega$ la frecvența de 50 Hz a primei armonice.

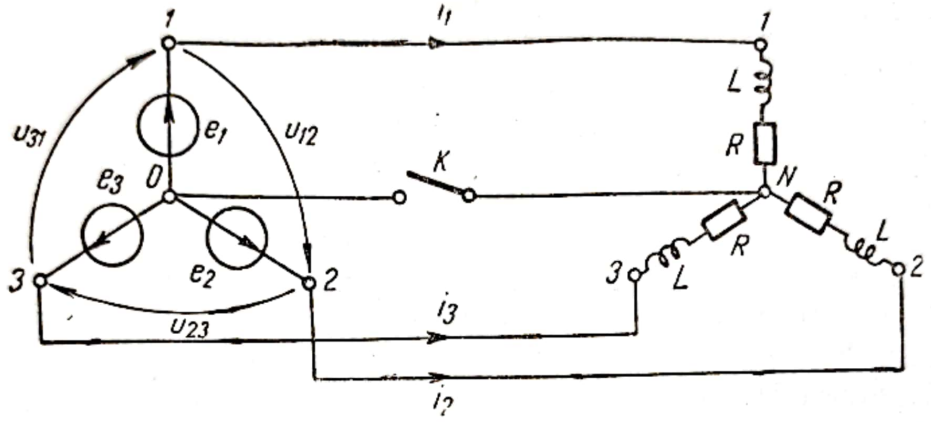


Fig. 9.20

Se cer:

a) tensiunea de linie;

b) valoarea eficace a tensiunii de fază și a tensiunii de linie la bornele generatorului;

c) curenții de fază și curentul din conductorul neutru, cînd întrerupătorul K este închis;

d) curenții de fază și tensiunea dintre punctele O și N cînd întrerupătorul K este deschis;

e) puterea activă, puterea reactivă, puterea aparentă și puterea deformantă pentru circuitul cu fir neutru.

9.21 (I). Generatorul trifazat simetric conectat în triunghi, reprezentat în figura 9.21, are pe prima fază tensiunea electromotoare $e = 220\sqrt{2}\sin\omega t + 20\sqrt{2}\sin 3\omega t$ V și impedanța fiecărei faze, la frecvența

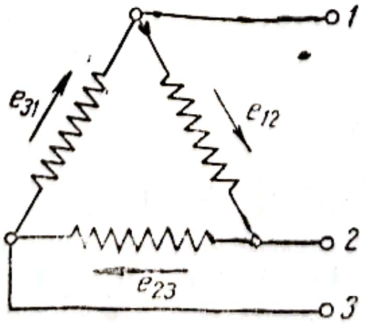


Fig. 9.21

primei armonice, $\underline{Z}_g = (1 + j\,2)\ \Omega$. Să se determine curenții și tensiunile de fază ale generatorului în gol.

9.22. Un generator trifazat simetric conectat în stea are la mers în gol valoarea eficace a tensiunii de fază 130 V și a tensiunii de linie 208 V. Știind că tensiunea electromotoare de fază a generatorului cuprinde practic numai prima și a treia armonică, să se calculeze amplitudinile acestora.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 10

CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM TRANZITORIU

A. BREVIAR

10.1. Regimurile tranzitorii. La conectarea circuitelor la sursele de tensiune continuă sau sinusoidală nu se stabilesc instantaneu curenți continui, respectiv sinusoidali; în aceste circuite apare un *regim tranzitoriu*. Teoretic, durata regimurilor tranzitorii este infinită. De obicei, după un timp de ordinul fracțiunilor de secundă sau al secundelor, valorile curenților sau tensiunilor se apropie așa de mult de valorile regimului permanent final încît regimul tranzitoriu se poate considera practic terminat.

Regimurile tranzitorii se calculează pe baza legii lui Ohm generalizate și pe baza teoremelor lui Kirchhoff în curent variabil.

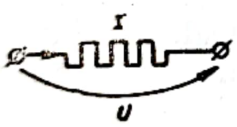


Fig. B.10.1

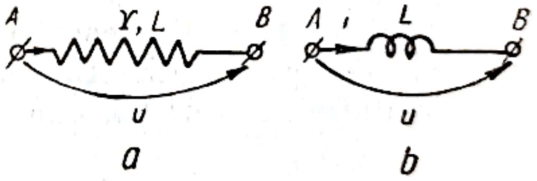


Fig. B.10.2

10.2. Rezistorul ideal în curent variabil. Tensiunea u la bornele unui rezistor ideal (fig. B.10.1) de rezistență electrică r se exprimă pe baza legii lui Ohm în forma:

$$u = ri, \tag{10.2}$$

unde i este intensitatea curentului electric.

Tensiunea electrică din lungul unui rezistor ideal (care prin definiție nu are cîmp magnetic și deci nici inductivitate) este egală cu tensiunea la bornele sale.

Scanned with OKEN Scanner

10.3. Bobina electrică. O bobină electrică (formată dintr-un conductor) de rezistență electrică r și avînd o inductivitate proprie L se reprezintă prin simbolul indicat în figura B. 10.2 *a*.

Tensiunea electromotoare de-a lungul unei curbe închise care trece prin conductorul bobinei și prin dielectricul dintre borne este:

$$\oint_{\Gamma} \bar{E}\overline{ds} = \int_{AB\,(\text{conductor})} \bar{E}\overline{ds} + \int_{BA\,(\text{dielectric})} \bar{E}\overline{ds} = ri - u. \qquad (10.3\,a)$$

Tensiunea electrică în lungul conductorului bobinei este, conform legii lui Ohm, ri, și diferă deci de tensiunea la borne u.

Aceeași t.e.m., conform legii inducției electromagnetice, are expresia:

$$\oint_{\Gamma} \bar{E}\,d\bar{s} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}, \qquad (10.3\,b)$$

unde s-a presupus inductivitatea L constantă.

Rezultă următoarea relație între tensiunea u la bornele bobinei și curentul i din bobină:

$$u = ri + L\frac{di}{dt}. \qquad (10.3\,c)$$

Pentru o bobină ideală, prin definiție $r = 0$, și deci:

$$u = L\frac{di}{dt}. \qquad (10.3\,d)$$

Simbolul bobinei ideale este indicat în figura 10.2 *b*.

10.4. Condensatorul electric ideal. Tensiunea u dintre armăturile unui condensator (fig. B. 10.3) se exprimă folosind relația de definiție a capacității electrice C, în forma:

$$u = \frac{q}{C}, \qquad (10.4\,a)$$

în care q este sarcina condensatorului electric.

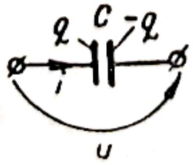


Fig. B.10.3

Intensitatea curentului electric de conducție i care încarcă condensatorul fiind:

$$i = \frac{dq}{dt}, \qquad (10.4\,b)$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă

$$i = C\frac{du}{dt} \quad (10.4\,c) \qquad \text{și} \quad u = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + \frac{q(0)}{C}, \quad (10.4\,d)$$

unde s-a notat $q(0)$ valoarea sarcinii la timpul $t = 0$.

Adeseori se notează valoarea sarcinii (la timpul t) prin:

$$q = \int i\,dt, \quad (10.4\,e)$$

subînțelegîndu-se că valoarea constantei de integrare se alege astfel încît să se obțină valoarea corespunzătoare a lui $q(t)$.

10.5. Legea lui Ohm generalizată în curent variabil. Tensiunea la bornele extreme ale unei porțiuni de circuit formate prin legarea în serie a unei surse ideale *, a unui rezistor ideal, a unei bobine ideale și a unui condensator ideal (fig. B.10.4) are expresia:

$$u + e = ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt, \quad (10.5\,a)$$

valabilă în cazul cînd notațiile corespund unui sens de referință unic (comun) pentru u, e și i.

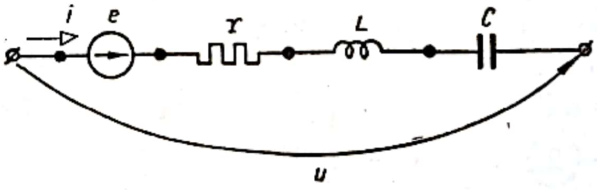


Fig. B.10.4

10.6. Prima teoremă a lui Kirchhoff în curent variabil. Suma intensităților curenților care „intră" într-un nod al unui circuit electric (fig. B. 10.5) este egală cu zero:

$$\sum i = 0. \quad (10.6)$$

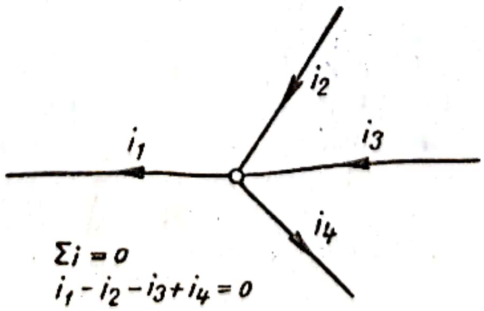


Fig. B.10.5

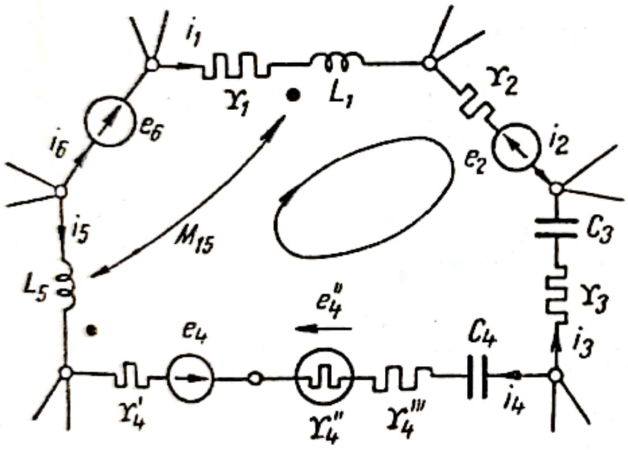
* Tensiunea electromotoare a surselor ideale reprezintă suma dintre tensiunea electromotoare a cîmpului electric imprimat (2.3 *b*) și tensiunea electromotoare indusă (6.2).

În această formulare, termenul „intră" se referă la sensul de referință comun (orientat spre nod) față de care se consideră valorile intensităților curenților.

10.7. A doua teoremă a lui Kirchhoff în curent variabil. De-a lungul oricărui contur format din laturi de circuit electric (fig. B.10.6), suma tensiunilor electromotoare este egală cu suma căderilor de tensiune rezistive ri, inductive $L\frac{di}{dt}$ și $M\frac{di}{dt}$ și capacitive $\frac{1}{C}\int i\,dt$:

$$\sum e = \sum\left(ri + L\frac{di}{dt} + M\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt\right). \qquad (10.7)$$

În formularea dată teoremei se subînțelege că se consideră un același sens (comun) de referință pentru t.e.m. și curenți.



$$r_1 i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} - M_{15}\frac{di_5}{dt} + r_2 i_2 - r_3 i_3 - \frac{1}{C_3}\int i_3 dt + \frac{1}{C_4}\int i_4 dt + r_4''' i_4 + r_4' i_4 + r_4' i_4 - L_5\frac{di_5}{dt} + M_{15}\frac{di_1}{dt} = -e_2 + e_4'' - e_4' + e_6.$$

Fig. B. 10.6

10.8. Calculul circuitelor electrice în curent variabil. Problema fundamentală a calculului circuitelor electrice o constituie calculul intensităților curenților electrici din laturile circuitului electric, atunci cînd se cunosc parametrii circuitului r, L, M, C, tensiunile electromotoare ale surselor e și un număr suficient de condiții inițiale.

Aplicînd teoremele lui Kirchhoff se poate obține un sistem de ecuații independente care permite rezolvarea problemei.

Aceste ecuații fiind ecuații integrodiferențiale, soluțiile vor conține constante arbitrare. Valorile acestora se determină în funcție de condițiile inițiale ale problemei.

10.9. Condiții inițiale în calculul regimurilor tranzitorii. O variație discontinuă a curentului dintr-o bobină ar produce, conform

legii inducției electromagnetice, o tensiune electromotoare infinită (10.3 *b*), ceea ce fizic este imposibil.

De asemenea, o variație discontinuă a sarcinii, respectiv tensiunii unui condensator electric, ar produce un curent de intensitate infinită (10.4 *c*), ceea ce este fizic imposibil.

Ca urmare, comutațiile instantanee (conectări, deconectări, comutări etc.) fizic compatibile nu produc variații discontinue ale curenților din bobine și nici variații discontinue ale sarcinilor condensatoarelor.

Valorile curenților din bobine și valorile tensiunilor condensatoarelor la $t = 0_+$ sînt egale cu valorile respective la $t = 0_-$, pentru orice comutație instantanee fizic compatibilă:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-); \quad u_c(0_+) = u_c(0_-). \tag{10.9}$$

Valorile pentru 0_+, respectiv 0_-, reprezintă limitele „la dreapta" ($t > 0$), respectiv „la stînga" ($t < 0$), pentru t tinzînd către zero.

Condițiile corespunzătoare relațiilor (10.9) exprimă condițiile inițiale ale problemelor de regim tranzitoriu al circuitelor electrice.

10.10. Metoda operațională de calcul a circuitelor electrice în curent variabil. Metoda operațională constă în calculul transformatelor Laplace ale necunoscutelor (10.10 *a*) în funcție de transformatele Laplace ale mărimilor cunoscute, pe baza legii lui Ohm, în formă operațională (10.10 *b*), și a teoremelor lui Kirchhoff, în formă operațională (10.10 *c*).

10.10 a. Transformata Laplace, denumită și *imagine Laplace,* a unei funcții $f(t)$, este, prin definiție:

$$\mathfrak{L}\{f(t)\} \equiv \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt, \tag{10.10 a}$$

unde funcția $f(t)$ și variabila complexă s satisfac, prin ipoteză, condițiile ca integrala să fie convergentă.

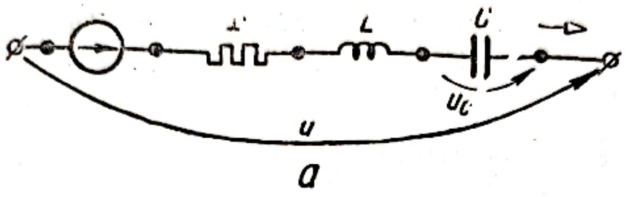
Transformatele Laplace $F(s) \equiv \mathfrak{L}\{f(t)\}$ corespunzătoare unor funcții original $f(t)$ date sînt indicate în tabela din anexa 7. Aceeași tabelă se poate utiliza la găsirea funcției original $f(t)$, corespunzătoare unei imagini date $F(s)$.

10.10 b. „Legea lui Ohm în formă operațională". Pentru elementele înseriate reprezentate în figura B.10. 7 *a*, legea lui Ohm în formă operațională are expresia:

$$U(s) + E(s) + Li(0) - \frac{u_c(0)}{s} = \left(r + sL + \frac{1}{sC}\right) I(s), \tag{10.10 b}$$

unde $U(s)$ este transformata Laplace a tensiunii; $E(s)$ — transformata Laplace a tensiunii electromotoare; $Li(0)$ — o mărime de calcul, numită tensiunea

electromotoare operațională fictivă a bobinei; — $\frac{u_c(0)}{s}$ — o mărime de calcul, numită tensiunea electromotoare operațională fictivă a condensatorului; $Z(s) = \left(r + sL + \frac{1}{sC}\right)$ — impedanța operațională a circuitului format prin legarea în serie a unui rezistor ideal r, a unei bobine ideale L și a unui condensator C; $I(s)$ — transformata Laplace a intensității curentului. Se utilizează schema echivalentă din figura B. 10.7 *b*.



a

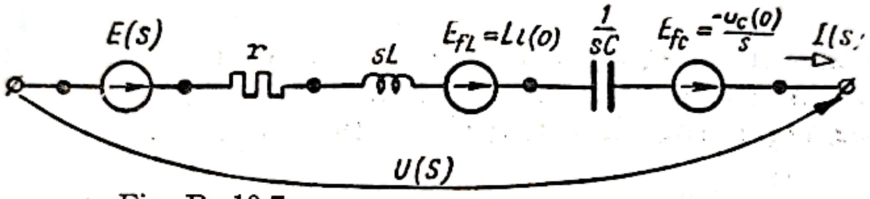


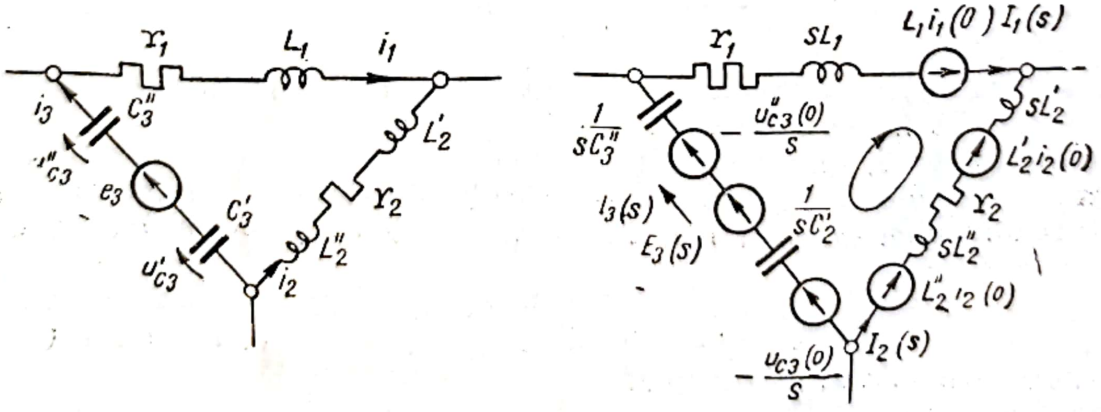
Fig. B. 10.7

b

10.10 c. Prima teoremă a lui Kirchhoff în formă operațională. Suma imaginilor (transformatelor Laplace) ale intensităților curenților care „intră" într-un nod este nulă:

$$\sum \mathrm{I}(s) = 0. \qquad (10.10c)$$

10.10 d. A doua teoremă a lui Kirchhoff în formă operațională. De-a lungul oricărui contur format din laturi de circuit electric (fig. B. 10.8), suma imaginilor t.e.m. ale surselor și a t.e.m. operaționale



$$\mathrm{E}_3(s) + L_1 i_1(0) - L_2' i_2(0) - L_2'' i_2(0) - \frac{u'_{C3}(0)}{s} - \frac{u'_{C3}(0)}{s} =$$

$$= (r_1 + sL_1)\,\mathrm{I}_1(s) - (sL_2' + r_2 + sL_2'')\,\mathrm{I}_2(s) + \left(\frac{1}{sC_2'} + \frac{1}{sC_2''}\right)\mathrm{I}_3(s)$$

Fig. B. 10.8

fictive ale bobinelor și condensatoarelor este egală cu suma căderilor de tensiune operaționale $Z(s)\ I(s)$ ale elementelor:

$$\sum\left[E(s)+Li(0)-\frac{u_c(0)}{s}\right]=\sum Z(s)\cdot I(s). \qquad (10.10\,d)$$

Se observă că impedanțele operaționale $Z(s)$ se obțin din impedanțele complexe prin înlocuirea lui $j\omega$ cu s.

10.10 e. Teoremele și metodele de calcul al circuitelor în regim tranzitoriu au o formă analogă cu cele aplicate în studiul regimului sinusoidal, atunci cînd se utilizează metoda operațională.

B. PROBLEME

10.1 (R). Se dă circuitul din figura 10.1, în care $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $L_1 = 10$ mH, $L_2 = 20$ mH și $E = 7{,}5$ V.

a) Să se calculeze curentul i din circuit după închiderea la $t = 0$ a întrerupătorului K_1, cînd întrerupătorul K_2 este deschis.

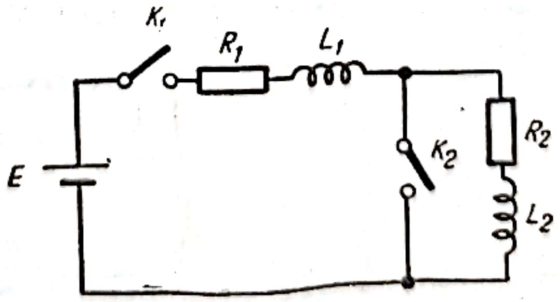


Fig. 10.1

b) După un timp $\theta = 4$ ms se închide și întrerupătorul K_2. Cum variază în timp curenții i_1 din sursă și i_2 din latura scurtcircuitată?

c) Se vor reprezenta grafic curenții $i_1(t)$ și $i_2(t)$ din momentul închiderii primului întrerupător ($t = 0$), pînă la 6 ms după închiderea celui de-al doilea întrerupător.

10.2 (I). În montajul din problema 10.1, avînd inițial în regim permanent ambele întrerupătoare închise, se deschide la momentul $t = 0$ întrerupătorul K_2. Să se determine intensitățile curenților în cele două bobine.

10.3. Să se determine capacitatea condensatorului C, inițial descărcat, legat în serie cu o rezistență $R = 100\ \Omega$, astfel ca la 10 ms după aplicarea unei tensiuni treaptă la bornele circuitului, tensiunea condensatorului să difere cu 5% de amplitudinea tensiunii la borne.

10.4 (R). Un voltmetru de rezistență internă $R_V = 5\,k\Omega$ este conectat la bornele unei bobine de inductivitate $L = 20\,H$ și rezistență $R_L = 10\ \Omega$, alimentată în curent continuu cu o tensiune $U = E = 1\ V$ (fig. 10.4). Care este tensiunea la bornele voltmetrului la deconectarea sursei?

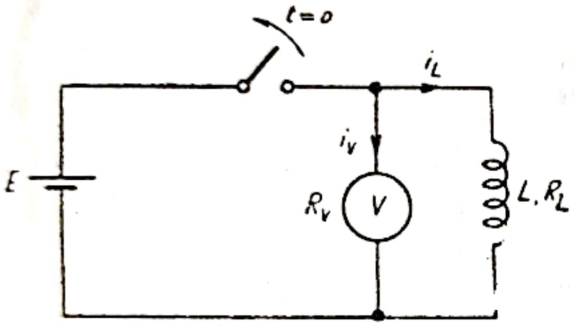


Fig. 10.4

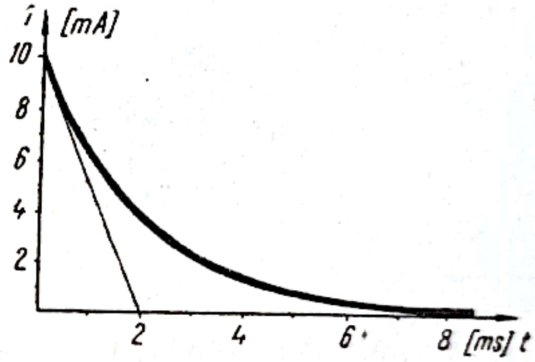


Fig. 10.5

10.5 (I). În figura 10.5 s-a reprezentat variația curentului într-un circuit RC serie, la bornele căruia se aplică, la momentul $t = 0$, o tensiune în treaptă cu amplitudinea de 10 V. Să se stabilească constanta de timp a circuitului, valoarea rezistenței R și a capacității condensatorului C.

10.6. La bornele unui circuit format dintr-o bobină de inductivitate $L = 1H$ și rezistență R_L în serie cu o rezistență R se aplică o

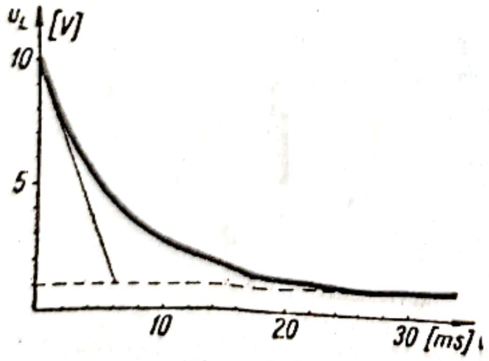


Fig. 10.6

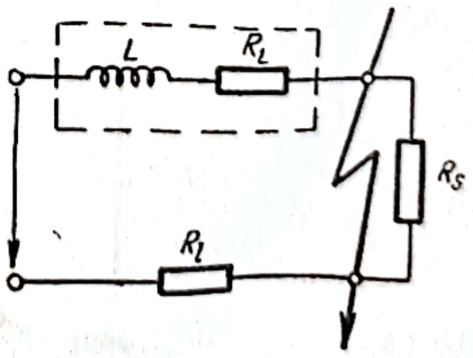


Fig. 10.7

tensiune în treaptă. Variația tensiunii la bornele bobinei fiind cea reprezentată în figura 10.6, să se stabilească valorile rezistențelor și amplitudinea tensiunii aplicate la borne.

Scanned with OKEN Scanner

10.7. Pentru protecția circuitului din figura 10.7, în caz de scurtcircuit se utilizează un releu de protecție care acționează cînd curentul din înfășurare este $I_a = 50$ A. Rezistența de sarcină a circuitului este $R_s = 18\ \Omega$, rezistența conductoarelor de legătură $R_l = 1\Omega$, iar înfășurarea releului are inductivitatea $L = 0{,}5$ H și rezistența $R_L = 1\ \Omega$. Tensiunea continuă de alimentare a circuitului fiind de 200 V, să se stabilească la cît timp după scurtcircuitarea bornelor rezistenței de sarcină releul deconectează circuitul.

10.8. Un condensator C încărcat cu sarcina q se descarcă de la $t = 0$, pe o rezistență R. Să se calculeze căldura degajată în rezistență de la $t = 0$ pînă la un moment t.

10.9. Să se deducă legea de variație în timp a energiei magnetice înmagazinate într-o bobină de inductivitate $L = 100$ H și rezistență $R = 50\ \Omega$ după conectarea la o sursă de tensiunea continuă $U = 10$ V.

10.10. Să se determine intensitatea curentului într-un circuit format dintr-o rezistență R în serie cu o bobină de inductivitate L, după aplicarea la borne la momentul $t = 0$ a unei tensiuni sinusoidale $u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma)$.

10.11. Să se rezolve problema 10.10 pentru un circuit format dintr-o rezistență R în serie cu un condensator C, inițial descărcat.

10.12. Să se rezolve problema 10.10 în cazul unui circuit R, L, C serie și să se discute soluția în funcție de valorile parametrilor. Se va considera condensatorul inițial descărcat.

10.13 (I). Să se calculeze și să se reprezinte grafic variația curentului într-un circuit format dintr-o rezistență R în serie cu o bobină de inductivitate L, cînd la borne se aplică o tensiune:

$$u = \begin{cases} U_0 \sin \omega t; & 0 \leqslant t < \dfrac{T}{2}; \\ 0 \quad ; & t \geqslant \dfrac{T}{2}. \end{cases}$$

10.14. Tensiunea definită în problema 10.13 se aplică la bornele unui circuit RC serie. Să se stabilească variația în timp a curentului, în cazul cînd condensatorul era inițial descărcat.

10.15 (R). Aplicînd la bornele unui dipol pasiv o tensiune în treaptă de amplitudine unitară, curentul prin dipol este $i_0(t)$. Care va fi curentul $i(t)$ prin dipol, cînd la borne se aplică o tensiune $u(t)$?

Scanned with OKEN Scanner

10.16. Să se aplice rezultatul problemei 10.15 pentru a rezolva problema 10.10.

10.17. Să se rezolve problema 10.13, utilizînd rezultatul problemei 10.15.

10.18. La bornele circuitului din figura 10.18 se aplică la momentul $t = 0$, o tensiune $u = U_0 e^{-\alpha t}$. Cunoscînd $U_0 = 60$ V, $R = 20\ \Omega$, $L = 0{,}1$H și $\alpha = 100\ s^{-1}$, să se calculeze curenții din laturile circuitului.

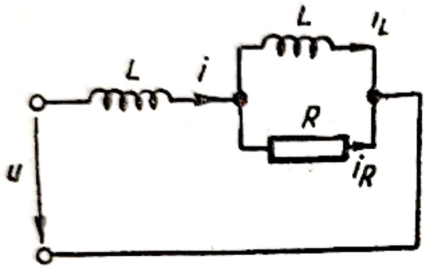


Fig. 10.18

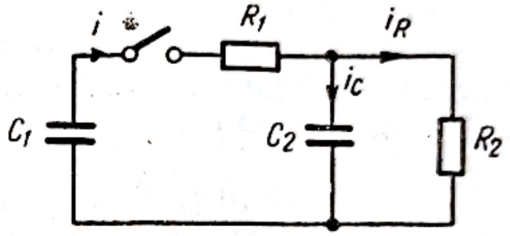


Fig. 10.19

10.19. Să se calculeze și să se reprezinte grafic variația în timp a curenților din circuitul reprezentat în figura 10.19, cînd condensatorul C_1, încărcat inițial la o tensiune U_0, se descarcă după închiderea întrerupătorului.

10.20. Să se calculeze curentul i care trece prin circuitul din figura 10.20, cînd la borne se aplică o tensiune $u = u(t)$, dacă

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

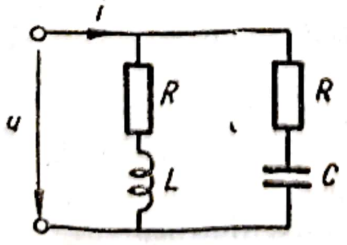


Fig. 10.20

10.21 (I). La bornele de intrare ale cuadripolilor din figura 9.12 se aplică la $t = 0$ o tensiune în treaptă de amplitudine $U_0 = 100$ V. Să se calculeze și să se reprezinte grafic tensiunea de la bornele de ieșire funcție de timp. Se va considera nulă sarcina condensatoarelor la $t=0$.

Se dau: $R = 100\ \Omega$, $C = 1\ \mu$F; $L = 10$ mH; $M = 5$ mH.

10.22(I). La bornele de intrare ale cuadripolilor din problema 10.21 se aplică succesiunea de impulsuri dreptunghiulare cu amplitudinea $U_0 = 100$ V, reprezentate în figura 10.22. Să se calculeze tensiunea la bornele de ieșire cînd durata T_i a impulsurilor este : *a*. $T_{i1} = 1$ ms ; *b*. $T_{i2} = 100\,\mu$s ; *c*. $T_{i3} = 10\,\mu$s.

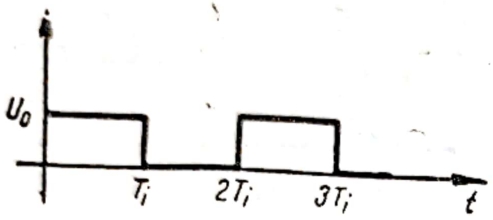


Fig. 10.22

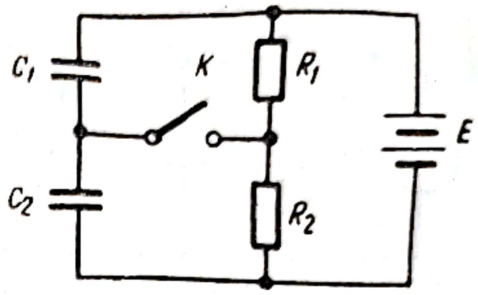


Fig. 10.23

10.23. Să se găsească variația în timp a tensiunii la bornele condensatoarelor C_1 și C_2 din circuitul reprezentat în figura 10.23, după închiderea la $t = 0$ a întrerupătorului K. Se dau :

$$C_1 = 1\ \mu\text{F};\ C_2 = 2\ \mu\text{F};\ R_1 = 1\ \text{k}\Omega;\ R_2 = 2\ \text{k}\Omega \text{ și } E = 12\ \text{V}.$$

10.24*. La bornele unui circuit R, L, C serie în care $L = 1$ mH și $C = 1\ \mu$F se aplică o tensiune în treaptă de amplitudine $U_0 = 100$V. Considerînd condensatorul descărcat și bobina nestrăbătută de curent în momentul aplicării tensiunii, se cer :

a) valoarea rezistenței R pentru care tensiunea maximă la bornele condensatorului C este $U_{C\,max} = 150$ V ;

b) momentul atingerii maximului ;

c) reprezentarea grafică a variației în timp a tensiunii la bornele condensatorului.

10.25. Să se calculeze regimul tranzitoriu care apare în circuitul din figura 10.25, dacă la momentul $t = 0$ se deplasează întrerupătorul K de pe poziția *1* pe poziția *2*.

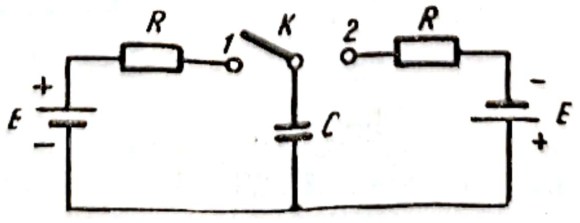


Fig. 10.25

10.26. La bornele circuitului din figura 10.26, în care $R = 1\ \text{k}\Omega$ și $C = 10\ \mu$F, este aplicată o tensiune sinusoidală de 220 V

și 50 Hz. Cînd curentul total trece prin zero, (în regim permanent) se deschide întrerupătorul K și astfel se deconectează circuitul. Să se stabilească variația în timp a tensiunii la bornele condensatorului.

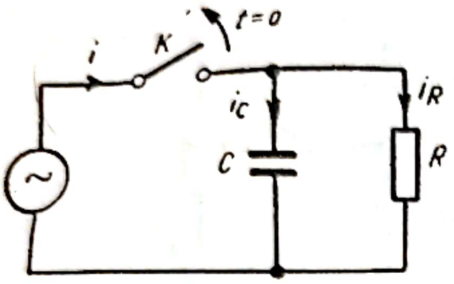


Fig. 10.26

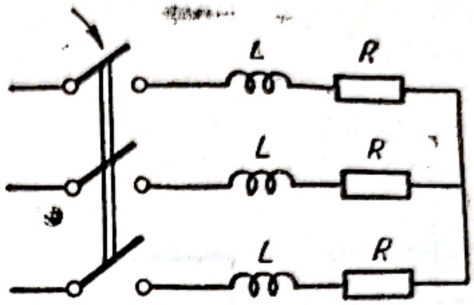


Fig. 10.27

10.27 (I). Un receptor trifazat simetric este alcătuit din trei bobine de inductivitate $L = 50$ mH și $R = 10\ \Omega$, legate în stea ca în figura 10.27. Să se stabilească regimul tranzitoriu produs la conectarea receptorului la rețeaua trifazată de 208 V și 50 Hz, dacă în momentul conectării tensiunea din faza întîi avea unghiul de fază nul.

10.28 (I). Să se determine curentul care trece prin rezistența r în circuitul reprezentat în figura 10.28, după închiderea la momentul $t = 0$ a întrerupătorului K, dacă $R\,C = R'C'$.

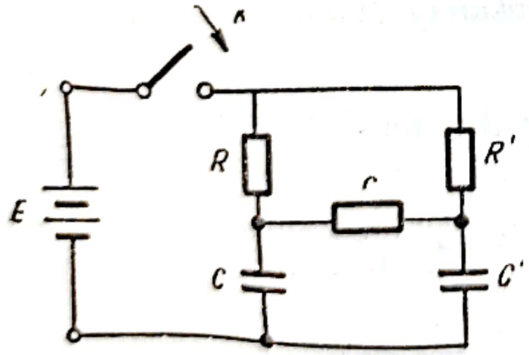


Fig. 10.28

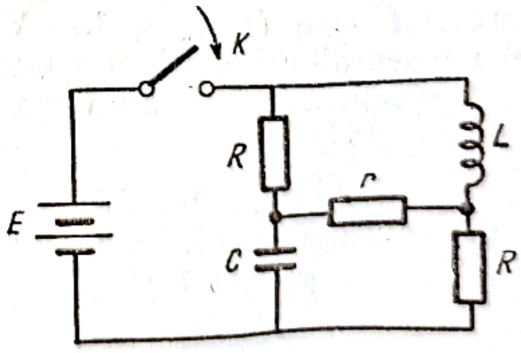


Fig. 10.29

10.29. Să se calculeze curentul care trece prin rezistența r din circuitul din figura 10.29, după închiderea întrerupătorului. Se dă:

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

10.30. Pentru circuitul reprezentat în figura 10.30 se cunosc: $E = 18$ V, $R_1 = R_4 = 300\ \Omega$, $R_2 = R_3 = 600\ \Omega$, $C = 1\,\mu$F. Să se stabilească variația în timp a tensiunii la bornele condensatorului C, după închiderea la $t = 0$ a întrerupătorului K, considerînd inițial condensatorul descărcat.

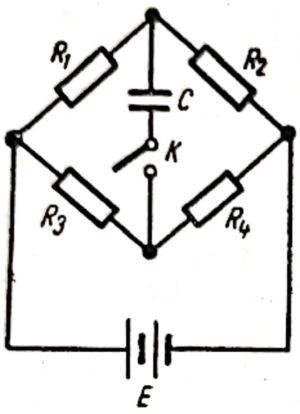


Fig. 10.30

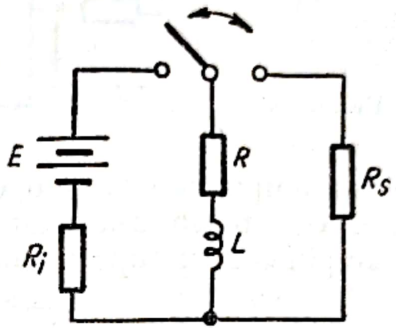


Fig. 10.31

10.31*(I). O bobină cu inductivitatea $L = 10$ mH și rezistența $R = 9\ \Omega$ este conectată periodic la o sursă de tensiune electromotoare $E = 2$ V și rezistență internă $R_i = 1\Omega$ și apoi la bornele unei rezistențe $R_s = 6\ \Omega$ (fig. 10.31). Timpul de comutare fiind nul și timpul cît stă comutatorul pe cele două poziții fiind același $\frac{T}{2} = 1$ ms, se cere variația în timp a curentului în bobină și puterea medie disipată în rezistența R, după un număr mare de comutări.

10.32*(I). La bornele de intrare ale circuitului din figura 10.32 se aplică succesiunea de impulsuri dreptunghiulare reprezentată în figura 10.22. Să se calculeze și să se reprezinte grafic variația în timp a

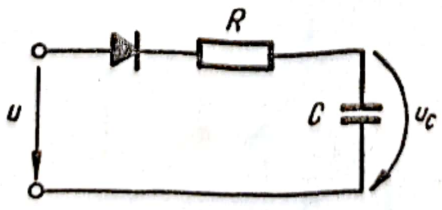


Fig. 10.32

tensiunii la bornele condensatorului $C = 1\,\mu$F, dacă durata impulsurilor este $T = 1$ ms și valoarea rezistenței $R = 10$ kΩ.

10.33(I). Să se demonstreze că tensiunea $u_2(t)$ de la ieșirea circuitului din figura 10.33 este proporțională cu integrala în timp a tensiunii $u_1(t)$ aplicate la intrare. Între tensiunile u'_1 și u_2 de la intrarea,

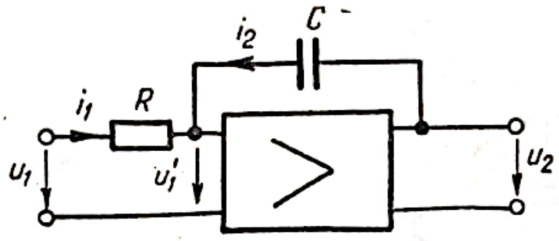


Fig. 10.33

respectiv ieșirea amplificatorului operațional, există relația : $u_2 = -Au'_1$. Amplificarea A este presupusă mult mai mare decît unitatea, iar curentul absorbit de amplificatorul operațional este neglijabil.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 11

CIRCUITE ELECTRICE NELINIARE ÎN CURENT ALTERNATIV

A. BREVIAR

11.1. Circuitul neliniar este descris de ecuațiile lui Kirchhoff (10.6) și (10.7), în care cel puțin una din rezistențele, inductivitățile sau capacitățile laturilor circuitului depinde de mărimea curentului din latura respectivă.

11.2. Rezistența neliniară este caracterizată de o relație între tensiunea la borne și curent de forma :

$$u = u(i), \qquad (11.1\ a)$$

numită caracteristica tensiune-curent și cunoscută de obicei sub formă grafică (fig. B.11.1).

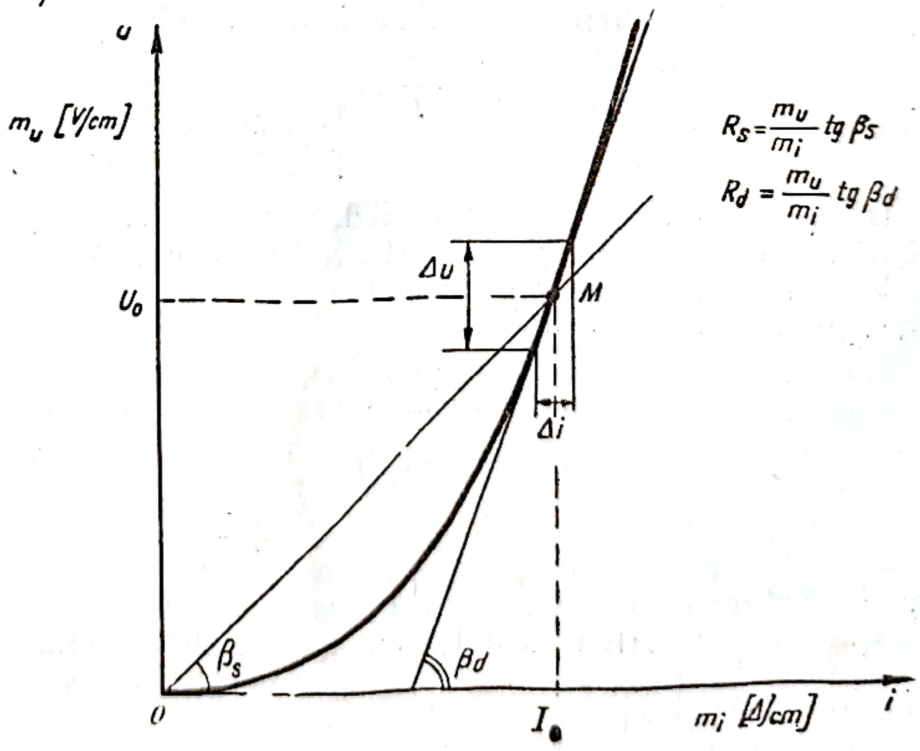


Fig. B.11.1

Scanned with OKEN Scanner

Punctul static de funcționare este punctul M de pe caracteristica tensiune-curent, ale cărei coordonate sînt curentul continuu I_0 și tensiunea continuă U_0 la bornele rezistenței neliniare. Pentru o rezistență neliniară se definesc următorii parametri:

Rezistența statică sau de curent continuu:

$$R_s = R_{cc} = \frac{U_0}{I_0}. \qquad (11.1\ b)$$

În curent continuu, pentru o valoare dată a intensității curentului, rezistența neliniară este echivalentă cu o rezistență liniară egală ca valoare cu rezistența ei statică. Caracteristica tensiune-curent a rezistenței echivalente este reprezentată în figura B. 11.1 prin dreapta OM.

Rezistența dinamică sau internă se definește prin relația:

$$R_d = R_i = \frac{du}{di} \simeq \frac{\Delta u}{\Delta i} \qquad (11.1\ c)$$

și caracterizează comportarea rezistenței neliniare pentru variații mici ale curentului, respectiv tensiunii, în jurul valorii de curent continuu. Reprezentarea grafică a caracteristicii tensiune-curent pentru rezistența dinamică este dreapta tangentă MT din figura B.11.1.

Rezistența echivalentă în curent alternativ. Aplicînd o tensiune sinusoidală la bornele unei rezistențe neliniare, aceasta va fi parcursă de un curent nesinusoidal. Rezistența echivalentă în curent alternativ se definește ca raportul dintre valoarea eficace U a tensiunii sinusoidale aplicate la borne și valoarea eficace I a curentului nesinusoidal care străbate rezistența neliniară:

$$R_{ca} = \frac{U}{I} = \frac{U}{\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}}. \qquad (11.1\ d)$$

Din punctul de vedere al puterii disipate, rezistența neliniară este echivalentă în curent alternativ cu rezistența liniară R_{ca}. Valoarea rezistenței echivalente în curent alternativ depinde de amplitudinea tensiunii sinusoidale aplicate rezistenței neliniare.

11.3. Bobina cu miez feromagnetic

Ecuația de funcționare a unei bobine este:

$$u = Ri + \frac{d\varphi}{dt}, \qquad (11.3\ a)$$

unde R este rezistența înfășurării, iar φ fluxul bobinei.

Datorită saturării miezului feromagnetic (fig. B.11.2), fluxul bobinei nu variază liniar cu curentul, ceea ce se reflectă asupra parametrilor caracteristici ai bobinei.

Scanned with OKEN Scanner

Inductivitatea statică sau de curent continuu se definește ca raportul dintre fluxul bobinei și curentul ce o străbate:

$$L_s = L_{cc} = \frac{\Phi_0}{I_0}. \qquad (11.3\ b)$$

Inductivitatea statică a unei bobine cu miez feromagnetic depinde de valoarea curentului continuu ce o parcurge, scăzînd o dată cu creșterea acestuia.

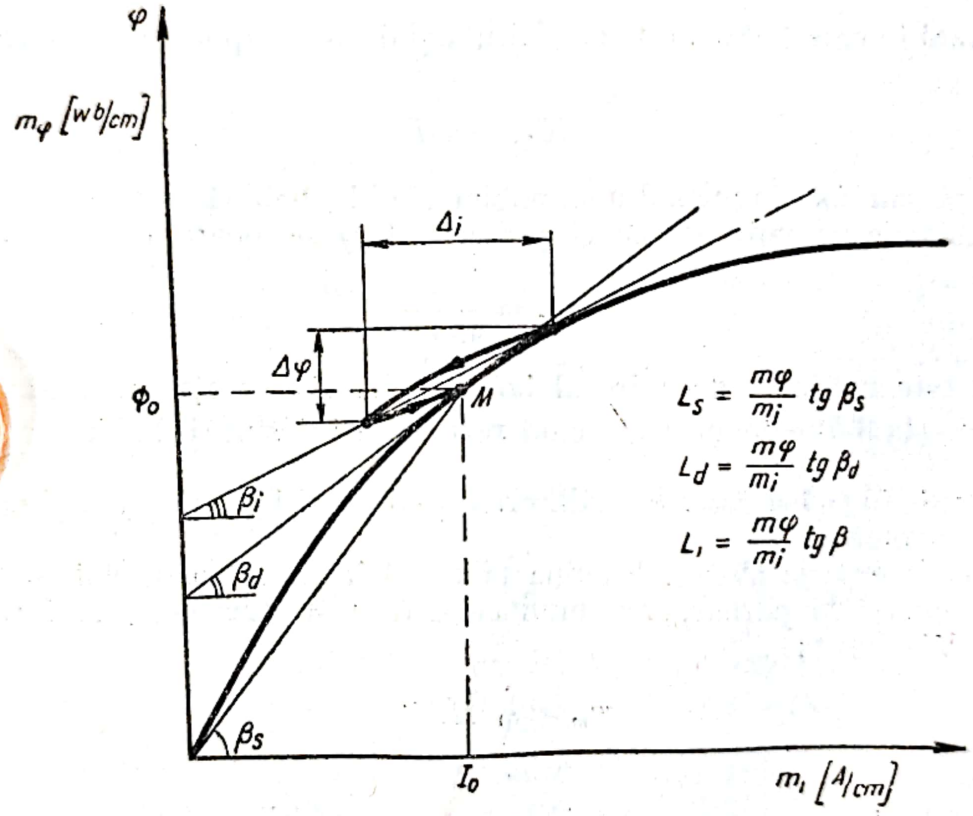


Fig. B.11.2

Inductivitatea dinamică se definește ca limita raportului dintre creșterea fluxului $\Delta\varphi$ și creșterea corespunzătoare a intensității curentului Δi, cînd acesta tinde către zero:

$$L_d = \lim_{\Delta i \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta i} = \frac{d\varphi}{di}. \qquad (11.3\ c)$$

Inductivitatea incrementală caracterizează comportarea bobinei cu fier la variațiile curentului în jurul valorii de curent continuu și se definește cu relația:

$$L_i = \frac{\Delta\varphi}{\Delta i}. \qquad (11.3\ d)$$

Inductivitatea incrementală este inductivitatea echivalentă în curent alternativ cînd bobina este parcursă simultan de un curent alternativ de mică amplitudine și de o componentă de curent continuu mult mai mare. Pentru materialele magnetice cu ciclu histerezis îngust, inductivitatea incrementală este aproximativ egală cu inductivitatea dinamică.

Reactanța echivalentă a unei bobine parcursă de un curent alternativ de pulsație ω este:

$$X_L = \omega L_{ca}, \tag{11.3 f}$$

iar în cazul în care bobina este străbătută și de o componentă de curent continuu:

$$X_{L_i} = \omega L_i \tag{11.3 g}$$

Inducția maximă în miezul unei bobine cînd la bobină se aplică o tensiune sinusoidală de valoare eficace U și frecvența f se poate calcula cu relația:

$$B_m = \frac{U}{4{,}44\, fwS} \tag{11.3 h}$$

unde w este numărul de spire al bobinei, iar S — secțiunea miezului.

Relația (11.3 *h*) este valabilă cînd rezistența înfășurării bobinei este neglijabilă.

Pierderile în fierul bobinei se datoresc existenței histerezisului și curenților induși (turbionari).

Pierderile prin histerezis. Energia pierdută în unitatea de volum a circuitului magnetic la parcurgerea unui ciclu de histerezis este, conform teoremei lui Warburg:

$$w_m = \oint_c H\mathrm{d}B \tag{11.3 i}$$

și este egală, la scara corespunzătoare a reprezentării grafice, cu aria ciclului histerezis.

Puterea pierdută prin histerezis se poate calcula cu relația lui Steinmetz:

$$P_H = \eta B_m^n f V, \tag{11.3 j}$$

unde coeficientul η și exponentul $n = 1{,}5—2$ depind de natura materialului și se determină empiric, iar V este volumul efectiv al materialului feromagnetic al bobinei.

Pierderile prin curenți induși se calculează cu o relație de forma:

$$P_F = K_F B_m^2 f^2 V, \tag{11.3 k}$$

unde K_F este un coeficient care depinde de natura materialului și a circuitului magnetic.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul cînd circuitul magnetic este alcătuit din tole, coeficientul K_F se poate calcula cu relația:

$$K_F = 1{,}64 \cdot 10^{-6} \sigma \Delta^2, \qquad (11.3\,l)$$

unde σ este conductibilitatea tolelor în $\Omega^{-1} m^{-1}$, iar Δ — grosimea tolei, în mm.

B. PROBLEME

11.1 (R). Caracteristica unei diode cu vid poate fi exprimată analitic cu relația:

$$i_A = A u_A^{3/2},$$

unde $A = 5 \cdot 10^{-5}$ amper · volt$^{-3/2}$

Se cere să se determine:

a) rezistența statică și rezistența dinamică a diodei polarizate cu o tensiune continuă $U_A = 16$ V;

b) rezistența echivalentă în curent alternativ a diodei, cînd la borne se aplică o tensiune sinusoidală de valoare eficace $U_a = 10$ V.

11.2 (R). Un termistor avînd caracteristica tensiune-curent din figura 11.2 *a* este montat în serie cu un condensator $C = 160$ nF, ca în figura 11.2 *b*.

a) Care este forma de undă a curentului în regim permanent, cînd tensiunea aplicată la borne este sinusoidală, de frecvență 1 000 Hz?

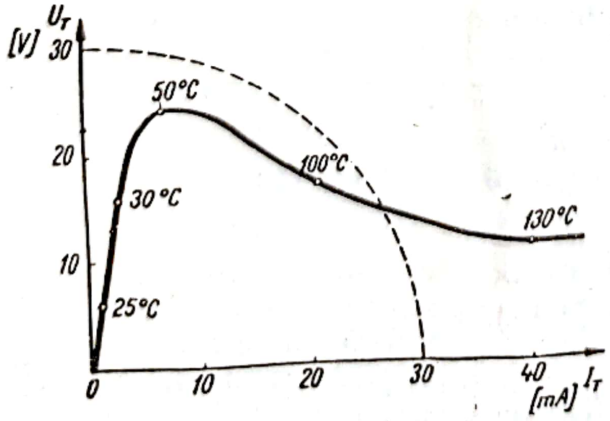
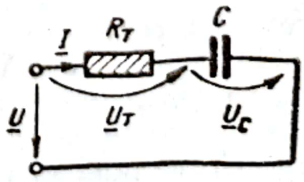


Fig. 11.2 *a*

Fig. 11.2 *b*



b) Să se calculeze valoarea eficace a curentului care străbate circuitul, cînd la borne se aplică o tensiune sinusoidală în valoare eficace 30 V și frecvență 1 000 Hz.

11.3 (R). Dioda din problema 11.1 este conectată în serie cu un condensator $C = 1{,}6\,\mu F$, ca în figura 11.3. Să se calculeze valoarea eficace a curentului din circuit cînd la borne se aplică o tensiune sinusoidală de valoare eficace $U = 1$ V și frecvență 50 Hz, dacă valoarea tensiunii electromotoare a sursei de polarizare a diodei este $E = 16$ V.

Inductivitatea bobinei L_d a fost aleasă astfel încît la frecvența de lucru de 50 Hz reactanța ei să fie mult mai mare decît rezistența diodei și curentul alternativ să treacă practic numai prin diodă.

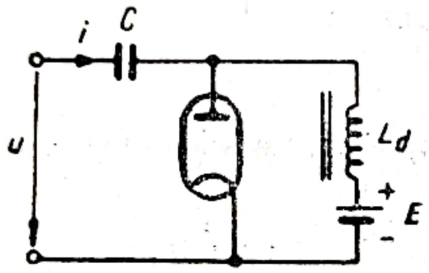


Fig. 11.3

11.4 (R). O bobină are 800 de spire bobinate pe un miez cu dimensiunile din figura 11.4 *a* în milimetri, alcătuit din tole de oțel, avînd curba de magnetizare din figura 11.4 *b*. Să se stabilească amplitudinea

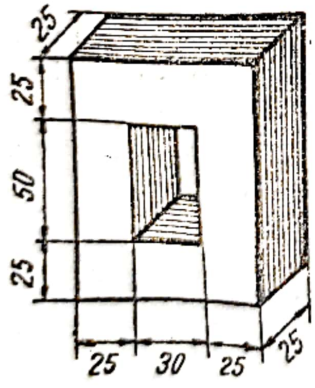


Fig. 11.4 *a*

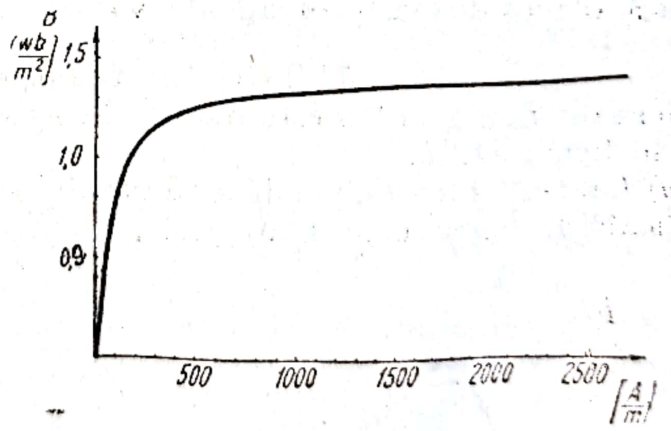


Fig. 11.4 *b*

curentului care străbate înfășurarea bobinei, cînd aceasta este alimentată cu o tensiune de 120 V și 50 Hz. Se neglijează rezistența înfășurării bobinei, ciclul de histerezis, pierderile în fier și fluxul de dispersiune.

11.5 (I). Să se rezolve problema 11.4, dacă circuitul magnetic al bobinei are un întrefier de 4 mm.

Scanned with OKEN Scanner

11.6 (I). Să se stabilească grafic variația în timp a curentului care străbate înfășurarea bobinei din problema 11.4, presupunînd tensiunea la borne sinusoidală.

11.7 (I). Prin înfășurarea bobinei din problema 11.4 trece un curent :

$$i = (40 + 20 \sin \omega t) \text{ mA}.$$

Să se stabilească grafic curba de variație în timp a inducției magnetice și a fluxului magnetic al bobinei.

11.8 (I) *a)* Să se calculeze inductivitatea de curent continuu a bobinei din problema 11.4, cînd prin înfășurarea acesteia trece un curent :

1. $I_0 = 20$ mA; 2. $I_0 = 60$ mA; 3. $I_0 = 100$ mA

b) Să se calculeze inductivitățile dinamice ale bobinei pentru valorile de curent continuu date la punctul *a*.

11.9 (R). Să se calculeze pierderile prin curenți turbionari în fierul bobinei din problema 11.4, dacă tolele au grosimea $\Delta = 0{,}35$ mm și rezistivitatea $\rho = 15 \cdot 10^{-6}\ \Omega$ cm, iar factorul de umplere mediu al miezului bobinei este 0,9.

11.10 (R). Miezul unei bobine cu fier are volumul $V = 80$ cm³. La alimentarea bobinei cu o tensiune sinusoidală de frecvență 50 Hz, inducția maximă în fier este $B_m = 1{,}2$ Wb/m². Să se calculeze pierderile prin histerezis ale bobinei, dacă în relația lui Steinmetz coeficientul în unități MKSA este $\eta = 150$, iar exponentul $n = 1{,}6$. Factorul de umplere al miezului bobinei este 0,91.

11.11. Care sînt pierderile datorită curenților induși în fierul bobinei din problema 11.10, dacă grosimea tolelor este 0,5 mm și rezistivitatea $\rho = 0{,}1\ \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$?

11.12 (R). Secțiunea miezului unei bobine este de 50 cm², lungimea fibrei medii 80 cm, greutatea 12,6 kg, iar caracteristica de magnetizare a materialului este reprezentată în figura 11.4 *b*.

Se cere să se stabilească :

a) Numărul de spire al bobinei, astfel încît la alimentarea acesteia cu o tensiune sinusoidală de valoare eficace de 220 V și frecvență 50 Hz inducția maximă în fier să aibă valoarea de 1 Wb/m² pentru care pierderea specifică în fier este de 1,5 W/kg.

b) Valoarea eficace a curentului și factorul de putere al bobinei în acest caz.

c) Schemele echivalente derivație și serie ale bobinei.

Se neglijează rezistența înfășurării și fluxul de dispersiune.

11.13 (R). La ieșirea unui redresor se utilizează ca filtru o bobină avînd $w = 400$ spire, secțiunea miezului $S = 50$ cm² și lungimea fibrei medii $l = 80$ cm. Să se stabilească mărimea întrefierului necesar ca bobina să aibă o reactanță maximă pentru filtrarea armonicelor curentului redresat. Curentul continuu al redresorului este $I_0 = 5$ A. Curba de magnetizare și curba de variație a permeabilității dinamice a miezului de oțel cu intensitatea cîmpului magnetic sînt reprezentate în figura 11.13.

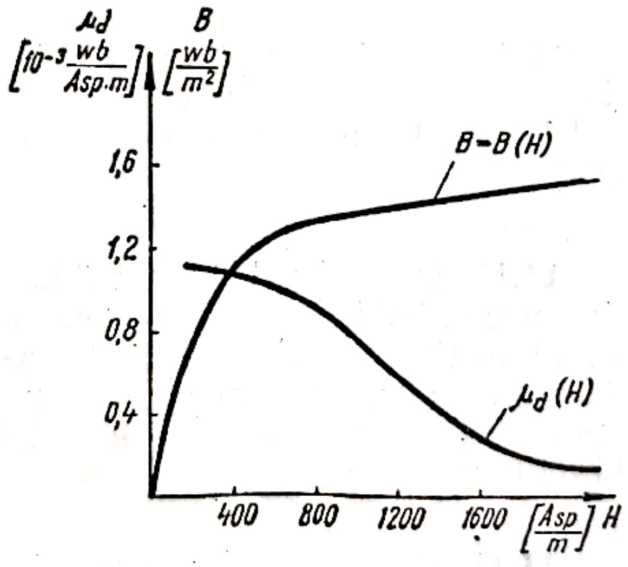


Fig. 11.13

11.14. Pe miezul din oțel reprezentat în figura 11.4 *a* și a cărui curbă de magnetizare este dată în figura 11.14 sînt bobinate 2 000 de spire.

a) Să se calculeze care trebuie să fie curentul în bobină, pentru ca punctul de funcționare pe curba de histerezis să fie A, respectiv B.

Scanned with OKEN Scanner

b) Care este inductivitatea de curent continuu a bobinei în fiecare din cele două cazuri?

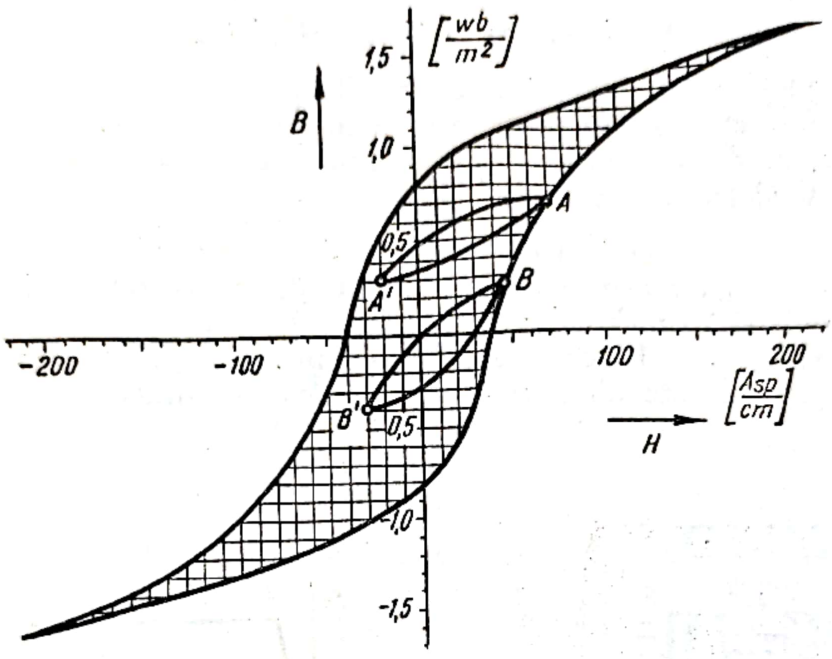


Fig. 11.14

11.15. Care este amplitudinea variației curentului care străbate înfășurarea bobinei din problema 11.14, cînd punctul de funcționare parcurge ciclul $AA'A$, respectiv $BB'B$, din figura 11.14?

11.16 (I). Să se determine inductivitatea incrementală a bobinei din problema 11.14 în punctele A și B, dacă la variații ale curentului din bobină punctul de funcționare parcurge ciclurile AA', și respectiv BB', din figura 11.14.

11.17 (R). Să se calculeze puterea pierdută în histerezis în circuitul magnetic din problema 11.14, cînd prin înfășurarea bobinei trece un curent $i = 3 \sin 314t$ A.

11.18 (I). Să se aproximeze caracteristica de magnetizare din figura 11.4 *b*, cu o expresie analitică de forma :

$$H = a_1 B + a_3 B^3 + a_5 B^5 ,$$

astfel încît eroarea să fie nulă pentru $H = 200 \frac{\text{A}}{\text{m}}$, $400 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ și $800 \frac{\text{A}}{\text{m}}$.

Să se reprezinte grafic relația aproximativă obținută și să se compare cu caracteristica reală.

11.19. Un circuit magnetic toroidal de secțiune 4 cm² și avînd lungimea fibrei medii 10 cm este realizat dintr-un oțel a cărui curbă de magnetizare se poate aproxima analitic cu relația :

$$H = 300\ B + 600\ B^3\ \text{A/m},$$

inducția magnetică fiind exprimată în Wb/m².

Bobina avînd $w = 1\,000$ spire se cere armonica întîi și valoarea eficace a curentului, cînd tensiunea de alimentare este sinusoidală de valoare eficace 120 V și frecvența 50 Hz.

11.20*(R). Pentru obținerea unor impulsuri de tensiune scurte, sincrone cu o tensiune sinusoidală dată, se utilizează pic-transformatorul din figura 11.20 *a*. Circuitul magnetic este din permalloy și are secțiunile coloanelor $S_1 = S_3 = 12$ cm² și $S_2 = 4$ cm². Înfășurarea primară *1* are $w_1 = 800$ spire și este alimentată cu o tensiune sinusoidală de 220 V și

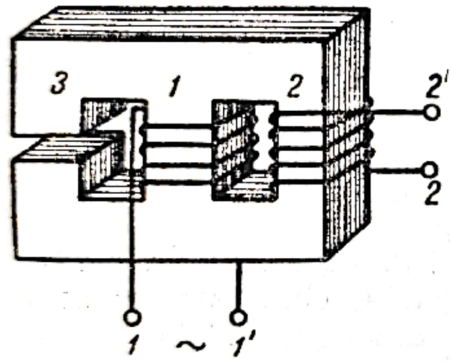


Fig. 11.20 *a*

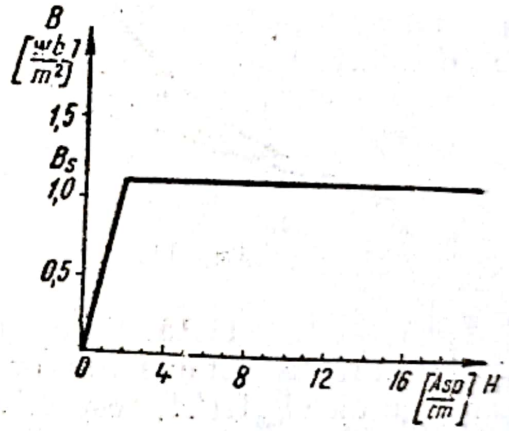


Fig. 11.20 *b*

50 Hz. Cît timp fluxul nu depășește valoarea de saturație a coloanei *2*, reluctanța acesteia este mult mai mică decît a coloanei *3*, care cuprinde un întrefier, și practic tot fluxul trece prin înfășurarea secundară *2*. Cînd se depășește valoarea de saturație a coloanei *2*, restul fluxului bobinei *1* trece prin coloana *3*.

Se cere să se calculeze durata și amplitudinea impulsurilor de tensiune induse în înfășurarea *2* care are $w_2 = 1\,600$ spire. Caracteristica de magnetizare pentru miezul de permalloy poate fi aproximată prin segmente de dreaptă, ca în figura 11.20 *b*.

11.21 (R). Pe un miez din oțel de secțiune 1 cm² și avînd lungimea fibrei medii 16 cm sînt bobinate trei înfășurări, ca în figura 11.21. Prima înfășurare de comandă are $w_1 = 400$ spire și este parcursă de un curent care determină starea de magnetizare a miezului feromagnetic, modificînd inductivitatea mutuală între înfășurarea *2* de alimentare avînd $w_2 = 30$ spire și înfășurarea *3* de ieșire cu $w_3 = 85$ spire.

Să se determine tensiunea în gol la bornele înfășurării de ieșire, cînd înfășurarea *2* este alimentată cu un curent sinusoidal de valoare eficace $I_2 = 0{,}4$ A, iar prin înfășurarea de comandă trece un curent continuu:

a) $I_1 = 0{,}16$ A; *b)* $I_1 = 0{,}48$ A; *c)* $I_1 = 0{,}80$ A.

Curba de magnetizare a oțelului este reprezentată în figura 11.13

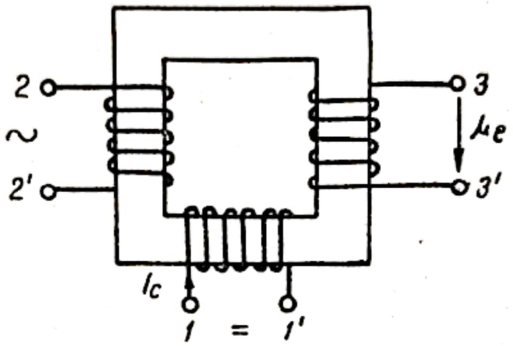


Fig. 11.21

11.22 (I). Legătura dintre valoarea eficace a tensiunii aplicate la bornele circuitului ferorezonant serie din figura 11.22 *a* și

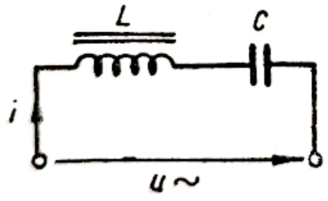


Fig. 11.22 *a*

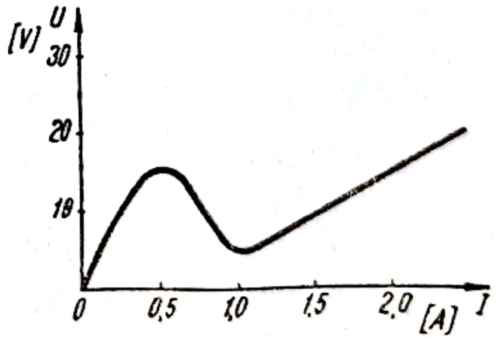


Fig. 11.22 *b*

valoarea eficace a curentului care îl parcurge este reprezentată grafic în figura 11.22 *b*. Să se stabilească variația curentului în circuit cînd tensiunea variază între zero și 20 V.

III.

APLICAȚII TEHNICE ALE FENOMENELOR ELECTRICE ȘI MAGNETICE

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 12

MĂSURĂRI ELECTRICE

A. BREVIAR

12.1. Erori de măsurare. Rezultatul unei măsurători nu este niciodată riguros egal cu valoarea reală a mărimii măsurate. De aceea, în afara rezultatului măsurătorii, trebuie cunoscută și eroarea de măsurare, care este o măsură a aproximației ce se face cînd se consideră rezultatul obținut ca valoare reală a mărimii măsurate.

Erorile care afectează o măsurătoare sînt de două tipuri: *erori sistematice* — datorite metodei de măsurare utilizate sau unor factori exteriori care influențează la fel toate determinările — și *erori accidentale* — datorite unor factori exteriori necontrolabili care se schimbă de la o determinare la alta, precum și datorite experimentatorului. Erorile sistematice pot fi principial cunoscute și înlăturate prin corectarea rezultatului final al determinărilor, pe cînd erorile accidentale, avînd un caracter statistic, nu pot fi eliminate total.

12.2. Eroarea absolută a unei determinări se definește ca diferența între rezultatul acesteia x_m și valoarea reală x a mărimii măsurate:

$$\Delta x = x_m - x. \tag{12.2}$$

12.3. Eroarea relativă a unei determinări se definește ca raportul între eroarea absolută și valoarea reală a mărimii de măsurat și se exprimă de obicei în procente:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x} 100\% \simeq \frac{\Delta x}{x_m} 100\% \tag{12.3}$$

12.4. Eroarea relativă nominală a unui aparat de măsură este raportul dintre eroarea absolută și valoarea maximă (nominală) de pe scala de măsură a aparatului, calculată în procente:

$$\varepsilon_N = \frac{\Delta x}{x_{max}} 100\% = \frac{\Delta x}{x_N} 100\%. \tag{12.4}$$

Scanned with OKEN Scanner

12.5. Clasa de precizie a unui aparat este eroarea relativă nominală maxim admisibilă pe care o poate avea aparatul conform standardelor sau instrucțiunilor.

12.6. Corecția. În cazul cînd eroarea este în principal sistematică, rezultatul măsurătorii se poate corecta adunînd la valoarea măsurată x_m corecția, egală prin definiție cu eroarea absolută, luată cu semn schimbat:

$$a = -\Delta x = x - x_m \qquad (12.6\ a)$$

sau înmulțind valoarea determinată cu *factorul de corecție* definit ca raportul dintre valoarea reală și cea măsurată:

$$k = \frac{x}{x_m}. \qquad (12.6\ b)$$

Corecția și factorul de corecție pot fi cunoscuți și utilizați numai pentru eliminarea erorilor sistematice.

12.7. Valoarea probabilă a unei mărimi pentru determinarea căreia s-a efectuat un număr mare de măsurători succesive este egală cu media valorilor x_k $(k = 1,2.,..,n)$ găsite:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k. \qquad (12.7)$$

12.8. Eroarea probabilă b, definită astfel încît probabilitatea ca eroarea reală să depășească eroarea b să fie de 50%, se calculează cu relația:

$$b = 0{,}6745\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - x)^2}{n(n-1)}}. \qquad (12.8)$$

Relația este valabilă numai pentru un număr suficient de mare de determinări, astfel încît să se poată aplica metodele statistice de studiu.

12.9. Rezultatul măsurătorii. În cazul unui șir numeros de măsurători rezultatul se pune sub forma:

$$x = \bar{x} \pm b. \qquad (12.9\ a)$$

Pentru citirile efectuate la un aparat de măsură rezultatul se poate pune sub forma:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x_{max}, \qquad (12.9\ b)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$\Delta x_{max} = \varepsilon_N \cdot x_{max}, \tag{12.9 c}$$

este eroarea maximă admisibilă a aparatului utilizat.

12.10. Erori compuse. Determinarea unei mărimi y ca funcție de mărimile x_i măsurate direct:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N) \tag{12.10 a}$$

este afectată de *eroarea absolută*:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i, \tag{12.10 b}$$

a cărei *valoare maximă posibilă* este:

$$\Delta y_{max} = \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_{i_{max}} \right|. \tag{12.10 c}$$

Eroarea relativă maximă posibilă corespunzătoare va fi:

$$\varepsilon_{ymax} = \frac{\Delta y_{max}}{y} = \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\Delta x_{i_{max}}}{y} \right|, \tag{12.10 d}$$

Sînt întîlnite frecvent cazurile particulare:

$$y = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \ldots x_i^{\alpha_i} \ldots x_N^{\alpha_N}, \tag{12.10 e}$$

pentru care

$$\varepsilon_{ymax} = \sum_{i=1}^{N} \left| \alpha_i \, \varepsilon_{xi_{max}} \right|, \tag{12.10 f}$$

unde $\varepsilon_{xi_{max}}$ sînt erorile relative maxime ale mărimilor x_i măsurate direct;

$$y = \sum_{i=1}^{N} A_i x_i \tag{12.10 g}$$

pentru care

$$\varepsilon_{ymax} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left| A_i \, \Delta x_{i_{max}} \right|}{\sum_{i=1}^{N} A_i \, x_i}. \tag{12.10 h}$$

Scanned with OKEN Scanner

12.11. Sensibilitatea unui aparat de măsură este raportul dintre indicația acestuia și valoarea mărimii măsurate:

$$S = \frac{\alpha}{x}\ \mathrm{div}/U_x, \tag{12.11}$$

unde U_x este unitatea utilizată pentru exprimarea valorii mărimii x, iar α — indicația aparatului.

12.12. Constanta aparatului de măsură este definită ca raportul dintre valoarea mărimii măsurate și indicația aparatului:

$$C = \frac{x}{\alpha}\ U_x/\mathrm{div}. \tag{12.12 a}$$

Evident

$$C = \frac{1}{S}. \tag{12.12 b}$$

12.13. Șunturile. Rezistența șuntului care montat în paralel cu un ampermetru de rezistență internă R_A îi lărgește domeniul de măsură de n_A ori se calculează cu formula:

$$R_s = \frac{R_A}{n_A - 1}. \tag{12.13}$$

12.14. Rezistența adițională care montată în serie cu un voltmetru de rezistență internă R_V îi lărgește domeniul de măsură de n_V ori se calculează cu formula:

$$R_{Ad} = R_V\ (n_V - 1). \tag{12.14}$$

12.15. Măsurarea puterii în circuitele monofazate se poate efectua cu wattmetrul electrodinamic,* a cărui bobină de curent se montează în serie și a cărui bobină de tensiune se montează în paralel cu circuitul, ca în figura B.12.1.

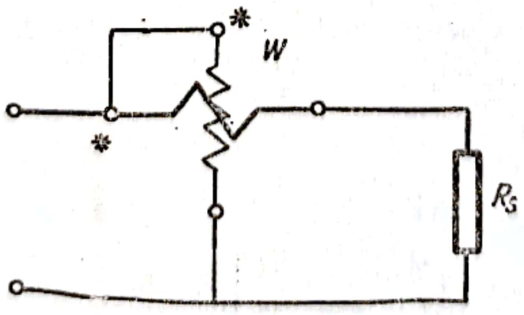


Fig. B.12.1

* În scheme se utilizează simbolul grafic din anexa 9 sau simbolul detailat din figura B.12.1.

Constanta wattmetrului este numărul de waţi corespunzători unei diviziuni a scalei aparatului :

$$C_W = \frac{U_N I_N}{\alpha_N} \text{ W/div}, \tag{12.15}$$

unde U_N şi I_N sînt valorile nominale ale tensiunii şi curentului, iar α_N este numărul total de diviziuni ale scalei.

12.16. Măsurarea puterii circuitelor trifazate în regim simetric se poate efectua cu un singur wattmetru montat pe una din faze. Puterea P absorbită de circuit este de trei ori mai mare decît puterea P_W măsurată de wattmetru :

$$P = 3 P_W. \tag{12.16 a}$$

Metoda celor două wattmetre se poate utiliza pentru circuitele trifazate fără fir neutru (fig. B.12.2). Puterea P absorbită de circuit este suma puterilor P_1 şi P_2 măsurate de cele două wattmetre :

$$P = P_1 + P_2. \tag{12.16 b}$$

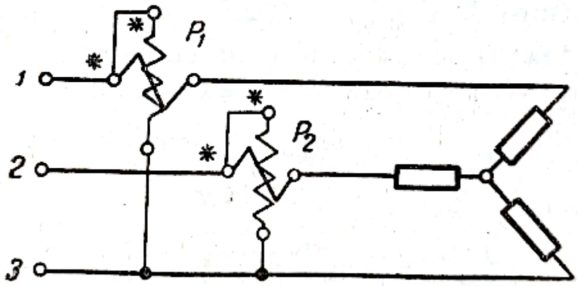


Fig. B.12.2

În cazul circuitelor trifazate în regim simetric, indicaţiile celor două wattmetre sînt :

$$P_1 = U_l I_l \cos (30° - \varphi);$$
$$P_2 = U_l I_l \cos (30° + \varphi), \tag{12.16 c}$$

unde U_l şi I_l sînt tensiunea şi curentul de linie, iar φ — defazajul între tensiunea şi curentul de fază.

În acest caz, defazajul poate fi calculat cu relaţia :

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}\,\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}, \tag{12.16 d}$$

iar puterea reactivă cu relaţia :

$$Q = P \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}(P_1 - P_2). \tag{12.16 e}$$

Măsurarea puterii în circuitele trifazate dezechilibrate cu fir neutru se poate face cu metoda celor trei wattmetre. Cele trei wattmetre au bobinele de curent parcurse de curenții de linie, iar bobinele de tensiune legate între faze și firul neutru. Puterea absorbită de circuit este suma puterilor măsurate de cele trei wattmetre.

$$P = P_1 + P_2 + P_3. \qquad (12.16\,f)$$

12.17. Măsurarea energiei se face cu montaje similare cu cele utilizate pentru măsurarea puterii, însă în locul wattmetrelor se montează contoare de energie.

*Constanta nominală** C_N a unui contor este egală cu energia înregistrată de contor la o rotație a discului acestuia.

Constanta reală C a unui contor este egală cu energia pentru care discul acestuia face o rotație.

Eroarea relativă a înregistrării unui contor:

$$\varepsilon_W = \frac{W_m - W}{W} 100\% = \frac{C_N N - C N}{C N} 100\% = \frac{C_N - C}{C} 100\% = \varepsilon_C, \qquad (12.17\,a)$$

în care W_m este energia măsurată, iar W este valoarea reală a energiei, cînd discul contorului face N rotații.

Factorul de corecție al contorului este factorul cu care trebuie înmulțită indicația acestuia pentru a obține valoarea reală a energiei măsurate:

$$K = \frac{C}{C_N}. \qquad (12.17\,b)$$

12.18. Transformatoarele de măsură. *Raportul nominal de transformare* al unui transformator de tensiune, respectiv de curent, este prin definiție:

$$K_{U_N} = \frac{U_{1N}}{U_{2N}}, \qquad K_{I_N} = \frac{I_{1N}}{I_{2N}}, \qquad (12.18\,a)$$

unde U_{1N}, U_{2N}, I_{1N} și I_{2N} sînt valorile eficace ale tensiunilor și curenților nominali în primar și în secundar.

Raportul real de transformare al unui transformator de tensiune, respectiv de curent, este, prin definiție:

$$K_U = \frac{U_1}{U_2}, \qquad K_I = \frac{I_1}{I_2}, \qquad (12.18\,b)$$

unde U_1, U_2, I_1 și I_2 sînt mărimile reale ale valorilor eficace ale tensiunilor și curenților din primarul și secundarul transformatorului.

* Prin constanta contorului uneori se înțelege numărul de rotații ale discului pentru a înregistra un kilowatt-oră

Valoarea măsurată a tensiunii, respectiv a curentului, din primarul unui transformator este :

$$U_{1_m} = K_{U_N} U_2, \qquad I_{1_m} = K_{I_N} I_2, \tag{12.18 c}$$

unde U_2 și I_2 sînt valorile măsurate în secundarul transformatorului.

Eroarea relativă la măsurarea unei tensiuni, respectiv a unui curent, datorită transformatoarelor de măsură, este :

$$\varepsilon_U = \frac{U_{1_m} - U_1}{U_1} 100\% = \frac{K_{U_N} U_2 - U_1}{U_1} 100\% = \frac{K_{U_N} - K_U}{K_U} 100\% = \varepsilon_{K_U} \tag{12.18 d}$$

și, similar :

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{K_I}.$$

Măsurarea puterii prin intermediul transformatoarelor de măsură se face cu montajul din figura B. 12.3, valoarea determinată fiind :

$$P_m = K_{U_N} K_{I_N} P_W, \tag{12.18 e}$$

unde P_W este puterea măsurată de wattmetru.

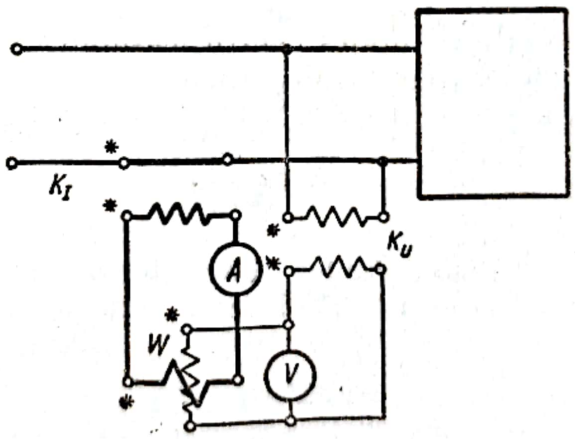


Fig. B.12.3

Eroarea relativă maximă a determinării puterii este :

$$\varepsilon_P = |\varepsilon_U| + |\varepsilon_I| + |\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}(\psi_U - \psi_I)|, \tag{12.18 f}$$

unde ε_U și ε_I sînt erorile relative ale transformatorului de tensiune, respectiv de curent; ψ_U și ψ_I — erorile de unghi ale acestora; φ — defazajul dintre tensiunea și curentul din circuit.

Scanned with OKEN Scanner

12.19. Măsurarea rezistențelor prin metoda ampermetrului și a voltmetrului.

Pentru *montajul amonte* (fig. B. 12.4 *a*) valoarea rezistenței de măsurat se calculează cu formula :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U_V - U_A}{I_A} = \frac{U_V}{I_A} - R_A, \qquad (12.19\ a)$$

iar pentru *montajul aval* (fig. B. 12.4 *b*) :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_A - I_V} = \frac{U_V}{I_A - \frac{U_V}{R_V}} = \frac{U_V}{I_A} \cdot \frac{1}{1 - \frac{U_V}{I_A} \cdot \frac{1}{R_V}}, \qquad (12.19\ b)$$

unde R_A și R_V sînt rezistența ampermetrului, respectiv voltmetrului.

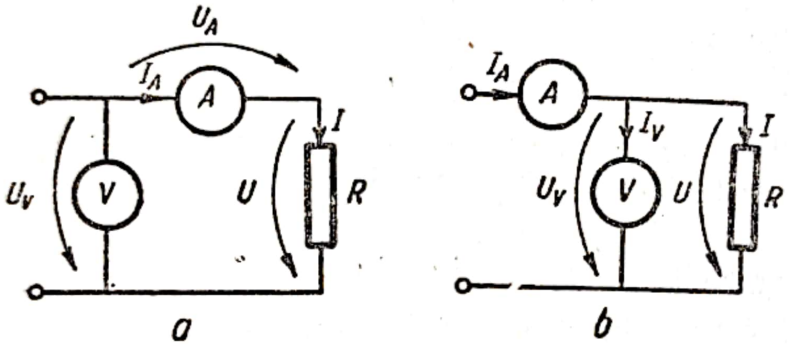


Fig. B.12.4

Montajul amonte este avantajos pentru măsurarea rezistențelor mari în raport cu a ampermetrului, iar montajul aval pentru măsurarea rezistențelor mici în raport cu a voltmetrului. În aceste cazuri :

$$R \simeq \frac{U_V}{I_A}. \qquad (12.19\ c)$$

12.20. Puntea Wheatstone. *Condiția de echilibru.* Indicația galvanometrului este nulă cînd între rezistențele brațelor punții (fig. B. 12.5) există relația :

$$R_1 R_3 = R_2 R_4. \qquad (12.20\ a)$$

Sensibilitatea punții, definită ca raportul dintre tensiunea e în diagonala BD a punții în gol și tensiunea electromotoare E a sursei considerate de rezistență internă neglijabilă, poate fi calculată cu relația:

$$S = \frac{e}{E} = F\sigma, \qquad (12.20\ b)$$

unde F este *factorul punții* :

$$F = \frac{A}{(1+A)^2}; \qquad (12.20\ c)$$

σ este *factorul de dereglaj* :

$$\sigma = \frac{\Delta R_4}{R_4}, \qquad (12.20\ d)$$

dacă se consideră rezistența R_4 variabilă;
iar A este *raportul brațelor punții* :

$$A = \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_3}{R_4}. \qquad (12.20\ e)$$

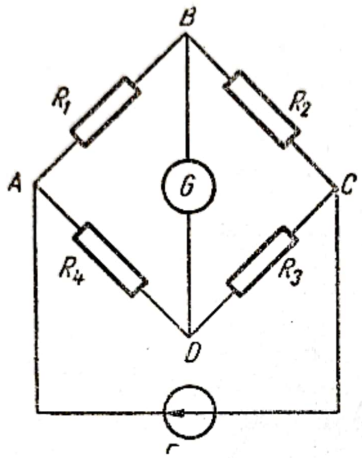


Fig. B.12.5

12.21. Puntea de curent alternativ are o structură similară cu a punții Wheatstone, brațele sînt însă alcătuite din impedanțe, iar sursa de alimentare și detectorul de nul sînt de curent alternativ.

Condiția de echilibru, cu notații similare cu cele din figura B.12.5, este :

$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 = \underline{Z}_2 \underline{Z}_4, \qquad (12.21\ a)$$

care se descompune într-o relație între modulele impedanțelor brațelor :

$$Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4 \qquad (12.21\ b)$$

și o relație între argumentele acestora :

$$\varphi_1 + \varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_4. \qquad (12.21\ c)$$

Ambele relații trebuie satisfăcute pentru a obține echilibrul punții.

12.22. Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice se face utilizînd *traductoarele* care „transformă" mărimea de măsurat z avînd o anumită natură fizică (temperatură, presiune, forță, concentrație, pH etc.) într-o mărime electrică x (de obicei tensiune sau rezistență).

Caracteristica traductorului este dependența mărimii electrice x de la ieșirea traductorului, de mărimea neelectrică z măsurată :

$$x = \mathrm{f}(z). \qquad (12.22\ a)$$

Eroarea relativă care afectează măsurarea mărimii neelectrice ε_z se poate calcula funcție de eroarea relativă de determinare a mărimii electrice ε_x:

$$\varepsilon_z = \frac{x}{z\, f'(z)}\, \varepsilon_x . \qquad (12.22\ b)$$

Caracteristica traductorului se dă de obicei sub formă grafică sau de tabelă, fără a se cunoaște expresia ei analitică. În acest caz, derivata se determină grafic.

B. PROBLEME

12.1 (R). Tensiunea la bornele unui circuit de curent continuu se măsoară cu o eroare de 0,6%. Se cer:

a) Eroarea relativă maximă care poate fi făcută la măsurarea curentului, dacă puterea absorbită de circuit trebuie să fie calculată cu o eroare mai mică de 1,5%.

b) Clasa de precizie a ampermetrului utilizat, dacă curentul său nominal este de 10 A, iar curentul în circuit de 6 A.

12.2 (R). Să se stabilească precizia cu care trebuie măsurat curentul ce trece printr-o rezistență calibrată cu o eroare de 0,2%, astfel încît calculul puterii să se poată face cu o eroare relativă mai mică de 1%.

12.3. Măsurînd valorile rezistențelor unui stoc de o sută de rezistoare bobinate, de valoare nominală de 100 Ω, s-au găsit rezultatele din tabelă:

Rezistența [Ω]	99,7	99,8	99,9	100	100,1	100,2	100,5	100,4	100,5
Numărul de rezistoare	1	6	25	28	23	14	2	0	1

Să se calculeze:

a) Valoarea medie a rezistenței rezistoarelor.

b) Eroarea medie a valorii unui rezistor față de valoarea nominală.

Scanned with OKEN Scanner

12.4. Care sînt rapoartele dintre rezistența unui ampermetru și rezistențele șunturilor care lărgesc domeniul de măsură de 5, 10, 50 și 100 de ori.

12.5 (I). Un ampermetru cu scările de măsură de 0,1 — 0,5 — 1 — 5 — 10 A are schema din figura 12.5 și utilizează ca aparat indicator un miliampermetru de curent nominal $I_A = 10$ mA și de rezistență internă $R_A = 20\ \Omega$. Să se calculeze valorile necesare ale rezistențelor $R_1 \div R_5$.

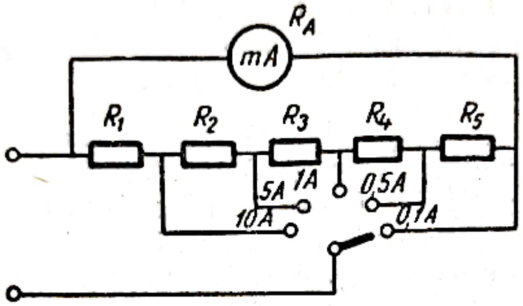


Fig. 12.5

12.6. Să se calculeze rezistența internă echivalentă a ampermetrului din problema 12.5 pentru fiecare domeniu de măsură.

12.7. (I). Să se calculeze eroarea sistematică comisă de un ampermetru cu șunt, calculat să măsoare un curent maxim $I_{max} = 20$ A, utilizînd un miliampermetru de curent nominal $I_A = 100$ mA și rezistență internă $R_A = 1\ \Omega$, dacă în locul schemei corecte de conexiune din figura 12.7 *a* se realizează montajul din figura 12.7 *b*. Rezistența conductoarelor de legătură este $R_c = 0{,}001\ \Omega$.

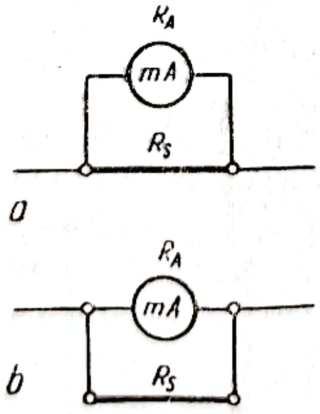


Fig. 12.7

12.8. Cît ar deveni sensibilitatea unui aparat magnetoelectric care are inițial constanta de 1 mA/div, dacă s-ar dubla numărul de spire al bobinei mobile, fără a se modifica dimensiunile cadrului?

12.9. Un miliampermetru are o scală de 100 de diviziuni, constanta $C = 1$ mA/div și o cădere de tensiune la curent nominal de 45 mV. Se cer:

a) Valoarea șuntului necesar pentru a realiza un ampermetru de 5 A?

b) Valoarea rezistenței adiționale pentru a obține un voltmetru de 100 V?

12.10. Un voltmetru are tensiunea nominală de 130 V și curentul prin aparat la tensiune nominală de 1 mA. Să se calculeze valoarea rezistenței adiționale care extinde scala la 260 V.

12.11. Care este puterea absorbită de voltmetrul din problema precedentă, cînd indicația sa este maximă pe scala de 130 V, respectiv pe cea de 260 V?

12.12 (I). Un voltmetru magnetoelectric de clasă de precizie 1, care absoarbe un curent de 7,5 mA la tensiunea maximă de 300 V, este conectat în montajul din figura 12.12 pentru a determina tensiunea la bornele BC și măsoară o tensiune de 100 V. Să se calculeze:

a) Eroarea relativă maximă ε'_U datorită impreciziei citirii.

b) Eroarea relativă ε''_U datorită rezistenței finite a voltmetrului.

c) Eroarea relativă totală ε_U.

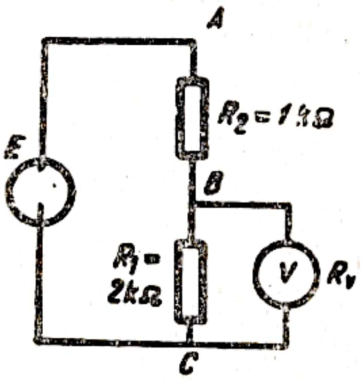


Fig. B.12.12

12.13 (I). Să se calculeze valorile rezistențelor adiționale ale voltmetrului cu schema din figura 12.13 pentru a avea scalele de măsură de 6—30—60 — 150 — 300 V. Aparatul indicator, de tip magnetoelectric, are curentul nominal de 1 mA și rezistența internă de 100 Ω.

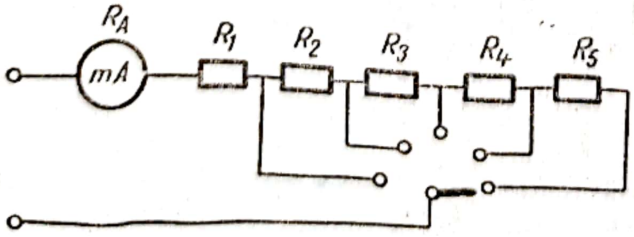


Fig. 12.13

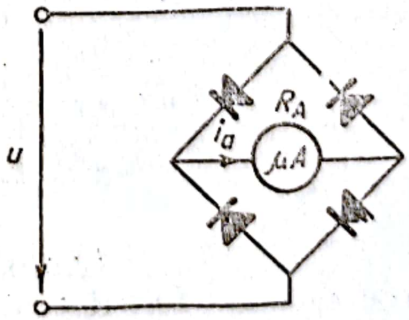


Fig. 12.14

12.14 (I). Voltmetrul de curent alternativ cu punte de redresare avînd schema din figura 12.14 utilizează ca aparat indicator un microampermetru magnetoelectric de curent nominal 100 μ A și rezistența internă 1,5 kΩ.

a) Ce tensiune trebuie aplicată punții pentru a produce deviația maximă a aparatului indicator, dacă se consideră diodele redresoare ideale.

b) Să se calculeze valorile rezistențelor adiționale necesare pentru obținerea scalelor de 1, 10, 100 V și să se precizeze unde se conectează acestea în schema aparatului.

12.15. Care este capacitatea condensatorului care trebuie legat în serie cu un voltmetru electrostatic avînd capacitatea proprie de 30 pF, pentru a-i extinde scala de măsură de la 5 la 20 kV?

12.16 (R). Scala unui wattmetru electrodinamic de clasă 0,5 cuprinde 150 de diviziuni. Tensiunea maximă este de 150 V, iar curentul maxim de 5 A. Să se calculeze:

a) Constanta wattmetrului.

b) Puterea măsurată, cînd aparatul indică 80 de diviziuni.

c) Eroarea absolută și eroarea relativă maximă care se comit la citirea aparatului.

12.17. Un wattmetru electrodinamic are o scală cu 150 de diviziuni și constanta 10 W/div. Curentul maxim al bobinei de curent este 10 A, iar curentul prin bobina de tensiune, la tensiunea maximă, este de 30 mA. La conectarea în circuit se leagă în serie cu bobina de tensiune o rezistență adițională de 10 kΩ. Se cere:

a) Tensiunea maximă a aparatului înainte și după conectarea rezistenței adiționale.

b) Noua valoare a constantei wattmetrului.

12.18. Pentru măsurarea puterii absorbite de un receptor trifazat fără fir neutru prin metoda celor două wattmetre s-au utilizat două aparate identice avînd scala cu 120 de diviziuni, curentul maxim de 5 A și tensiunea maximă de 240 V. Indicațiile wattmetrelor au fost de 82 și, respectiv, de 28 de diviziuni. Să se calculeze:

a) Puterea absorbită de receptorul trifazat.

b) Eroarea absolută și eroarea relativă maximă posibilă a determinării, aparatele fiind de clasă 0,5.

12.19 (R). Puterea activă absorbită de un receptor trifazat echilibrat, alcătuit din trei impedanțe egale $Z = 10\ \Omega$ legate în stea fără fir neutru, de la o rețea trifazată avînd tensiunea de linie de 208 V, este

Scanned with OKEN Scanner

măsurată cu metoda celor două wattmetre. Acul indicator al unui wattmetru rămîne în dreptul diviziunii zero.

a) Care este factorul de putere al circuitului?

b) Ce putere trebuie să indice celălalt wattmetru?

12.20 (I). Pentru a verifica etalonarea unui contor pe a cărui plăcuță este scris 220 V, 5 A, 1 kWh = 3 000 rotații, se realizează

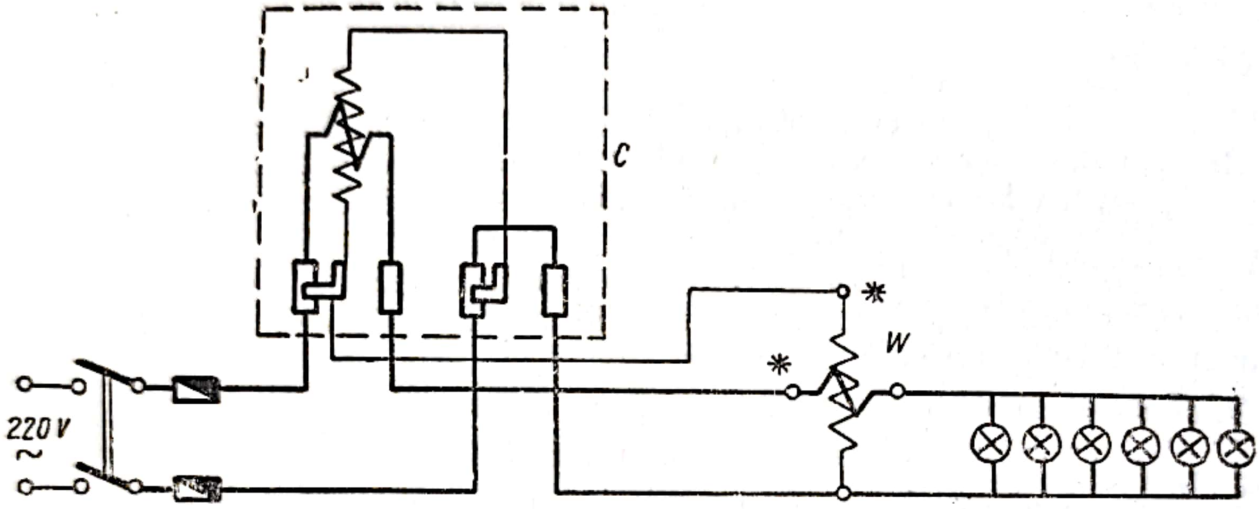


Fig. 12.20

montajul din figura 12.20. Discul contorului efectuează 50 de rotații în 101 secunde, indicațiile wattmetrului fiind de 580 W. Se cer:

a) Constanta nominală a contorului.

b) Constanta reală a contorului.

c) Eroarea absolută și eroarea relativă.

d) Factorul de corecție al contorului.

12.21. În montajul din figura 12.21, care utilizează un transformator de curent de 300/5 A și un transformator de tensiune de

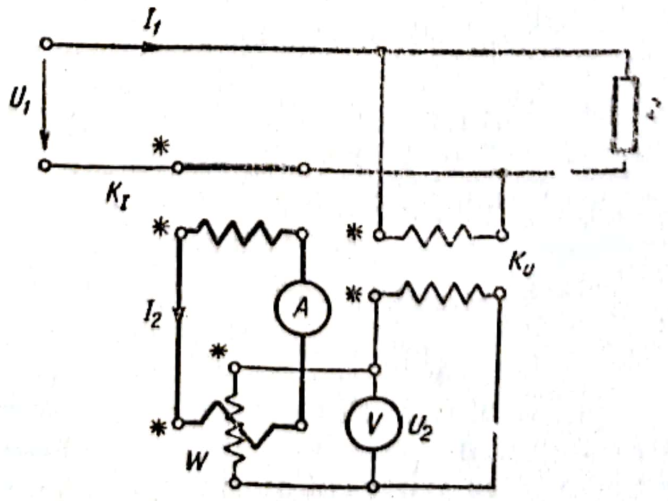


Fig. 12.21

Scanned with OKEN Scanner

3 000/100 V, ampermetrul indică 4,0 A, voltmetrul 85 V și wattmetrul 270 W. Să se calculeze :

a) Curentul, tensiunea și puterea în circuit.
b) Factorul de putere al circuitului.
c) Mărimile impedanței, rezistenței și reactanței receptorului.

12.22 * (R). Să se stabilească erorile relative care afectează valorile curentului, tensiunii și puterii măsurate în problema 12.21, dacă se utilizează un voltmetru de 100 V și clasă de precizie 1, un ampermetru de 5 A și un wattmetru cu tensiunea maximă de 100 V și curentul maxim 5 A, ambele aparate avînd clasa de precizie 0,5. Transformatorul de tensiune este de clasă 0,5, iar cel de curent de clasă 1, erorile lor de unghi fiind respectiv de + 15′ și — 45′.

12.23. Un contor pe plăcuța căruia este scris 120 V, 5 A și 1 kWh = 3 000 rotații are bobina de curent conectată la rețea prin intermediul unui transformator de curent de 300/5 A. Discul contorului face 20 de rotații în 60 s. Se cer :

a) Constanta nominală a contorului astfel conectat.
b) Energia consumată de receptor.
c) Puterea în rețeaua electrică.

12.24. Să se calculeze eroarea comisă în calculul puterii în problema 12.23, dacă eroarea de unghi a transformatorului de curent, de clasă 1, este ± 100′, eroarea maximă a contorului este de 2%, iar eroarea de măsură a timpului este de o secundă. Sarcina receptorului se consideră pur rezistivă.

12.25 (I). Pentru măsurarea unei rezistențe cu metoda ampermetrului și voltmetrului se utilizează montajul din figura 12.25. Cînd comutatorul K este pe poziția *1*, corespunzătoare montajului amonte, voltmetrul măsoară o tensiune $U_1 = 120$ V și ampermetrul un curent $I_1 = 2{,}38$ A, iar cînd este pe poziția *2*, corespunzătoare montajului aval, indicațiile aparatelor sînt $U_2 = 117{,}5$ V și, respectiv, $I_2 = 2{,}47$ A. Se cer :

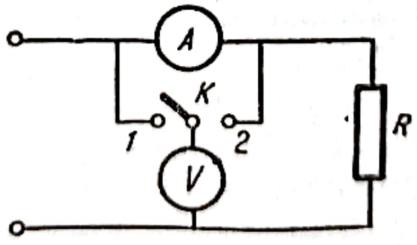


Fig. 12.25

a) Valoarea rezistenței R.
b) Rezistența ampermetrului R_A și a voltmetrului R_V.
c) Erorile relative sistematice la determinarea rezistenței, dacă s-ar neglija efectul rezistențelor finite ale ampermetrului și ale voltmetrului.

Scanned with OKEN Scanner

12.26. Pentru a măsura o rezistență de ordinul de mărime 10 kΩ se dispune de o sursă de tensiune electromotoare de 90 V, de un voltmetru cu tensiunea maximă 120 V și rezistența 300 Ω/V și de un miliampermetru avînd curentul nominal 15 mA și rezistența 6 Ω. Ambele aparate sînt de clasa de precizie 1.

a) Să se aleagă montajul care dă eroarea sistematică mai mică, dacă în calculul rezistenței se neglijează influența rezistențelor voltmetrului și ale miliampermetrului.

b) Care sînt mărimile aproximative ale erorii maxime de citire?

12.27. Să se calculeze inductivitatea și rezistența unei bobine dacă, aplicînd la bornele acesteia o tensiune continuă de 3,9 V, trece un curent de 2,8 A, iar la aplicarea unei tensiuni alternative de 15 V de frecvență 50 Hz, bobina este parcursă de un curent de 3,5 A.

12.28 (I). În puntea Wheatstone din figura 12.28 indicația de nul a galvanometrului se obține pentru o valoare $R_4 = 150\ \Omega$. Cunoscînd $R_1 = R_2 = 1\,000\ \Omega$ și $E = 6$ V, se cer:

a) Mărimea rezistenței necunoscute R_3.

b) Valoarea factorului F al punții.

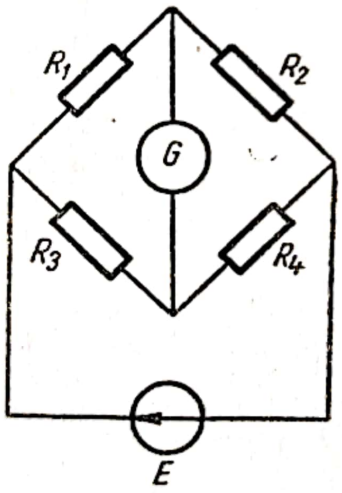


Fig. 12.28

c) Variația minimă decelabilă a rezistenței R_1 față de valoarea de echilibru, dacă galvanometrul are constanta $C_g = 10^{-7}$ A/div și rezistența internă $R_g = 100\ \Omega$.

12.29 (I). Rezistențele brațelor unei punți Wheatstone sînt $R_1 = 150\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $R_3 = 201\ \Omega$ și $R_4 = 300\ \Omega$, iar tensiunea electromotoare a sursei de alimentare este $E = 1{,}9$ V. Să se calculeze:

a) Factorul de dereglaj al rezistenței R_4.

b) Factorul F al punții.

c) Sensibilitatea punții.

d) Indicația galvanometrului avînd constanta de tensiune 10^{-4} V/div.

Scanned with OKEN Scanner

12.30. Care este valoarea maximă a factorului F al unei punți Wheatstone?

12.31. Să se stabilească unde trebuie conectată sursa de alimentare și unde galvanometrul, pentru ca puntea din figura 12.31 să aibă o sensibilitate mai mare.

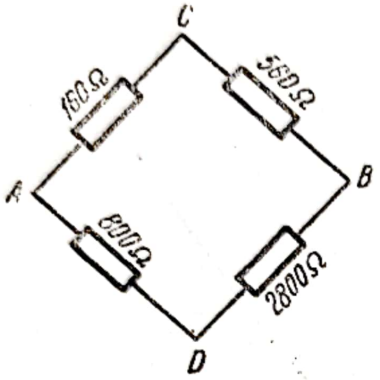


Fig. 12.31

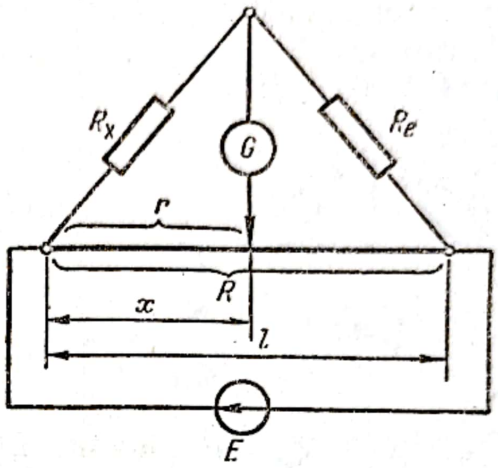


Fig. 12.32

12.32. Puntea Wheatstone cu fir are schema din figura 12.32. Să se demonstreze că sensibilitatea punții nu depinde de raportul A al rezistențelor brațelor punții.

12.33. Să se găsească condițiile de echilibru ale punții Hay din figura 12.33, utilizată pentru măsurarea inductivității bobinelor cu factor de calitate ridicat.

12.34 (I). Puntea Sauty cu schema din figura 12.34 are în brațul standard un condensator etalon de capacitate $C_S = 100$ pF în serie cu o rezistență R_S neglijabilă. Să se calculeze capacitatea C_x și rezistența

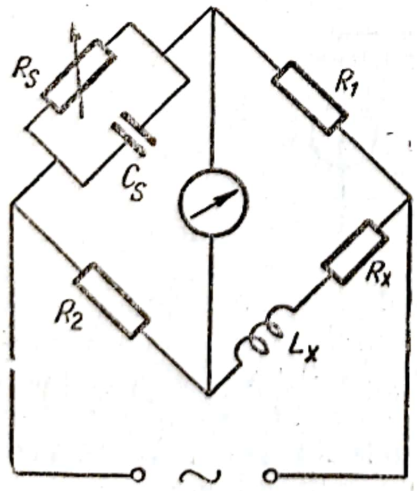


Fig. 12.33

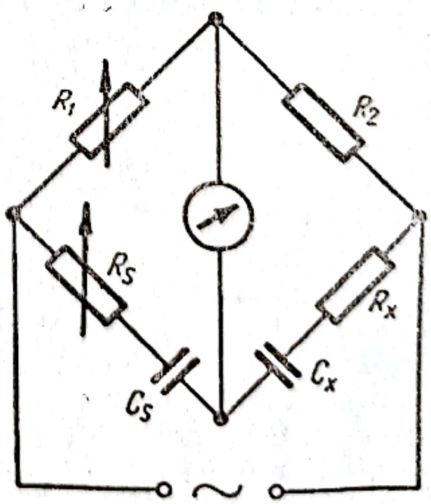


Fig. 12.34

Scanned with OKEN Scanner

de pierderi R_x a condensatorului de măsurat dacă echilibrul punții s-a obținut pentru $R_1 = 2\,420\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$ și $R_S = 1{,}2\ \Omega$.

12.35. Să se stabilească condițiile de echilibru ale punții Wien cu schema din figura 12.35.

12.36. Care este temperatura din interiorul unui cuptor, dacă tensiunea măsurată la bornele unui termocuplu platină-platină rodiată, introdus în cuptor, este de 6,2 mV? Caracteristica termocuplului este dată în figura 12.36.

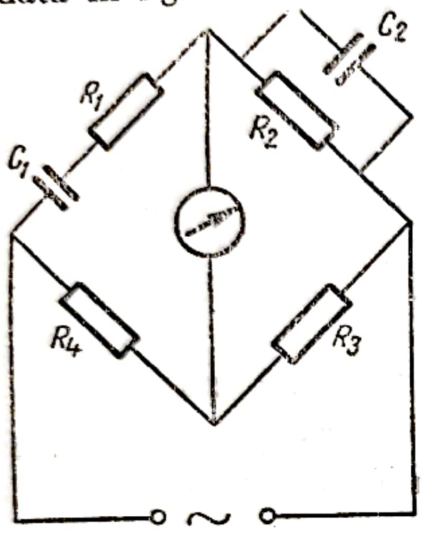


Fig. 12.35

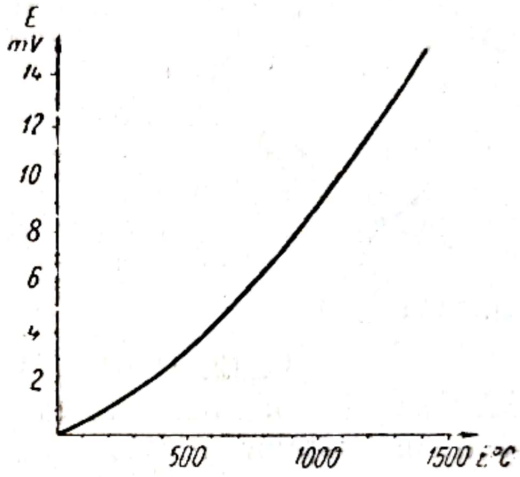


Fig. 12.36

12.37 (R). Pentru măsurarea variațiilor temperaturii unui cuptor în jurul valorii de regim $t_0 = 1\,200°C$ se utilizează un termocuplu platină-platină rodiată conectat într-un montaj diferențial, ca în figura 12.37. Microampermetrul utilizat are sensibilitatea $S_A = 1$ div/μA, iar rezistența totală a circuitului termocuplului este $R_t = 221\ \Omega$. Să se calculeze constanta de temperatură a sistemului de măsură C_t [°C/div].

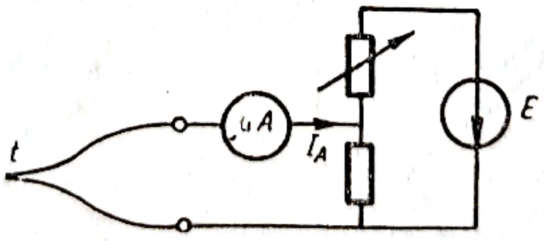


Fig. 12.37

12.38 (R). Un traductor tensometric cu sensibilitatea relativă $S_r = 2$ formează unul dintre brațele unei punți Wheatstone, având un aparat indicator cu sensibilitatea $S_g = 10^4$ V/div, o sursă de alimentare de 2 V și factorul punții $F = 0{,}2$. Să se calculeze indicația corespunzătoare unei alungiri relative de 0,5% a tensometrului și constanta sistemului de măsură C_l $[\frac{\Delta l}{l}\ \%/\text{div}]$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 13

TRANSFORMATOARE ELECTRICE

A. BREVIAR

13.1. Transformatorul monofazat este alcătuit din două circuite electrice (primar și secundar) cuplate magnetic, așa cum se exemplifică în figura B.13.1.

Schema echivalentă a circuitelor electrice este cea din figura B.13.2.

Reactanțele de dispersiune (scăpări) $X_{1s} = \omega L_{1s}$ și $X_{2s} = \omega L_{2s}$ corespund fluxurilor de dispersiune Φ_{1s} și Φ_{2s}, iar reactanța mutuală $X_0 = \omega L_0$

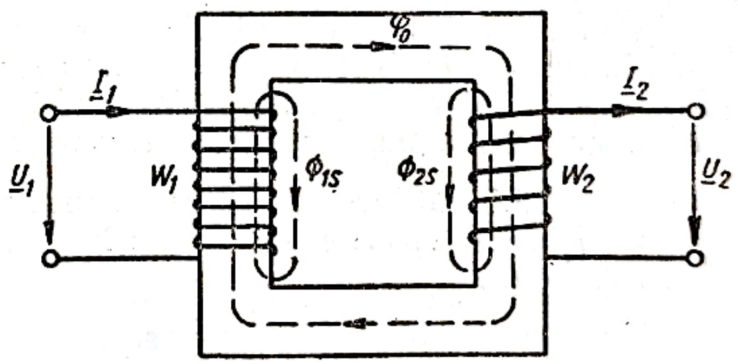


Fig. B.13.1

și reactanțele proprii utile $X_{10} = \omega L_{10}$, $X_{20} = \omega L_{20}$, corespund fluxului magnetic dat de liniile de cîmp magnetic care înlănțuie ambele bobine.

Ecuațiile de tensiuni ale circuitelor electrice în regim sinusoidal, exprimate în reprezentarea simbolică prin mărimi complexe, pentru sensurile pozitive adoptate (primarul receptor, secundarul generator), sînt următoarele:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= (R_1 + \mathrm{j}\, X_{1s})\, \underline{I}_1 + \mathrm{j}\, X_{10}\, \underline{I}_1 - \mathrm{j}\, X_0\, \underline{I}_2; \\ -\underline{U}_2 &= (R_2 + \mathrm{j}\, X_{2s})\, \underline{I}_2 + \mathrm{j}\, X_{20}\, \underline{I}_2 - \mathrm{j}\, X_0\, \underline{I}_1. \end{aligned} \qquad (13.1\ a)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se ține seamă de relațiile dintre reactanțele corespunzătoare fluxului comun și numărul de spire (w_1, w_2) ale circuitelor :

$$\frac{X_{10}}{X_0} = \frac{X_0}{X_{20}} = \frac{w_1}{w_2}, \qquad (13.1\ b)$$

se obține următoarea formă a ecuațiilor (13.1 *a*) :

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= (R_1 + \mathrm{j}\, X_{1s})\, \underline{I}_1 + \mathrm{j}\, X_{10} \left(\underline{I}_1 - \underline{I}_2 \frac{w_2}{w_1}\right) \\ -\underline{U}_2 \frac{w_1}{w_2} &= (R_2 + \mathrm{j}\, X_{2s}) \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 \left(\underline{I}_2 \frac{w_2}{w_1}\right) - \mathrm{j}\, X_{10} \left(\underline{I}_1 - \underline{I}_2 \frac{w_2}{w_1}\right). \end{aligned} \qquad (13.1\ c)$$

Se introduc mărimile secundarului raportat la primar :

$$\begin{aligned} \underline{I}'_2 &= \underline{I}_2 \frac{w_2}{w_1}; \\ \underline{U}'_2 &= \underline{U}_2 \frac{w_1}{w_2}; \\ R'_2 + \mathrm{j}\, X'_{2s} &= (R_2 + \mathrm{j}\, X_{2s}) \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 \end{aligned} \qquad (13.1\ d)$$

și se obțin următoarele ecuații :

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= (R_1 + \mathrm{j}\, X_{1s})\, \underline{I}_1 + \mathrm{j}\, X_{10}\, (\underline{I}_1 - \underline{I}'_2); \\ -\underline{U}'_2 &= (R'_2 + \mathrm{j}\, X'_{2s})\, \underline{I}'_2 - \mathrm{j}\, X_{10}\, (\underline{I}_1 - \underline{I}'_2). \end{aligned} \qquad (13.1\ e)$$

Pentru a ține seamă în calcule de pierderile de putere în circuitul feromagnetic, se adaugă în schema echivalentă, în paralel cu reactanța de magnetizare X_{10}, rezistența echivalentă R_{10}. Se obține astfel schema electrică completă a transformatorului monofazat cu circuit feromagnetic din figura B.13.3.

13.2. Determinarea parametrilor schemei echivalente se face prin calcul, folosind valori obținute din încercarea de mers în gol și cea de mers în scurtcircuit.

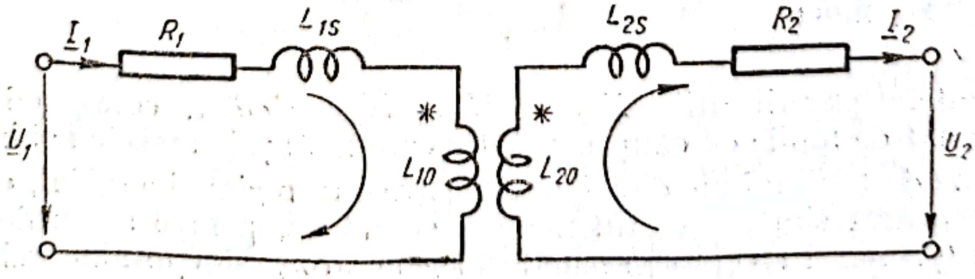


Fig. B.13.2

La funcționarea în gol ($I_2 = I'_2 = 0$, secundar deschis) se măsoară tensiunea U_1, curentul I_{10}, puterea activă P_{10} în primar și tensiunea U_{20} în secundar.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă raportul de transformare :

$$k = \frac{w_1}{w_2} \simeq \frac{U_1}{U_{20}} \qquad (13.2\ a)$$

și, deoarece rezistența R_1 și reactanța de dispersiune X_{1s} sînt neglijabile față de reactanța de magnetizare X_{10} și rezistența R_{10}, avem :

$$R_{10} = \frac{U_1^2}{P_{10}};$$

$$X_{10} = \frac{U_1}{\sqrt{I_{10}^2 - \left(\frac{P_{10}}{U_1}\right)^2}}. \qquad (13.2\ b)$$

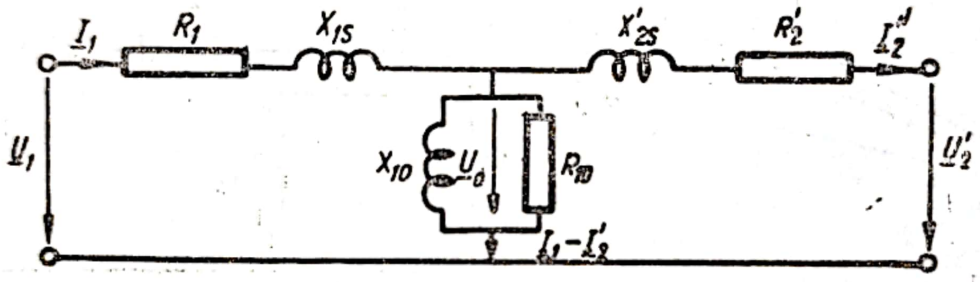


Fig. B 13.3

La încercarea în scurtcircuit ($U'_2 = U_2 = 0$) se măsoară tensiunea U_{1sc} (reglată astfel încît înfășurarea primară să fie parcursă de curentul nominal $I_{1sc} = I_{1n}$), curentul I_{2sc} și puterea activă absorbită în primar P_{1sc}.

Rezultă raportul de transformare :

$$k = \frac{w_1}{w_2} \simeq \frac{I_{2sc}}{I_{1sc}} \qquad (13.2\ c)$$

și, deoarece rezistența și reactanța de mers în gol (R_{10} și X_{10}) sînt foarte mari în comparație cu rezistențele R_1, R'_2 și reactanțele de dispersiune X_{1s}, X'_{2s}, avem :

$$R = R_1 + R'_2 = \frac{P_{1sc}}{I_{1sc}^2};$$

$$X = X_{1s} + X'_{2s} = \sqrt{\left(\frac{U_{1sc}}{I_{1sc}}\right)^2 - \left(\frac{P_{1sc}}{I_{1sc}^2}\right)^2}. \qquad (13.2\ d)$$

Cu suficientă aproximație se consideră :

$$R_1 = R'_2; \quad X_{1s} = X'_{2s},$$

și deci :

$$R_1 = \frac{R}{2}; \quad X_{1s} = \frac{X}{2};$$

$$R_2 = \frac{R}{2k^2}; \quad X_{2s} = \frac{X}{2k^2}.$$

Schema echivalentă astfel determinată permite construirea diagramei vectoriale a tensiunilor și calculul regimului de funcționare al transformatorului. De exemplu, dacă se dau U_2, P_2 și $\cos \varphi_2$, se calculează mai întîi :

$$I_2 = \frac{P_2}{U_2 \cos \varphi_2}.$$

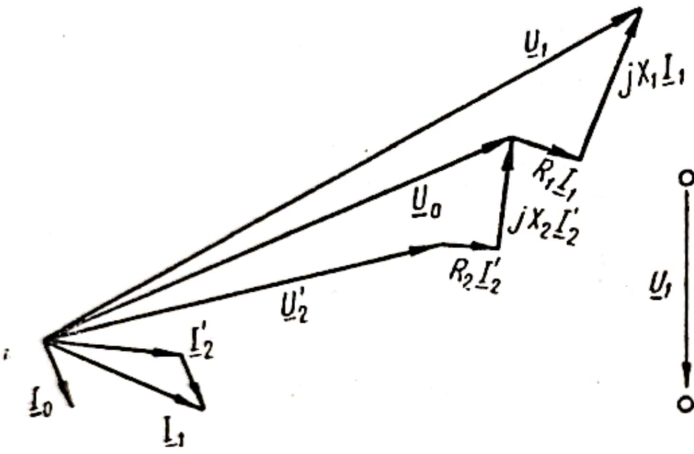


Fig. B.13.4

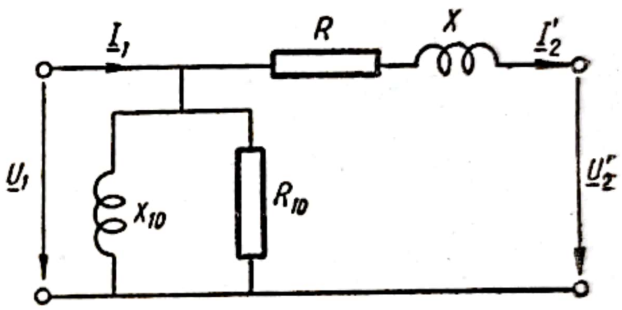


Fig. B.13.5

Se construiește diagrama vectorială din figura B.13.4 și se pot calcula, grafic sau analitic, mărimile din primar.

Pentru calcule practice se poate folosi schema echivalentă simplificată a transformatorului cu circuit feromagnetic, conform figurii B.13.5.

La transformatoarele trifazate, în regim simetric, schema echivalentă a transformatorului monofazat corespunde unei singure faze.

B. PROBLEME

13.1 (R). Caracteristicile unui transformator monofazat de 110/6 kV, cu o putere de 20 MVA, sînt următoarele :

— tensiunea de scurtcircuit $U_{1sc} = 10\%$;

— curentul de mers în gol $I_{10} = 4\%$;

— pierderile la mersul în gol $P_{10} = 60$ kW;
— pierderile la încercarea în scurtcircuit $P_{1Sc} = 150$ kW.

a) Să se determine elementele componente ale schemei echivalente a transformatorului.

b) Să se calculeze tensiunea, curentul la bornele de intrare în cazul sarcinii nominale pur rezistive.

13.2 (R). Un transformator de 10/5 kV, cu o putere nominală de 500 kVA, are primarul și secundarul caracterizate prin :

$$R_1 = 1\ \Omega; \qquad R_2 = 0{,}25\ \Omega;$$
$$X_1 = 7\ \Omega; \qquad X_2 = 1{,}75\ \Omega.$$

Se cere :

a) Tensiunea cu care trebuie alimentat primarul transformatorului, pentru ca în bobinajul părții de 5 kV, scurtcircuitat, să circule, un timp foarte scurt, un curent de 200 A. Exprimarea se va face procentual funcție de tensiunea nominală.

b) Pierderile, tensiunea și factorul de putere la încercarea în scurtcircuit.

13.3. La bornele unei bobine cu un număr de spire $w = 10$, plasată pe jugul circuitului magnetic al unui transformator, se obține o tensiune $U = 50$ V. Raportul de transformare : $U_1/U_2 = 10/0{,}4$ kV. Se cer numărul de spire ale primarului și secundarului transformatorului.

13.4. Știind că raportul dintre numărul de spire, al celor două înfășurări, ale unui transformator trifazat este $\frac{w_1}{w_2} = 6$, se cere să se determine raportul de transformare (raportul tensiunilor primare și secundare între faze) în cazul conexiunilor :

a) Y/Y;
b) Δ/Y;
c) Y/Δ;
d) Δ/Δ.

13.5 (R). Un transformator trifazat de 1 000 kVA, 15/0,4 kV, are, conform normelor în vigoare, pierderile :

$$P_{10} = 3{,}2\ \text{kW};$$
$$P_{1Sc} = 16{,}5\ \text{kW}.$$

Se cer :

a) randamentul transformatorului care alimentează o sarcină pur ohmică, la 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1; 1,2 din puterea nominală;

b) sarcina pentru care randamentul este maxim;

c) relația dintre randamentul corespunzător puterii nominale și randamentul maxim, funcție de sarcina β, pentru care are loc randamentul maxim;

Scanned with OKEN Scanner

d) ce modificări intervin dacă sarcina transformatorului este inductivă, avînd un factor de putere 0,8.

13.6 (R). Un autotransformator de 220/100 V alimentează un receptor care absoarbe un curent $I_2 = 11$ A. Numărul total de spire este $W = W_1 + W_2 = 440$ spire. Să se calculeze numărul de spire W_1 și W_2 și curentul primar I_1 (fig. 13.6).

Se neglijează curentul de mers în gol și căderile de tensiune.

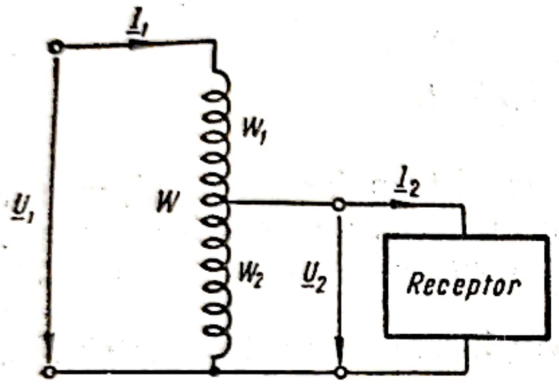


Fig. B.13.6

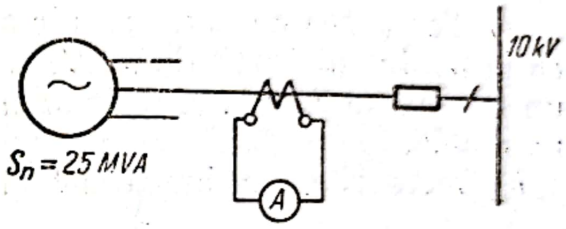


Fig. B.13.7

13.7. Un ampermetru de 5 A este folosit pentru măsurarea curentului debitat de un generator trifazat avînd puterea nominală $S_n = 25$ MVA și tensiunea între faze 10 kV. Se cere să se determine raportul de transformare pe care trebuie să-l aibă transformatorul de măsură, prin intermediul căruia se conectează aparatul de măsură (fig. 13.7).

13.8 (R). Măsurarea energiei la un consumator industrial se face cu un contor montat ca în figura 13.8: bobina de curent este alimentată printr-un transformator de intensitate cu raportul de transfor-

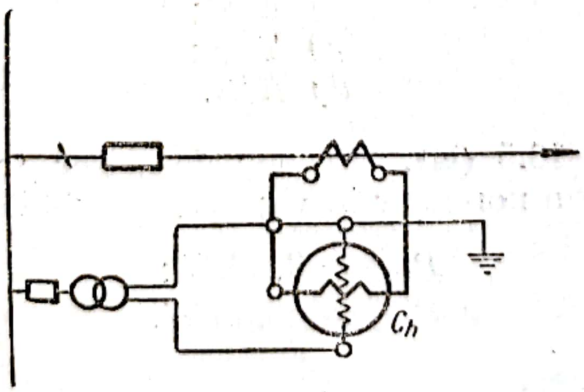


Fig. 13.8

mare 400/5 A, iar bobina de tensiune printr-un transformator de tensiune cu raportul de transformare 6 000/100 V. Constanta contorului este $K = 2\,400$ turații/kWh. Se cere puterea absorbită de consumator, dacă discul contorului efectuează, în timp de 360 s, un număr de 200 rotații.

Scanned with OKEN Scanner

13.9. O rețea de iluminat de 90 kW este alimentată de un transformator trifazat cu raportul 10 000/400 V.

Se cer curenții în primar și în secundar, dacă transformatorul are conexiuni Y/Y și un randament de funcționare 0,95.

13.10 (R). Rezistențele și reactanțele înfășurărilor unui transformator sînt egale cu :

$$R_1 = 0{,}8\ \Omega; \qquad R_2 = 0{,}4\ \Omega;$$

$$X_1 = 4\ \Omega; \qquad X_2 = 1{,}5\ \Omega.$$

La mersul în gol :

$$I_0 = 2\ \text{A};$$

$$P_{10} = 200\ \text{W}.$$

Raportul dintre numărul de spire :

$$\frac{W_1}{W_2} = 2.$$

Se cer :

a) Să se construiască diagrama vectorială a transformatorului, determinîndu-se tensiunea primară, curentul primar și randamentul transformatorului, dacă curentul secundar este 20 A, tensiunea secundară 210 V și factorul de putere în secundar 0,85.

b) Să se determine din diagrama vectorială valoarea tensiunii primare, astfel ca pentru $I_2 = 10$ A, $I_2 = 0$, tensiunea secundară să rămînă 210 V, pentru $\cos \varphi_2 = 1$.

c) Să se construiască diagrama vectorială pentru încercarea în scurtcircuit, determinîndu-se tensiunea de scurtcircuit ($I_{2n} = 20$ A).

13.11 (R). Un transformator de 100 kVA alimentează consumatorii în timpul unui an, după cum urmează :

$T_1 = 4\,000$ ore la plină sarcină.

$T_2 = 2\,000$ ore la sarcină jumătate.

Știind că pierderile acestui transformator sînt :

$$P_{10} = 1\,500\ \text{W};$$

$$P_{1Sc} = 3\,000\ \text{W},$$

Scanned with OKEN Scanner

se cer :

a) Randamentul la plină sarcină al transformatorului, funcție de factorul de putere al receptorului.

b) Randamentul anual în cazul receptorului-rețea de iluminat ($\cos \varphi = 1$).

c) Randamentul anual în cazul *b*, dacă înfășurarea primară nu se deconectează de la rețea.

d) Randamentul anual, dacă receptorul este constituit dintr-o rețea de forță, avînd factorul de putere 0,8.

13.12 (R). Trei transformatoare monofazate identice sînt astfel conectate, încît înfășurările lor secundare formează o stea cu tensiunea de linie de 220 V. Sarcina care se conectează este un receptor în triunghi, echilibrat, avînd pe fiecare braț al triunghiului :

$$R = 20\ \Omega;$$

$$X = 15\ \Omega \text{ (inductivă)}.$$

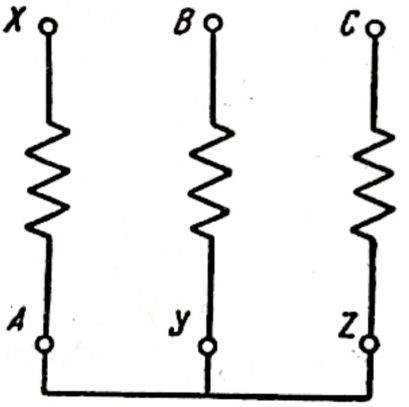


Fig. 13.12

Se cer :

a) Curenții de faze și linie.

b) Cum se schimbă curenții, dacă la conectarea transformatoarelor, unul din ele va fi conectat greșit, ca în figura 13.12.

Se neglijează impedanța înfășurării transformatoarelor.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 14

MAŞINA ASINCRONĂ

A. BREVIAR

14.1. Maşina asincronă este o maşină electrică de curent alternativ, al cărei rotor are turaţia diferită de cea sincronă şi dependentă de sarcină.

14.2. Alunecarea s a maşinii asincrone este diferenţa dintre turaţia de sincronism n_0 şi turaţia rotorului n, raportată la turaţia de sincronism :

$$s = \frac{n_0 - n}{n_0} = 1 - \frac{n}{n_0}. \tag{14.2}$$

14.3. Viteza unghiulară a cîmpului învîrtitor al maşinii polifazate (uzual trifazată) este totodată viteză unghiulară de sincronism şi are expresia :

$$\Omega_0 = \frac{2\pi f_1}{p} = \frac{\pi}{30} n_0, \tag{14.3}$$

în care n_0 este turaţia de sincronism în rotaţii pe minut.

Frecvenţa curenţilor inductori f_1 şi numărul de perechi de poli p determină deci viteza de sincronism.

14.4. Frecvenţa curenţilor induşi f_2 depinde de alunecare şi de frecvenţa curenţilor inductori :

$$f_2 = s f_1. \tag{14.4}$$

14.5. Ecuaţiile de tensiuni şi curenţi pentru o fază sînt asemănătoare ecuaţiilor transformatorului. Pentru circuitul inductor (stator) avem :

$$\underline{V}_1 = (R_1 + \mathrm{j}X_{s1})\underline{I}_1 + \mathrm{j}X_{10}\underline{I}_{10}. \tag{14.5 a}$$

Scanned with OKEN Scanner

Tensiunea fazei, reprezentată simbolic prin $\underline{V}_1$, este deci echilibrată de căderea de tensiune creată de curentul $\underline{I}_1$ în rezistența înfășurării R_1 și în reactanța de dispersiune X_{s1}, precum și de căderea de tensiune creată de curentul de magnetizare $\underline{I}_{10}$ în reactanța de magnetizare X_{10} corespunzătoare tensiunii electromotoare :

$$E_0 = 4{,}44\, f \xi w \Phi_0, \qquad (14.5\ b)$$

ndusă de fluxul util Φ_0.

Curentul de magnetizare $\underline{I}_{10}$, curentul inductor $\underline{I}_1$ și cel indus raportat $\underline{I}'_2$ sînt legați prin relația :

$$\underline{I}_{10} = \underline{I}_1 - \underline{I}'_2 \qquad (14.5\ c)$$

Spre deosebire de transformator, în expresia raportului de transformare k (coeficientul de raportare) intervine multiplicativ pe lîngă raportul numărului de spire (w_1 la w_2) și raportul factorilor de înfășurare (ξ_1 la ξ_2) :

$$k = \frac{w_1 \xi_1}{w_2 \xi_2} = \frac{I_2}{I'_2}. \qquad (14.5\ d)$$

Pentru circuitul închis al indusului (rotor), ținînd seamă de pulsația curenților induși, $\omega_2 = s\omega_1$ (spre a folosi valori ale reactanțelor calculate la pulsația ω_1), avem :

$$0 = (R'_2 + \mathrm{j}sX'_{s2})\underline{I}'_2 - \mathrm{j}sX_{10}\underline{I}_{10}. \qquad (14.5\ e)$$

sau

$$0 = \left(\frac{R'_2}{s} + \mathrm{j}X'_{s2}\right)\underline{I}_2' - \mathrm{j}X_{10}\underline{I}_{10}. \qquad (14.5\ f)$$

Raportarea impedanțelor este similară celei din cazul transformatorului :

$$R'_2 = R_2 k^2, \quad X'_{s2} = X_{s2} k^2. \qquad (14.5\ g)$$

14.6. Schema echivalentă corespunzătoare ecuațiilor (14.5 *a*) (14.5 *c*) și (14.5 *f*) este reprezentată în figura B.14.1 *a*.

Dacă se ține seamă de pierderile în fier (prin curenți turbionari și prin histerezis), ca și în cazul transformatorului, se introduce o rezistență echiva-

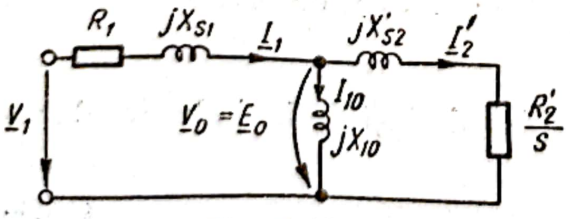


Fig. B.14.1*a*

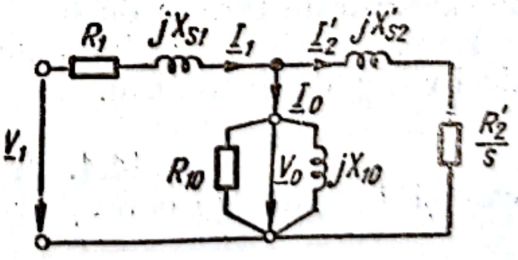


Fig. B.14.1*b*

lentă R_{10} suplimentară, conectată în paralel cu reactanța X_{10}, ca în figura B.14.1 *b*.

Parametrii schemei echivalente se determină ca și la transformator prin încercarea de mers în gol ($s = 0$) și în scurtcircuit (cu rotorul calat, $s = 1$).

Scanned with OKEN Scanner

14.7. Diagrama vectorială a curenților și tensiunilor corespunzătoare schemei echivalente din figura B.14.1 *b* este reprezentată în figura B.14.2.

14.8. Expresia cuplului electromagnetic exercitat asupra rotorului se determină cu aproximație, folosind schema echivalentă simplificată din figura B.14.3.

În schema echivalentă simplificată s-a notat prin X_s suma reactanțelor de dispersiune $X_s = X_{s1} + X'_{s2}$ și s-a neglijat rezistența înfășurării inductoare.

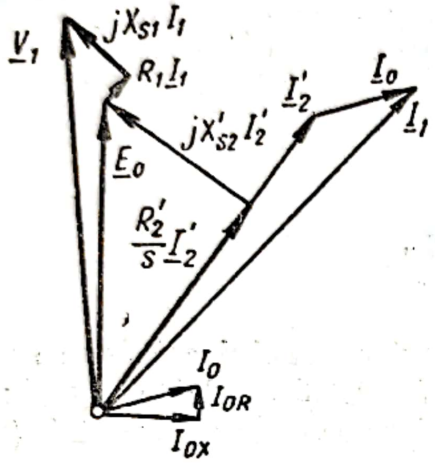


Fig. B.14.2

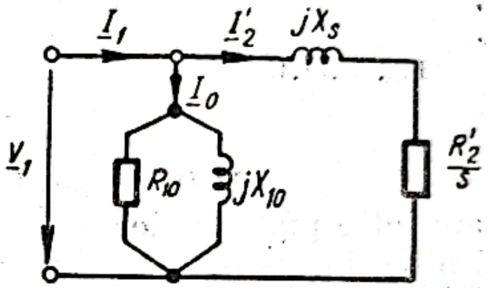


Fig. B. 14.3

14.8 a. Puterea transmisă rotorului de cîmpul electromagnetic corespunde puterii consumate de rezistența echivalentă $\frac{R'_2}{s}$ și are expresia :

$$P_{em} = \frac{3R'_2}{s} \cdot \frac{V^2}{X_s^2 + \left(\frac{R'_2}{s}\right)^2} = \frac{3\frac{V_1^2}{X_s}}{s\frac{X_s}{R'_2} + \frac{R'_2}{sX_s}} = \frac{2P_{max}}{\frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s}}. \qquad (14.8\ a)$$

S-a notat prin s_m alunecarea critică, $s_m = \frac{R'_2}{X_s}$, iar prin $P_{max} = \frac{3}{2}\frac{V_1^2}{X_s}$, puterea maximă transmisă rotorului.

În figura B.14.4 s-a reprezentat caracteristica P_{em} (s).

14.8 b. Cuplul electromagnetic M_{em} este proporțional cu puterea electromagnetică :

$$M_{em} = \frac{P_{em}}{\Omega_0} = \frac{P_{em}}{\frac{\omega}{p}}. \qquad (14.8\ b)$$

Scanned with OKEN Scanner

S-a notat prin Ω_0 viteza de sincronism, iar prin ω — pulsația curenților inductori.

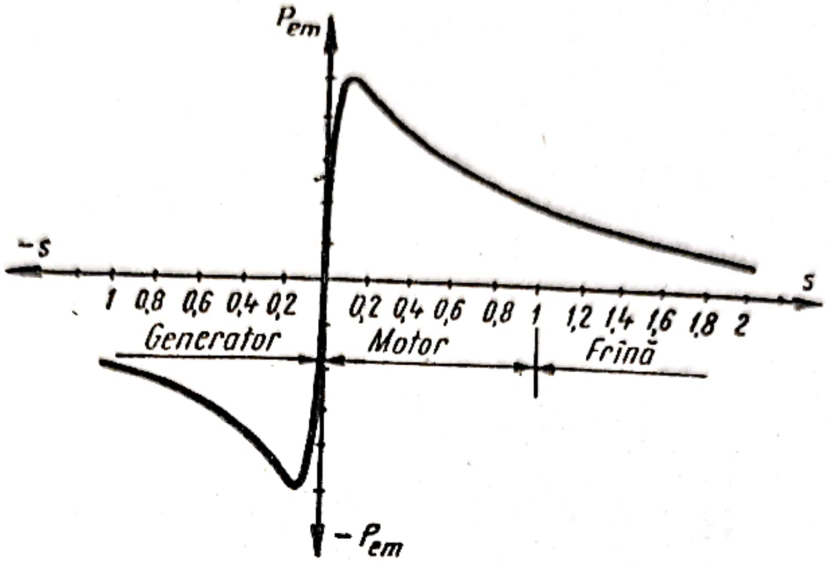


Fig. B.14.4

14.9. Bilanțul puterilor motorului asincron se exprimă ca egalitate între puterea electrică absorbită P_e și celelalte puteri: puterea mecanică utilă, în cazul motorului P_u, și pierderile de putere ΔP (mecanice ΔP_m, în fier ΔP_{Fe} și în cupru ΔP_{Cu}):

$$P_e = P_u + \Delta P = P_u + \Delta P_m + \Delta P_{Fe} + \Delta P_{Cu}. \qquad (14.9)$$

14.10. Randamentul motorului asincron are expresia:

$$\eta = \frac{P_u}{P_e} = \frac{P_u}{P_u + \Delta P} = \frac{P_e - \Delta P}{P_e}. \qquad (14.10)$$

B. PROBLEME

14.1 (R). Un motor asincron trifazat de putere $P_u = 6{,}8$ kW, randament $\eta_u = 0{,}85$, factor de putere $\cos\varphi_n = 0{,}83$ și tensiune $U_n/V_n = 220/127$ V consumă la mers în gol o putere $P_0 = 626$ W și un curent I_0 egal cu 30% din curentul nominal (la tensiunea nominală).

Scanned with OKEN Scanner

La încercarea în scurtcircuit cu tensiune U_{sc} redusă la 15% din tensiunea nominală pentru un curent egal cu cel nominal, motorul absoarbe puterea $P_{sc} = 870$ W.

Să se calculeze :

1. Curentul nominal pe fază și pe linie.
2. Parametrii schemei echivalente în Γ.

14.2 (R). Un motor asincron de 380/220 V, cu rotorul bobinat, are turația nominală $n = 970$ rot/min și este racordat la o rețea trifazată de $U_n / V_n = 220/127$ V.

Impedanța sa de scurtcircuit are valoarea $Z_{sc} = 4{,}15\ \Omega$, rezistența fazei statorice $R_1 = 0{,}46\ \Omega$, iar cea a fazei rotorice $R_2 = 0{,}02\ \Omega$.

Raportul tensiunilor la funcționarea în gol cu circuitul rotoric deschis este

$$k = \frac{220}{42{,}3} = 5{,}2.$$

Să se determine :

1. Valorile reactanțelor de dispersiune ale fazelor.
2. Curenții statorici și rotorici, cuplul motor și factorul de putere la pornire fără reostat.
3. Rezistența reostatului de pornire necesar pentru a obține cuplul de pornire egal cu cel maxim.
4. Curenții statorici și rotorici și cuplul motor la pornire cu reostat.
5. Alunecarea critică și cuplul maxim în funcționarea la tensiunea nominală cu reostatul de pornire scos din circuit (înfășurarea rotorică scurtcircuitată).

14.3 (R). Un motor asincron are puterea nominală $P_n = 7{,}6$ kW, turația nominală $n = 720$ rot/min și capacitatea de suprasarcină :

$$\lambda = \frac{M_{max}}{M_n} = 2{,}4.$$

Să se calculeze :

1. Cuplul nominal, cuplul maxim, alunecarea nominală și alunecarea critică.
2. Caracteristica cuplu-alunecare pe baza determinării punctelor corespunzătoare valorilor alunecării : $s = 0$; $s = 0{,}1$; $s = s_m$; $s = 0{,}5$; $s = 1$.
3. Caracteristica cuplu-alunecare pentru același motor cu reostat de pornire în circuitul rotoric încît cuplul maxim corespunde turației nule.
4. Caracteristica cuplu-alunecare pentru cazul cînd tensiunea de alimentare scade de $\sqrt{3}$ ori în raport cu cea nominală.

Scanned with OKEN Scanner

14.4 (R). Motoarele asincrone cu rotorul în scurt-circuit au capacitatea de suprasarcină $\lambda = \frac{M_{max}}{M_n} = 1{,}6...2{,}5$.

Care este valoarea minimă a tensiunii de alimentare (în raport cu cea nominală), încît să mai fie posibilă funcționarea la cuplul nominal.

14.5. Să se arate că, dacă cuplul rezistent este nul (mers în gol ideal), pierderile de energie prin efect Joule în circuitul rotoric din timpul pornirii unui motor asincron sînt egale cu energia cinetică a rotorului.

Să se evalueze aceleași pierderi de putere pentru regimul de frînare cu conexiuni contrare și pentru cel de inversare a sensului de rotație.

14.6 (R). Un motor sincron trifazat de putere nominală $P_n = 120$ kW, randament $\eta_n = 0{,}85$, tensiune de linie $U_n = 6$ kV și factor de putere cos $\varphi_n = 0{,}8$ este pornit ca motor asincron.

Pentru pornirea în asincron la valorile nominale ale tensiunii se cunosc: Curentul de pornire $I_p = 5{,}5\, I_n$ și cuplul de pornire $M_p = 1{,}45 \cdot M_n$.

1. Să se calculeze reactanța motorului în momentul pornirii, neglijîndu-se valoarea mică a rezistenței.

Deoarece mecanismul antrenat necesită din partea motorului un cuplu de pornire $M_{rp} = 0{,}4\, M_n$, să se determine:

2. Reactanța pe fază a bobinei („reactorului") care trebuie conectată în serie cu motorul, tensiunea la bornele motorului în momentul pornirii cu reactor și valoarea curentului de pornire.

3. Ce valoare va avea curentul absorbit de la rețea, dacă pornirea se face în aceleași condiții, dar cu autotransformator în loc de reactor?

4. Este posibilă pornirea motorului prin schimbarea conexiunii triunghi-stea?

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 15

MAȘINA SINCRONĂ

A. BREVIAR

15.1. Mașina sincronă este o mașină electrică de curent alternativ al cărei rotor are turația constantă (independentă de sarcină) determinată de frecvența f_1 a tensiunii la bornele înfășurărilor de curent alternativ și de numărul p de perechi de poli:

$$n = \frac{60 f_1}{p} \tag{15.1}$$

15.2. Înfășurarea de excitație (uzual rotorică) este alimentată în curent continuu.

15.3. Schema echivalentă cu sursă de curent a mașinii sincrone cu poli netezi rezultă conform figurii B. 15.1 *a*.

Transformarea sursei de curent într-o sursă de tensiune echivalentă conduce la schema din figura B.15.1 *b*.

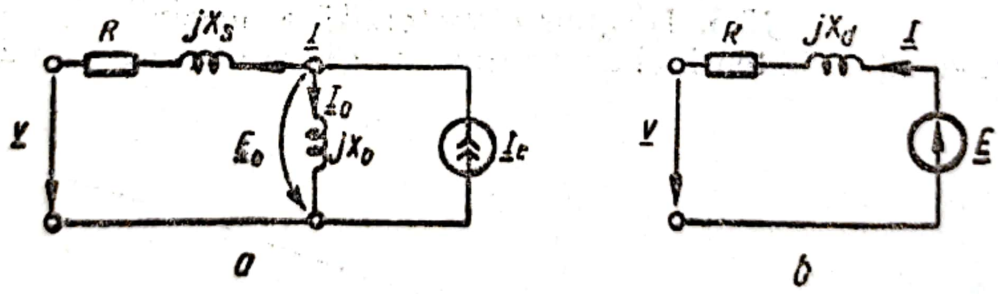


Fig. B.15.1 *a*, *b*

Tensiunea electromotoare „internă" indusă de fluxul magnetic învîrtitor al curentului de excitație are expresia

$$\underline{E} = \mathrm{j} X_0 \underline{I}_e. \tag{15.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Tensiunea E_0 corespunzătoare fluxului magnetic rezultant în întrefier determină starea de magnetizare a mașinii, deci și valoarea saturată a „reactanței de reacție" X_0.

15.4. Ecuațiile de tensiuni și curenți corespunzătoare schemei echivalente cu sursă de curent sînt următoarele:

$$\underline{V} = \underline{E}_0 - (R + \mathrm{j}\, X_s)\underline{I}$$
$$\underline{I}_e = \underline{I}_0 + \underline{I} \qquad (15.4\ a)$$
$$\underline{E}_0 = \mathrm{f}(\underline{I}_0)$$

Caracteristica voltamper a reactanței de reacție X_0, $E_0 = \mathrm{f}(I_0)$ se determină prin simpla schimbare a scării absciselor la caracteristica de mers în gol $E_0 = \mathrm{f}(i_e)$ a mașinii. Curentul de excitație i_e și curentul sursei de curent echivalente I_e sînt legate prin relația liniară

$$I_e = k_{sc}\frac{X_0 + X_s}{X_0}\, i_e = k_{sc}\,\frac{X_d}{X_0}\cdot i_e = \alpha i_e. \qquad (15.4\ b)$$

Coeficientul α de echivalență al curenților statorici și rotorici se determină cu ajutorul pantei caracteristicii de scurtcircuit $I_{sc} = k_{sc}\, i_e$ și a raportului valorilor nesaturate ale reactanței sincrone X_d la cea de reacție X_0.

15.5. Ecuația de tensiuni corespunzătoare schemei echivalente cu sursă de tensiune se folosește mai ales la studiul funcționării în domeniul liniar (nesaturat)

$$\underline{V} = \underline{E} - (\mathrm{j}X_d + R)\underline{I}. \qquad (15.5.)$$

15.6. Diagrama vectorială a mașinii sincrone corespunzătoare ecuației de tensiuni anterioare este cea din figura B.15.2.

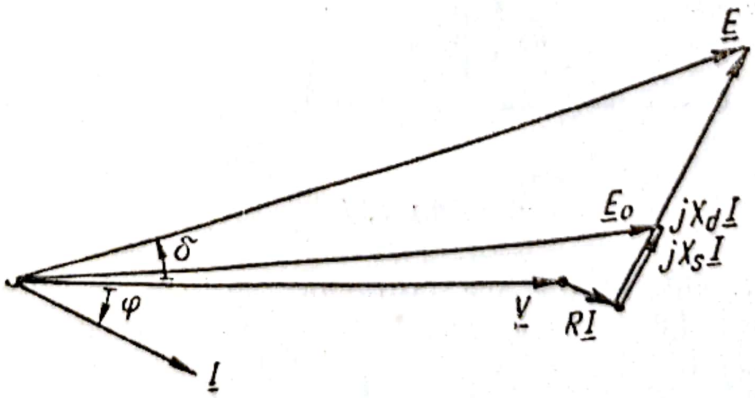


Fig. B.15.2

15.7. Puterea electromagnetică, dacă se neglijează valoarea mică a rezistenței R, este dată de expresia următoare

$$P_{em} = \frac{3EV}{X_d} \sin \delta. \qquad (15.7\ a)$$

S-a notat prin δ unghiul vectorului reprezentativ al tensiunii electromotoare E față de cel al tensiunii la borne V.

Puterea reactivă a mașinii sincrone se exprimă și sub forma

$$Q = 3\left(\frac{EV}{X_d} \cos \delta - \frac{V^2}{X_d}\right). \qquad (15.7\ b)$$

15.8. Bilanțul puterilor și randamentul mașinii sincrone are expresii similare cu cele ale mașinii asincrone.

B. PROBLEME

15.1 (R). Un generator sincron trifazat de putere $P_n = 30$ kW, $\cos \varphi_n = 0{,}8$, tensiune nominală de linie $U_n = 380$ V are caracteristica de mers în gol $E_0 = f(i_e)$ și cea de scurtcircuit trifazat $I_k = f(i_e)$ reprezentate în figura 15.1.

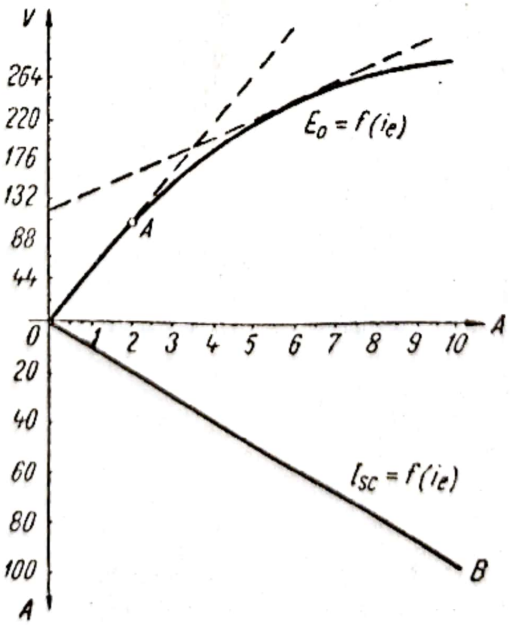


Fig. B.15.1

1. Cunoscînd reactanța de dispersiune statorică $X_s = 0{,}1\, Z_n$, unde Z_n este impedanța nominală de sarcină, să se determine parametrii schemei echivalente cu sursă de curent a generatorului.

2. Folosind schema echivalentă să se predetermine caracteristica în sarcină $U = f(i_e)$ la curent de sarcină $I = I_n$ = constant, caracteristica externă $U = f(I)$ la curent de excitație constant i_e = 5 A și caracteristica de reglaj $I = f(i_e)$ la $U = U_n = 380$ V = constant.
Sarcina se va considera de două feluri : inductivă și capacitivă.

15.2 (R). Un motor sincron de putere nominală P_n = 27 kW, $\cos \varphi_n = 0{,}8$ (capacitiv), $\eta_n = 0{,}9$, tensiune nominală de linie $U_n = 380$ V are reactanța sincronă $X_d = 0{,}75\, Z_n = 75\%\, Z_n$.
Să se determine :
1. Tensiunea electromotoare internă nominală.
2. Valoarea coeficientului de suprasarcină $\lambda = \frac{P_{max}}{P_n}$.
3. Care va fi valoarea coeficientului de suprasarcină dacă motorul funcționează la valorile nominale ale parametrilor, dar la factor de putere $\cos \varphi = 0{,}8$ inductiv. Ce valoare are în acest caz puterea reactivă consumată.
4. La ce valori scăzute ale tensiunii la borne mai este posibilă funcționarea la cuplu nominal. Ce valoare are puterea reactivă în acest caz.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 16

MAȘINI DE CURENT CONTINUU

A. BREVIAR

16.1. Tensiunea electromotoare indusă E este proporțională cu viteza de rotație Ω și cu fluxul magnetic inductor Φ al unui pol

$$E = k\Omega\Phi. \qquad (16.1\ a)$$

Constanta k depinde de valori constructive ale mașinii (număr de spire N, număr de perechi de poli p, număr de căi de curent $2a$

$$k = \frac{pN}{2\pi a}. \qquad (16.1\ b)$$

Caracteristica de mers în gol a generatorului $E = f(i_e)$ se determină experimental ca relație între tensiunea de mers în gol (egală cu tensiunea electromotoare) și curentul de excitație i_e.

16.2. Ecuațiile de tensiune ale mașinii de curent continuu, dacă nu se consideră efectul reacției indusului, sînt următoarele:

Pentru generator $\qquad U = E - r_i I \qquad (16.2\ a)$

Pentru motor $\qquad U = E + r_i I \qquad (16.2\ b)$

S-a notat prin U tensiunea la periile colectoare, prin r_i rezistența internă, iar prin I curentul în indus; sensurile de referință corespunzătoare sînt indicate în figura B.16.1, a — pentru generator, respectiv în figura B.16.1, b — pentru motor.

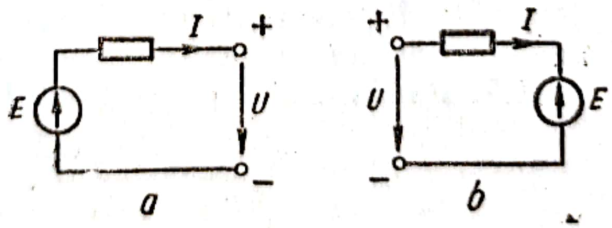


Fig. B.16.1, *a*, *b*

Scanned with OKEN Scanner

16.3. Ecuațiile de curent exprimă relațiile dintre curentul din indus I, curentul de la rețea I_r și curentul de excitație i_e. La mașinile de curent continuu cu excitație derivație avem relațiile următoare:

Pentru generator $I_r = I - i_e$ (16.3 *a*)

Pentru motor $I_r = I + i_e$ (16.3 *b*)

16.4. Schemele echivalente ale mașinii de curent continuu cu excitație derivație sînt reprezentate în figura B.16.2, *a* pentru generator și în figura B.16.2, *b* pentru motor.

16.5. Cuplul electromagnetic M_e care se exercită asupra rotorului are expresia

$$M_e = k\,\Phi\,I. \qquad (16.5\ a)$$

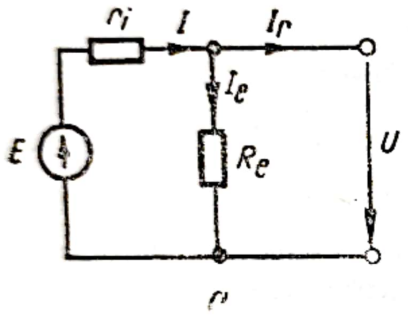


Fig. B.16.2, *a*

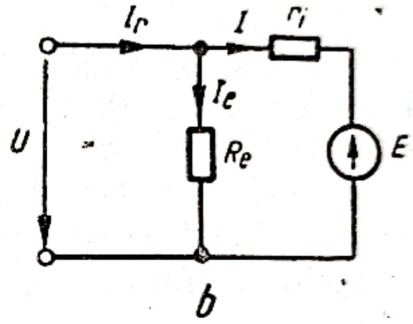


Fig. B.16.2, *b*

El corespunde puterii electrice

$$P_e = \Omega M_e = k\Phi\Omega I = EI. \qquad (16.5\ b)$$

16.6. Bilanțul puterilor la generator exprimă egalitatea puterii mecanice primite P_m cu cea electrică debitată (utilă) $P_u = UI$, plus pierderile de putere ΔP (mecanice ΔP_m, în fier ΔP_{Fe} și în cupru prin efect Joule — ΔP_{Cu})

$$P_m = P_u + \Delta P = P_u + \Delta P_m + \Delta P_{Fe} + \Delta P_{Cu}. \qquad (16.6)$$

Puterea mecanică este o funcție de turație, caracteristică mașinii primare (inclusiv a regulatorului său de turație) $P_m = f(\Omega)$. Pierderile de putere mecanice ΔP_m și în fier ΔP_{Fe} depind de asemenea de turație. Pierderile în cupru depind de pătratul valorii curentului.

16.7. Randamentul generatorului are expresia

$$\eta = \frac{P_u}{P_m} = \frac{P_u}{P_u + \Delta P} = \frac{P_m - \Delta P}{P_m}. \qquad (16.7)$$

Scanned with OKEN Scanner

16.8. Bilanțul puterilor la motor se exprimă ca egalitate a puterii electrice primite $P = UI$ cu cea mecanică (utilă) P_u plus pierderile de putere ΔP (mecanice ΔP_m, în fier ΔP_{Fe} și în cupru prin efect Joule — ΔP_{Cu})

$$P = P_u + \Delta P = P_u + \Delta P_m + \Delta P_{Fe} + \Delta P_{Cu}. \qquad (16.8)$$

Puterea mecanică (utilă) este o funcție de turație, caracteristică mecanismului antrenat, $P_u = f(\Omega)$.

16.9. Randamentul motorului are expresia

$$\eta = \frac{P_u}{P} = \frac{P_u}{P_u + \Delta P} = \frac{P - \Delta P}{P}. \qquad (16.9)$$

B. PROBLEME

16.1 (R). Un generator de curent continuu cu excitație separată are puterea nominală $P_n = 1{,}44$ kW la tensiunea nominală $U_n = 120$ V. Să se calculeze:

1. Curentul nominal I_n și rezistența echivalentă a sarcinii nominale R_n.
2. Rezistența internă echivalentă r_i dacă valoarea curentului de scurtcircuit este $I_{sc} = 156$ A, iar tensiunea de mers în gol are valoarea $E = 130$ V.
3. Puterea mecanică absorbită și randamentul generatorului dacă pierderile de mers în gol ΔP_0 reprezintă 7% din puterea nominală.
4. Rezistența de sarcină pentru care puterea utilă P este maximă. Valoarea curentului, a tensiunii la borne și a randamentului în acest caz.
5. Rezistența de sarcină pentru care randamentul este maxim în ipoteza că pierderile în fier și mecanice se păstrează și la funcționarea în sarcină, iar tensiunea la borne se reglează la valoarea constantă.

16.2 (R). Un generator de curent continuu cu excitație derivație are la turația de 1 500 rot/min, caracteristica de mers în gol — $E = f\ (i_e)$ — reprezentată în figura 16.2.

Scanned with OKEN Scanner

Mașina funcționează la turația de 1 000 rot/min.

Să se determine:

1. Tensiunea la bornele generatorului pentru funcționarea în gol, fără sarcină utilă, dacă reostatul de excitație are o rezistență constantă $R_e = 32\Omega$, iar rezistența internă măsurată la periile colectoare este $r_i = 0{,}1\ \Omega$.

2. Curentul și tensiunea la bornele generatorului dacă acesta alimentează un consumator cu rezistența echivalentă $R_s = 2{,}72\ \Omega$.

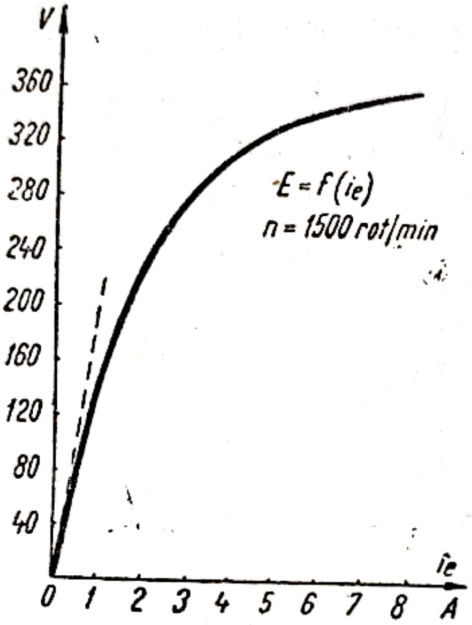


Fig. 16.2

3. Valoarea minimă a rezistenței de sarcină pe care generatorul o poate alimenta în funcționarea stabilă.

4. Curentul maxim pe care îl poate debita mașina, tensiunea la borne și rezistența consumatorului corespunzător.

5. Puterea maximă pe care o poate debita mașina. Valoarea curentului, a tensiunii la borne și a rezistenței la sarcină corespunzătoare puterii maxime.

16.3 (R) Un generator de curent continuu cu excitație separată are porțiunea liniară a caracteristicii de mers în gol $E = \rho i_e$ cu panta $\rho = 200$ V/A. Caracteristica de funcționare în scurtcircuit este o dreaptă $I_{sc} = \beta i_e$ cu $\beta = 100$. Rezistența internă măsurată la periile colectoare pentru mașina în repaus are valoarea $r_i = 0{,}7\ \Omega$.

1. Să se calculeze parametrii schemelor echivalente (dipol) cu sursă de tensiune și cu sursă de curent.

2. Dată fiind caracteristica de mers în gol (fig. 16.2) să se predetermine caracteristica în sarcină $U = f(i_e)$ la $I = 85$ A = constant, caracteristica externă $U = f(I)$ la $i_e = 6$A = const. și caracteristica de reglaj $I = f(i_e)$ la $U = 260$ V = const.

Scanned with OKEN Scanner

16.4 (R). Un motor de curent continuu cu excitația derivație are tensiunea nominală $U_n = 220$ V, curentul nominal $I_n = 30$ A și puterea nominală $P_n = 5{,}56$ kW.

La mersul în gol și turația nominală $n = 1\,500$ rot/min motorul consumă un curent de 1,5 A.

Curentul de excitație necesar funcționării la mersul în gol cu turația nominală și la tensiunea la borne corespunzătoare aceleiași tensiuni electromotoare ca la mersul în sarcină este $i_e = 1$ A. Rezistența indusului la temperatura de $\theta = 20°C$ este $r_i = 0{,}4\ \Omega$, iar coeficientul de temperatură este 0,0425 1/°C.

1. Să se determine randamentul motorului la plină sarcină (I_n) la $\frac{1}{4} I_n$, $\frac{1}{2} I_n$ și $\frac{3}{4} I_n$ pentru temperatura de funcționare în sarcină $\theta_2 = 80°C$.
2. Să se determine sarcina corespunzătoare randamentului maxim.

16.5. Să se arate că dacă se cuplează mecanic două mașini de curent continuu identice conectate electric la barele comune ale unei surse externe și excitate, încît una funcționează ca generator și alta ca motor (fig. 16.5) randamentul η considerat același pentru motor, cît

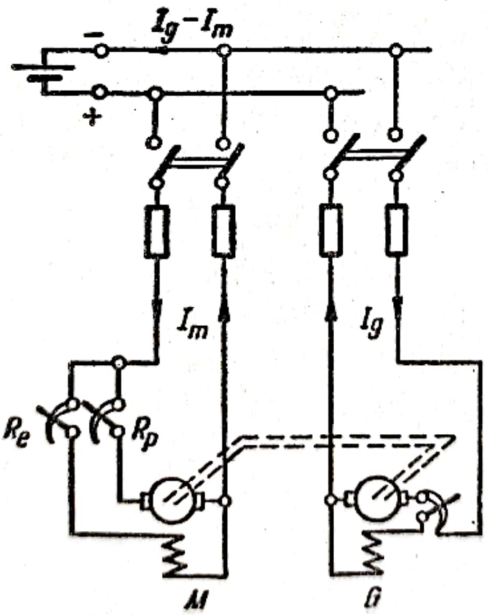


Fig. 16.5

și pentru generator se poate determina cu ajutorul expresiei $\eta = \sqrt{\frac{I_g}{I_m}}$. S-a notat cu I_g curentul debitat de generator și cu I_m curentul absorbit de motor.

16.6 (R). Un motor derivație de putere $P_n = 9{,}6$ kW, tensiune nominală $U_n = 220$ V, curent nominal $I_n = 51$ A, curent de excitație $i_{en} = 1$ A și turație nominală $n = 500$ rot/min are rezistența indusului egală cu 5% din rezistența echivalentă nominală.

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine:
1. Rezistența indusului și tensiunea electromotoare nominală.
2. Cuplul nominal util al motorului.
3. Cuplul electromagnetic nominal (transmis rotorului) și cuplul de pierderi la mersul în gol.
4. Ecuația caracteristicii mecanice cuplu–turație.
5. Reprezentarea grafică a caracteristicii mecanice pentru tensiunea nominală U_n, $1/2\ U_n$, $1/4\ U_n$; pentru fluxul nominal Φ_n, $1/2\ \Phi_n$, $2\Phi_n$ și pentru o rezistență variabilă în circuitul indusului $r = r_i$, $r = 2r_i$, $r = 4r_i$.
6. Viteza de rotație la mersul în gol.

16.7 (R). Un motor derivație de putere $P_n = 9{,}6$ kW, tensiune nominală $U_n = 220$ V, curent nominal $I_n = 51$ A, curent de excitație $i_{en} = 1$ A și turație nominală $n = 500$ rot/min, are rezistența indusului egală cu 5% din rezistența nominală.

Pentru pornire se admite $I_{max} = 2{,}5\ I_n$ și $I_{min} = 1{,}15\ I_n$.

Să se determine numărul treptelor și valoarea rezistențelor de pornire.

16.8 (R). Motorul cu excitație derivație din problema 16.7 are un moment de inerție al rotorului (inclusiv mecanismul antrenant), $J = 4{,}65$ kg m^2.

Să se calculeze și construiască curbele turației motorului și ale curentului său în cursul perioadei de pornire dacă deconectarea în trepte a rezistențelor reostatului de pornire se face automat în funcție de I_{min}, iar cuplul rezistent este cel nominal considerat constant (independent de turație).

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 17

ELECTRONICĂ INDUSTRIALĂ

A. BREVIAR

17.1. Emisia termoelectronică. Prin încălzirea unui corp metalic sau semiconductor se comunică unora din electronii acestuia o energie suficientă pentru a putea părăsi corpul.

Lucrul de extracție L_e este egal cu energia care trebuie comunicată electronului pentru ca acesta să poată părăsi metalul.

Potențialul de ieșire este, prin definiție,

$$\varphi = \frac{L_e}{e_0}, \qquad (17.1\ a)$$

unde: $e_0 = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C este sarcina electronului.

Densitatea curentului termoelectronic emis de un corp încălzit la temperatura T este conform relației Richardson-Dushman:

$$J_e = A\, T^2\, e^{-\frac{e_0 \varphi}{kT}}, \qquad (17.1\ b)$$

unde: $A = 30 \ldots 60 \frac{A}{cm^2\,(°K)^2}$ este o constantă empirică depinzînd de natura metalului; $e = 2{,}73 \ldots$ — baza logaritmilor naturali.

17.2. Dioda cu vid este un tub electronic ce cuprinde doi electrozi, anodul și catodul, în interiorul unui balon vidat. Catodul C este alcătuit dintr-un filament de wolfram sau wolfram toriat (reprezentarea din fig. B.17.1 *a*) fie, mai frecvent, dintr-un cilindru din oxizi de bariu și stronțiu încălzit de un filament de wolfram (reprezentarea din fig. B.17.1 *b*).

Scanned with OKEN Scanner

Rolul catodului este de a elibera, prin emisie termoelectrică, electronii care să permită trecerea curentului prin tub. Anodul A este metalic și are de obicei forma unui cilindru care înconjură catodul.

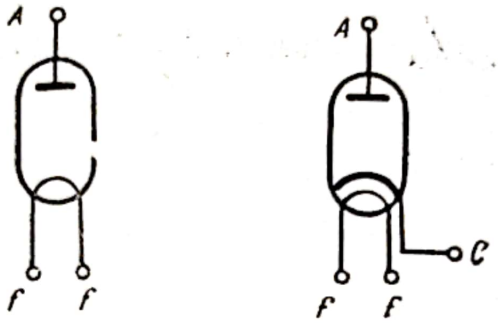


Fig. B.17.1

Caracteristica curent anodic—tensiune anodică (i_A—u_A) a unei diode cu vid este de tipul celei din figura B.17.2. Dioda conduce unidirecțional; electronii emiși de catod se pot deplasa numai spre anod, astfel încît curentul poate trece numai de la anodul pozitiv la catodul negativ.

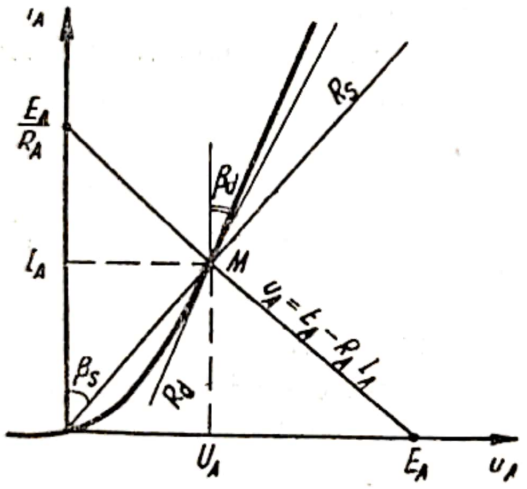


Fig. B.17.2

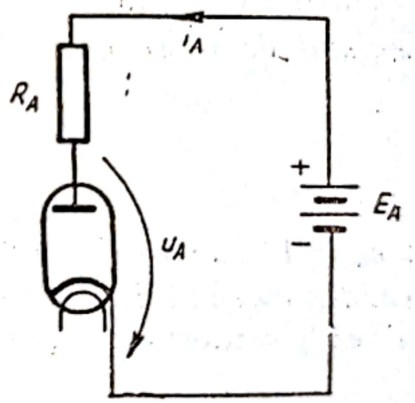


Fig. B.17.3

Funcționarea în curent continuu a diodei, conectată ca în figura B.17.3, este descrisă de ecuațiile:

$$U_A = U_A(I_A), \qquad (17.2\,a)$$

$$U_A = E_A - R_A I_A. \qquad (17.2\,b)$$

Cele două ecuații se reprezintă pe același grafic ca în figura B.17.2. Reprezentarea grafică a ecuației (17.2 *a*) este chiar *caracteristica* (i_A—u_A) *a diodei*, iar reprezentarea ecuației (17.2 *b*) este *dreapta de sarcină* a circuitului. La intersecția celor două curbe se află *punctul de funcționare statică* M al diodei, căruia îi corespunde tensiunea anodică continuă U_A și curentul anodic continuu I_A.

Rezistența de curent continuu sau *statică* a unei diode (vezi și § 11.2) este, prin definiție :

$$R_{cc} = R_s = \frac{U_A}{I_A}. \qquad (17.2\ c)$$

Rezistența internă sau *dinamică* a diodei este, prin definiție :

$$R_i = R_d = \frac{du_A}{di_A} \text{ și deci } R_d \simeq \frac{\Delta u_A}{\Delta i_A}, \qquad (17.2\ d)$$

unde : Δu_A și Δi_A sînt mici variații ale tensiunii și curentului anodic în jurul valorilor de curent continuu U_A și respectiv I_A.

Rezistența de curent continuu și rezistența internă a diodei depind de punctul de funcționare.

Circuitul echivalent al unei diode în curent alternativ, în aproximație liniară este reprezentat în figura B. 17. 4 *a*. Comutatorul este pe poziția *a* cînd dioda este polarizată direct (anodul pozitiv față de catod) și conduce, și pe poziția *b* la polarizare inversă, cînd dioda este blocată. R_i este rezistența internă a diodei în stare de conducție.

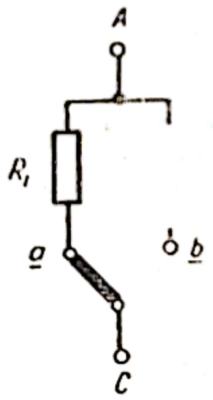


Fig. B.17.4 *a*

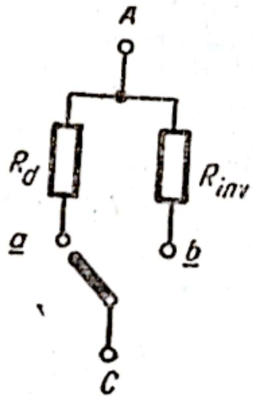


Fig. B.17.4 *b*

17.3. Dioda semiconductoare se bazează pe proprietatea de conductibilitate unidirecțională a joncțiunilor între materialele semiconductoare de tip *p* și de tip *n* sau a contactelor semiconductor-metal. Caracteristicile diodelor semiconductoare sînt similare cu ale celor cu vid, cu deosebirea că blocarea la polarizarea inversă este mai slabă.

Schema echivalentă este dată în figura B.17.4 *b*, unde R_d este rezistența internă la polarizarea directă, iar R_{inv} rezistența internă la polarizarea inversă.

17.4. Tubul stabilitron este o diodă cu gaz cu catod rece, avînd o caracteristică de forma din figura B.17.5, ceea ce permite men-

Scanned with OKEN Scanner

ținerea tensiunii la borne aproximativ egală cu tensiunea de aprindere $U_{apr} = 70 \ldots 120$ V.

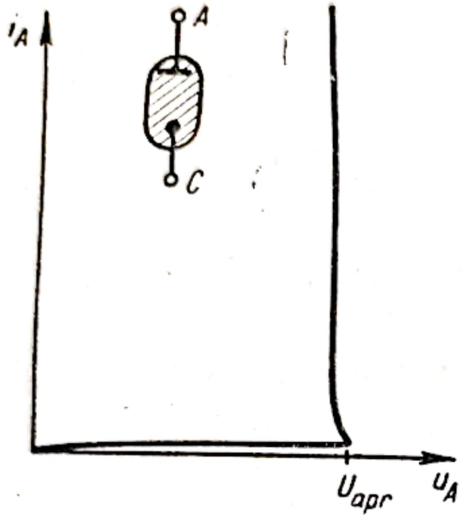


Fig. B.17.5

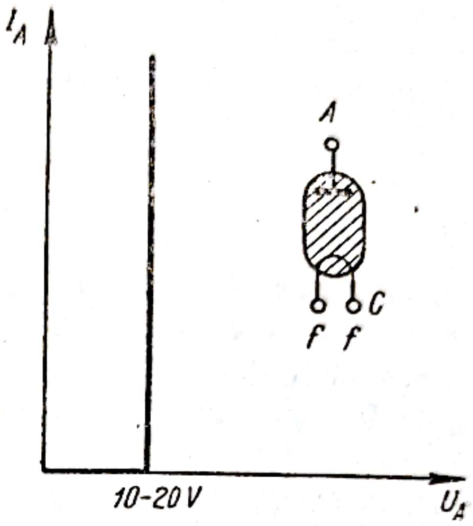


Fig. B.17.6

17.5. Gazotronul este o diodă cu gaz, catod cald și descărcare în arc, a cărei caracteristică de tipul celei din figura B.17.6 o face utilă ca o redresoare de foarte mică rezistență internă.

17.6. Tubul cu catod de mercur cu schema din figura B.17.7 se utilizează pentru redresoarele polifazate de putere. Descărcarea în arc produsă în tub este preluată pe rînd, o dată cu pozitivizarea sa, de

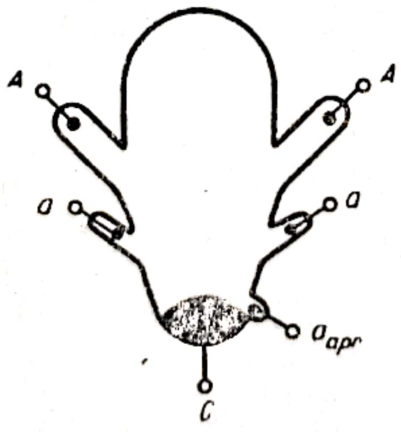


Fig. B.17.7

fiecare din anozii principali (A), în număr de cel puțin trei. Anozii auxiliari servesc la aprinderea arcului (a_{apr}) și la menținerea sa (a), cînd electrozii principali nu sînt polarizați.

Scanned with OKEN Scanner

17.7. Redresorul monoalternanță cu schema din figura B. 17.8 *a* produce la bornele rezistenței de sarcină R_S, o tensiune pulsatorie de forma din figura B. 17.8 *b*, a cărei componentă continuă este :

$$U_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} U_{max}\sin \omega t\,dt = \frac{U_{max}}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}U \simeq 0{,}45\ U, \quad (17.7)$$

unde U_{max} și U sînt valoarea maximă și respectiv valoarea eficace a tensiunii sinusoidale.

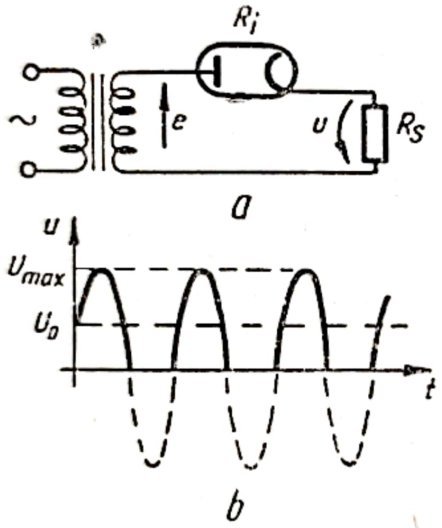


Fig. B.17.8

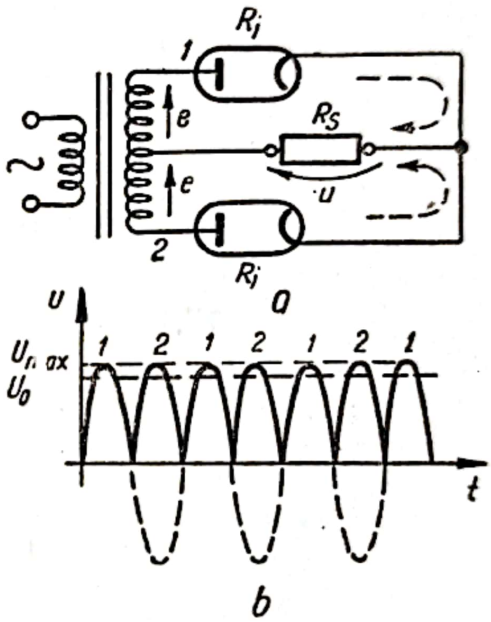


Fig. B.17.9

17.8. Redresorul dublă alternanță cu schema din figura B. 17.9 *a* produce la bornele rezistenței de sarcină R_S o tensiune pulsatorie de forma din figura B. 17.9 *b*, a cărei componentă continuă este :

$$U_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} U_{max}\sin \omega t\,dt = \frac{2\,U_{max}}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}U \simeq 0{,}9\ U. \quad (17.8)$$

17.9. Redresorul trifazat cu schema din figura B. 17.10 *a* produce la bornele rezistenței de sarcină R_S o tensiune a cărei formă de

undă este cea din figura 17.10 *b* și a cărei componentă continuă este

$$U_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u\,dt = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}U_{max} = \frac{3\sqrt{6}}{2\pi}U \simeq 1{,}17\,U. \qquad (17.9)$$

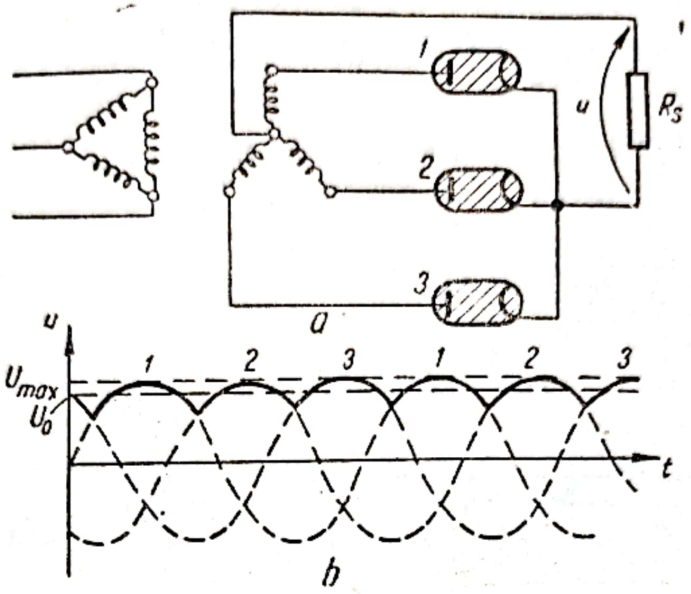


Fig. B.17.10

17.10. Trioda este un tub electronic cuprinzînd trei electrozi: catodul, anodul și, între ei, un electrod de comandă *grila*. Rolul grilei, de obicei polarizată negativ față de catod, este de a comanda mărimea curentului anodic.

Caracteristicile $(i_A - u_A)$ la u_G = const. ale triodei sînt de tipul celor din figura B. 17.11 *a*. Trioda poate fi privită ca o diodă a cărei caracteristică $(i_A - u_A)$ variază în funcție de tensiunea de grilă u_G.

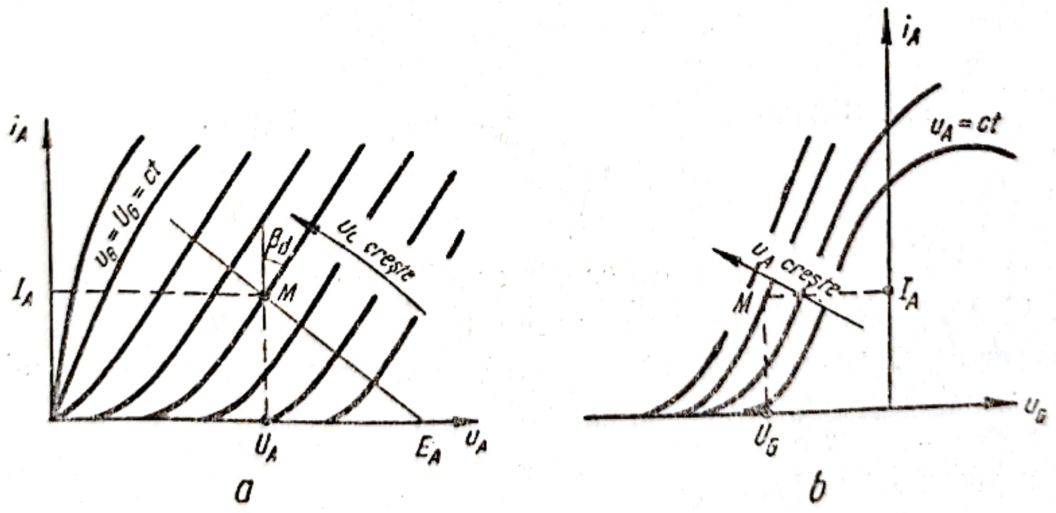


Fig. B.17.11

Caracteristicile $(i_A - u_A)$ la u_G = const. au aspectul din figura B. 17.11 *b* și pun în evidență rolul tensiunii de grilă în comanda curentului anodic.

Scanned with OKEN Scanner

Rezistența internă a triodei este, prin definiție:

$$R_i = \frac{\partial u_A}{\partial i_A} \text{ și deci } R_i \simeq \left(\frac{\Delta u_A}{\Delta i_A}\right)_{u_G = \text{const.}} \qquad (17.10\ a)$$

Panta triodei este, prin definiție:

$$S = \frac{\partial i_A}{\partial u_G}, \text{ deci } S \simeq \left(\frac{\Delta i_A}{\Delta u_G}\right)_{u_A = \text{const.}} \qquad (17.10\ b)$$

și este o măsură a eficacității comenzii pe grilă.

Factorul de amplificare al triodei se definește prin relația:

$$\mu = -\frac{\partial u_A}{\partial u_G} \text{ și deci } \mu \simeq -\left(\frac{\Delta u_A}{\Delta u_G}\right)_{i_A = \text{const.}} \qquad (17.10\ c)$$

Se stabilește relația:

$$\mu = R_i S. \qquad (17.10\ d)$$

Valorile parametrilor R_i, S și μ depind de punctul de funcționare al triodei și sînt indicate în cataloagele de tuburi electronice pentru punctul de funcționare recomandat.

Punctul de funcționare al triodei, conectată ca în figura B.17.12, se stabilește ca în cazul diodei, alegînd însă din familia caracteristicilor $u_A = u_A(i_A)$ pe cea corespunzătoare tensiunii de grilă $U_G = -E_G$.

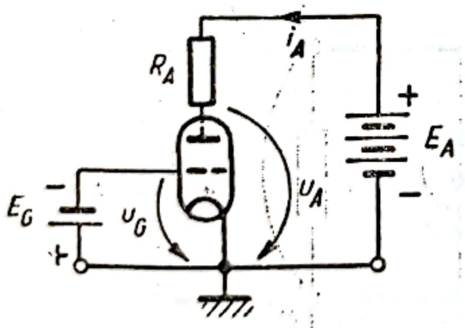


Fig. B.17.12

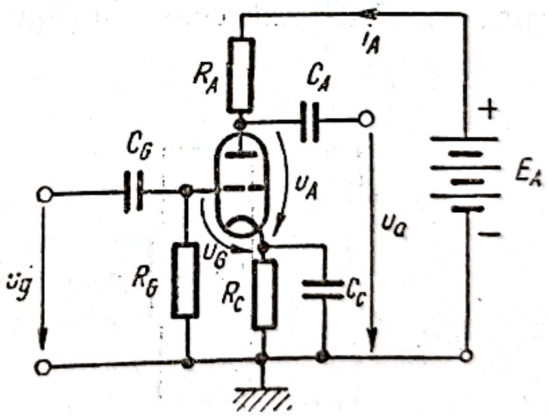


Fig. B.17.13

Negativarea automată a grilei se realizează cu un montaj ca în figura B.17.13, care evită utilizarea unei surse de polarizare E_G. Tensiunea negativă a grilei față de catod se obține cu ajutorul rezistenței R_C, care, parcursă de componenta continuă a curentului anodic, pozitivează catodul în raport cu masa, deci în raport cu grila legată la masă prin R_G.

$$U_G = -R_C I_A. \qquad (17.10\ e)$$

Scanned with OKEN Scanner

Condensatorul C_C are ca scop să lege catodul la masă în curent alternativ, chiar la cea mai mică frecvență de lucru f_{min}, astfel încît rezistența R_C să nu intervină în funcționarea în regim dinamic a montajului. De obicei se ia :

$$\frac{1}{\omega_{min} C_C} \leqslant \frac{R_C}{10} . \qquad (17.10\,f)$$

Amplificarea unui montaj este, prin definiție :

$$A = \frac{du_A}{du_G} \text{ și deci } A \simeq \frac{\Delta u_A}{\Delta u_G} \qquad (17.10\,g)$$

calculată pentru o impedanță de sarcină constantă.

Amplificarea, în cazul unor tensiuni alternative, se calculează în funcție de parametrii tubului și ai montajului cu relația :

$$\underline{A} = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_g} = - \frac{\mu \underline{Z}_a}{R_i + \underline{Z}_a} \qquad (17.10\,h)$$

sau

$$\underline{A} = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_g} = - S \frac{R_i \underline{Z}_a}{R_i + \underline{Z}_a} , \qquad (17.10\,i)$$

unde $\underline{Z}_a$ este impedanța circuitului anodic al tubului.

În cazul circuitelor din figurile B. 17.12 și B. 17.13, $\underline{Z}_a = R_A$ și amplificarea este o mărime reală.

Schemele echivalente în curent alternativ ale unui montaj de tipul celui din figura B. 17.13 sînt cele din figurile B. 17.14 *a* și B. 17.14 *b* cores-

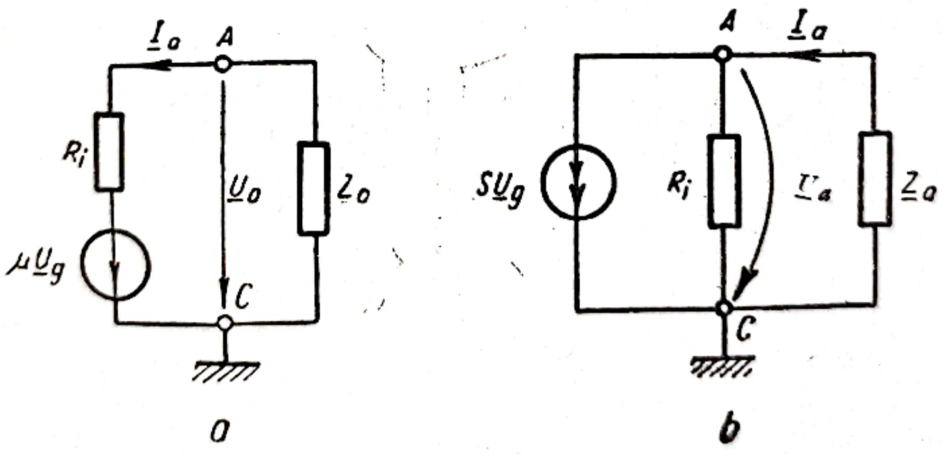


Fig. B.17.14

punzătoare utilizării unui generator de tensiune constantă, respectiv unu generator de curent constant. În cazul triodei se utilizează frecvent schema din figura B. 17.14 *a* și, corespunzător acesteia, relația (17.10 *h*) pentru calculul amplificării montajului.

Scanned with OKEN Scanner

Condensatoarele de cuplaj C_A și C_G din figura B. 17.13 separă etajele succesive din punctul de vedere al tensiunii continue și se aleg astfel încît reactanța lor să fie neglijabilă chiar și la frecvența minimă de lucru.

17.11. Tiratronul este o triodă cu gaz cu catodul cald, care, pentru o tensiune anodică dată, se aprinde cînd tensiunea de grilă atinge un anumit prag de aprindere. După aprinderea tiratronului tensiunea grilei nu mai influențează funcționarea tubului, stingerea acestuia neputîndu-se realiza decît prin scăderea tensiunii anodice. Caracteristica de aprindere a tiratronului este de tipul celei din figura B. 17.15.

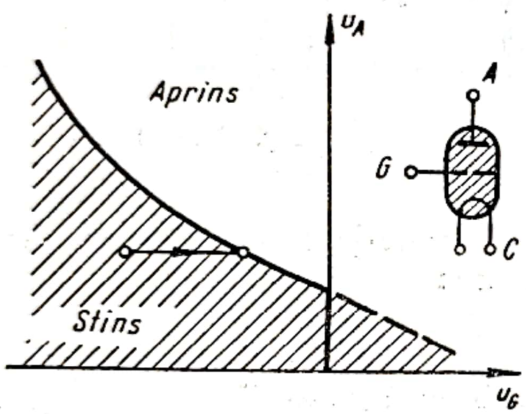


Fig. B.17.15

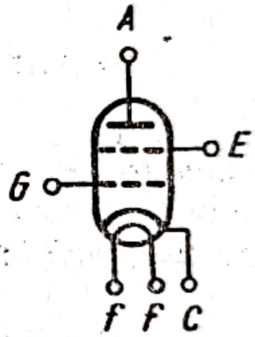


Fig. B.17.16

17.12. Tetroda, a cărei reprezentare este cea din figura B. 17.16, cuprinde față de triodă un electrod în plus : *ecranul* situat între grilă și anod și polarizat la o tensiune pozitivă apropiată de a anodului. Ecranul micșorează capacitatea de intrare a tubului față de cazul triodei și reduce influența tensiunii anodice asupra curentului anodic.

17.13. Pentoda utilizează un al cincilea electrod : *supresorul* situat între ecran și anod și avînd de obicei potențialul catodului. Rolul supresorului este de a reflecta spre anod electronii secundari emiși de acesta sub influența bombardamentului electronilor primari care conduc curentul anodic în tub. În lipsa supresorului (cazul *tetrodei*), emisia secundară duce la reducerea curentului anodic, cînd tensiunea anodică crește peste o anumită valoare și, ca urmare, la apariția unei rezistențe interne negative în această regiune a caracteristicilor — *efectul dinatron*.

Scanned with OKEN Scanner

Caracteristicile $(i_A - u_A)$ la $u_G = \text{const}$ și $u_E = \text{const}$ sînt de tipul celor din figura B. 17.17.

Parametrii pentodei R_i, S și μ se definesc similar cu ai triodei, considerînd în plus și tensiunea de ecran constantă.

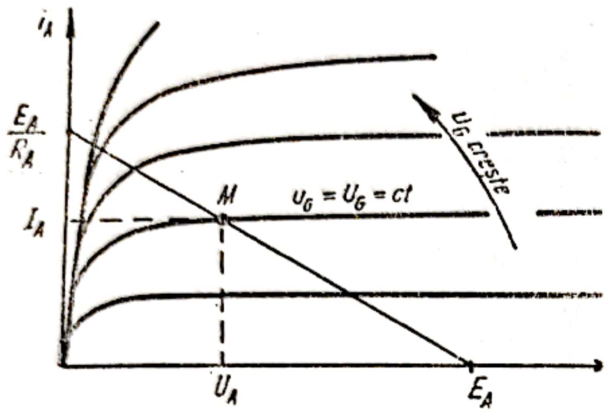


Fig. B.17.17

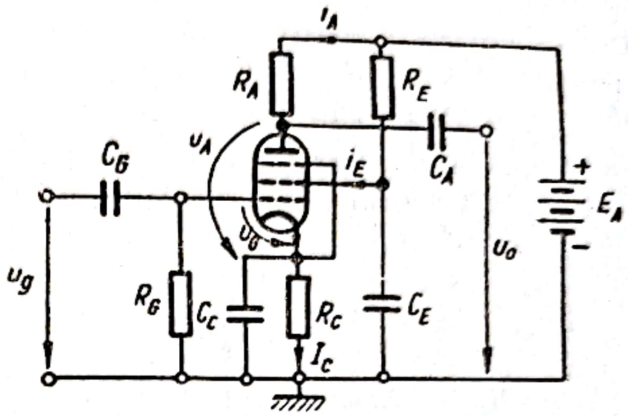


Fig. B.17.18

Funcționarea în curent continuu a unui montaj amplificator cu pentodă, ca cel din figura B. 17.18, este descrisă de:

— *ecuația tubului*:

$$U_A = U_A(I_A) \text{ la } u_G = U_G = \text{ct și } u_E = U_E = \text{ct} \qquad (17.13\ a)$$

dată sub formă grafică a caracteristicii $(i_A - u_A)$ pentru tensiunile de grilă și ecran alese;

— *ecuația dreptei de sarcină*:

$$U_A = E_A - R_A I_A - R_C I_C \simeq E_A - R_A I_A; \qquad (17.13\ b)$$

— *ecuațiile de polarizare ale grilei și ecranului*

$$U_G = -R_C I_C; \qquad (17.13\ c)$$

$$U_E = E_A - R_E I_E - R_C I_C \simeq E_A - R_E I_E; \qquad (17.13\ d)$$

— ecuația de curenți:

$$I_C = I_A + I_E. \qquad (17.13\ e)$$

Schemele echivalente în curent alternativ sînt similare cu ale triodei, însă în cazul pentodei, rezistența internă R_i fiind foarte mare, se utilizează schema

Scanned with OKEN Scanner

simplificată din figura B.17.19, provenind din schema din figura B. 17.14 *b* prin neglijarea rezistenței interne R_i, în paralel cu $\underline{Z}_a$.

Amplificarea se calculează în acest caz cu relația simplificată:

$$\underline{A} = -S\,\underline{Z}_a. \qquad (17.13\,f)$$

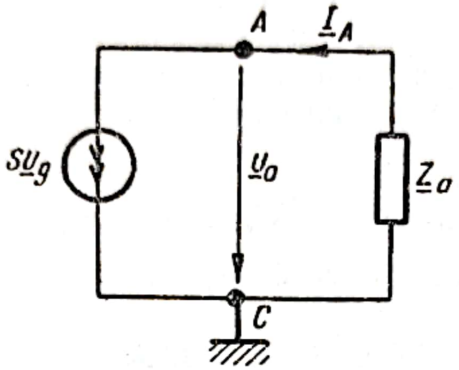


Fig. B.17.19

17.14. Transistorul este un dispozitiv semiconductor cu trei borne de acces: emitorul E, baza B și colectorul C. Utilizarea transistorului în circuitele electronice este asemănătoare cu a triodei: emitorul joacă rolul catodului, baza joacă rolul grilei iar colectorul rolul anodului.

Caracteristicile curent de colector — tensiune de colector ($i_C - u_{CE}$) ale transistorului în montajul cu emitorul comun (EC), pentru diferite valori ale curentului de bază i_B = ct sînt de tipul celor din figura B.17.20.

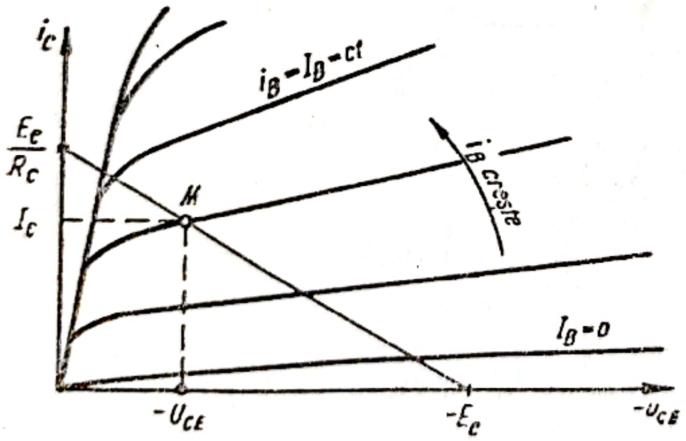


Fig. B.17.20

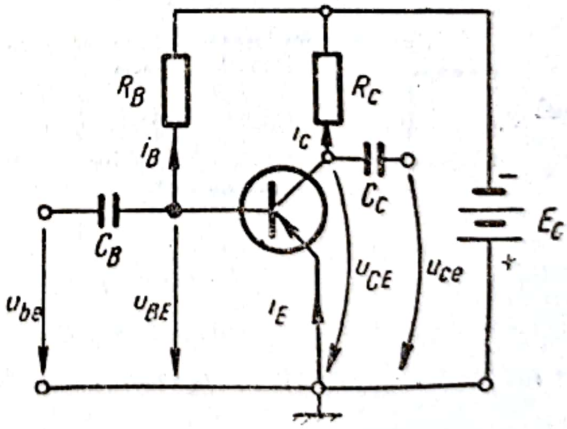


Fig. B.17.21

Punctul de funcționare în curent continuu M al unui transistor conectat în montajul din figura B. 17.21 se determină ca în cazul triodei, intersectînd *dreapta de sarcină*:

$$U_{CE} = -E_C + R_C\,I_C, \qquad (17.14\,a)$$

Scanned with OKEN Scanner

cu *caracteristica* :

$$U_{CE} = U_{CE}\,(I_C)\,;\; I_B = \text{const}, \tag{17.14 b}$$

corespunzătoare curentului de bază :

$$I_B = \frac{E_C + U_{BE}}{R_B} \simeq \frac{E_C}{R_B}. \tag{17.14 c}$$

În regim dinamic, la semnale mici, tranzistorul poate fi privit ca un cuadripol. Ecuațiile care îi caracterizează funcționarea în acest caz, cu notațiile din figura 17.22, sînt :

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= h_{11}\ \Delta i_1 + h_{12}\ \Delta u_2; \\ \Delta i_2 &= h_{21}\ \Delta i_1 + h_{22}\ \Delta u_2, \end{aligned} \tag{17.14 d}$$

unde h sînt *parametrii hibrizi* ai tranzistorului, precizați în cataloagele de tranzistoare pentru punctul de funcționare ales. Semnificațiile lor rezultă din ecuațiile (17.14 *d*). Acești parametri sînt :
impedanța de intrare cu ieșirea în scurtcircuit :

$$h_{11} = \left(\frac{\Delta u_1}{\Delta i_1}\right)_{\Delta u_2 = 0}; \tag{17.14 e}$$

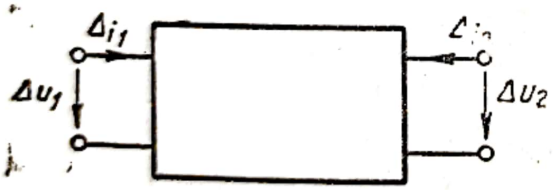


Fig. B.17.22

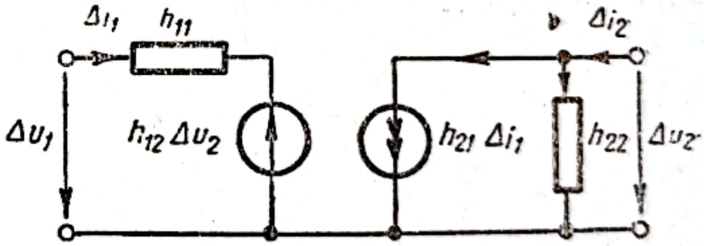


Fig. B.17.23

actorul de transmitere inversă a tensiunii de la ieșire la intrare :

$$h_{12} = \left(\frac{\Delta u_1}{\Delta u_2}\right)_{\Delta i_1 = 0};$$

factorul de amplificare în curent cu ieșirea în scurtcircuit :

$$h_{21} = \left(\frac{\Delta i_2}{\Delta i_1}\right)_{\Delta u_2 = 0};$$

Scanned with OKEN Scanner

admitanța de ieșire cu intrarea în gol:

$$h_{22} = \left(\frac{\Delta i_2}{\Delta u_2}\right)_{\Delta i_1 = 0}.$$

Schema echivalentă a transistorului la semnele mici, corespunzătoare ecuațiilor (17.14 *d*) este cea din figura 17.23.

B. PROBLEME

17.1. Să se calculeze viteza medie de agitație termică a electronilor dintr-un filament de wolfram încălzit la 1000°K.

17.2 (R). Printr-un conductor de cupru cu secțiunea $S = 1$ mm² trece un curent $I = 1$A. Să se determine viteza medie de translație a electronilor în mișcarea ordonată sub influența cîmpului electric. Densitatea electronilor liberi din cupru este $n = 8{,}5 \cdot 10^{22}$ cm^{-3}.

17.3 (R). Să se calculeze viteza minimă a unui electron pentru a putea fi emis dintr-un filament de wolfram. Potențialul de ieșire al wolframului este $\varphi = 4{,}52$ eV.

17.4. La ce temperatură ar trebui încălzit un filament de wolfram pentru ca energia medie de agitație termică a electronilor să fie egală cu lucrul mecanic de extracție?

17.5 (I). Să se calculeze variația relativă a curentului emis de un filament de wolfram încălzit la 1000°K dacă temperatura acestuia variază cu 1°K.

17.6 (R). Dioda UY21, a cărei caracteristică $i_A - u_A$ este dată în figura 17.6, este legată în serie cu o rezistență de 100 Ω ca în

Scanned with OKEN Scanner

figura B. 17.3 din breviar. Să se găsească tensiunea electromotoare E_A a sursei de alimentare, dacă curentul prin diodă este de 110 mA.

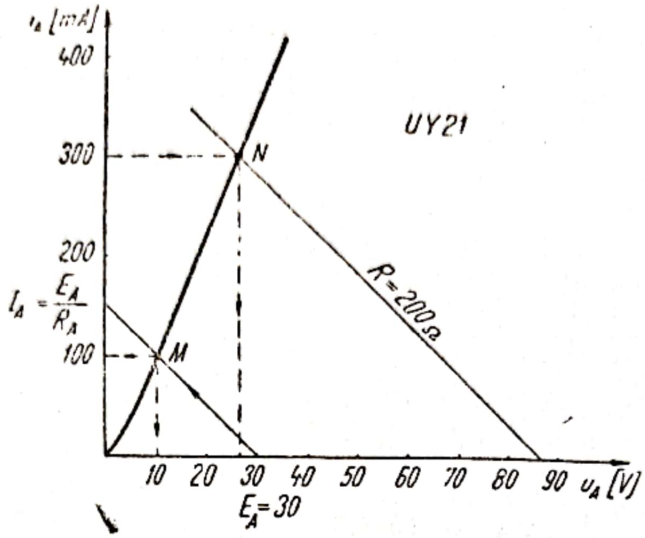


Fig. 17.6

17.7 (R). Să se calculeze puterea cedată de sursă și puterile disipate în rezistență și în diodă, în circuitul din problema 17.6.

17.8 (I). Să se găsească ce curent trece prin circuitul din figura B.17.3 din breviar, echipat cu dioda UY21, dacă $R_A = 200\ \Omega$ și $E_A = 30$ V. Care este tensiunea maximă pe care o poate avea sursa de alimentare, dacă valoarea maximă admisă a curentului anodic al diodei este $I_{Amax} = 500$ mA?

17.9. Să se urmărească variația punctului de funcționare al diodei din problema 17.8, cînd rezistența R_A variază, iar tensiunea sursei de alimentare rămîne constantă $E_A = 30$ V. Care este curentul anodic maxim care poate trece prin diodă?

17.10 (I). Dubla diodă 6Ц 5C, avînd ambele secțiuni legate în paralel, este conectată în serie cu o rezistență. Care este valoa-

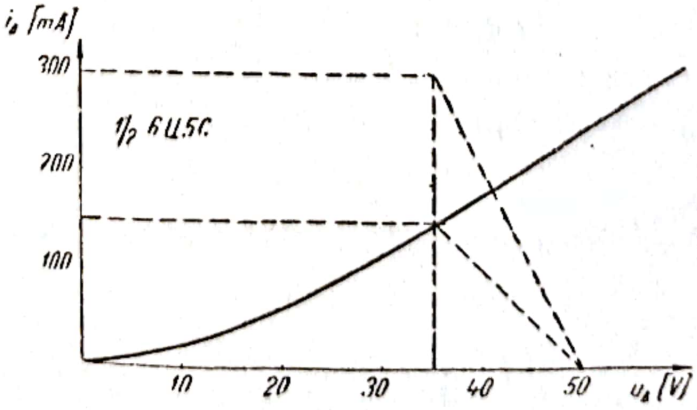


Fig. 17.10

rea rezistenței dacă sursa de alimentare de tensiune electromotoare $E_A = 50$ V debitează un curent $I_A = 300$ mA?

17.11. Dioda semiconductoare cu germaniu ДГ-Ц8, avînd caracteristica din figura 17.11 *a*, este conectată în montajul din

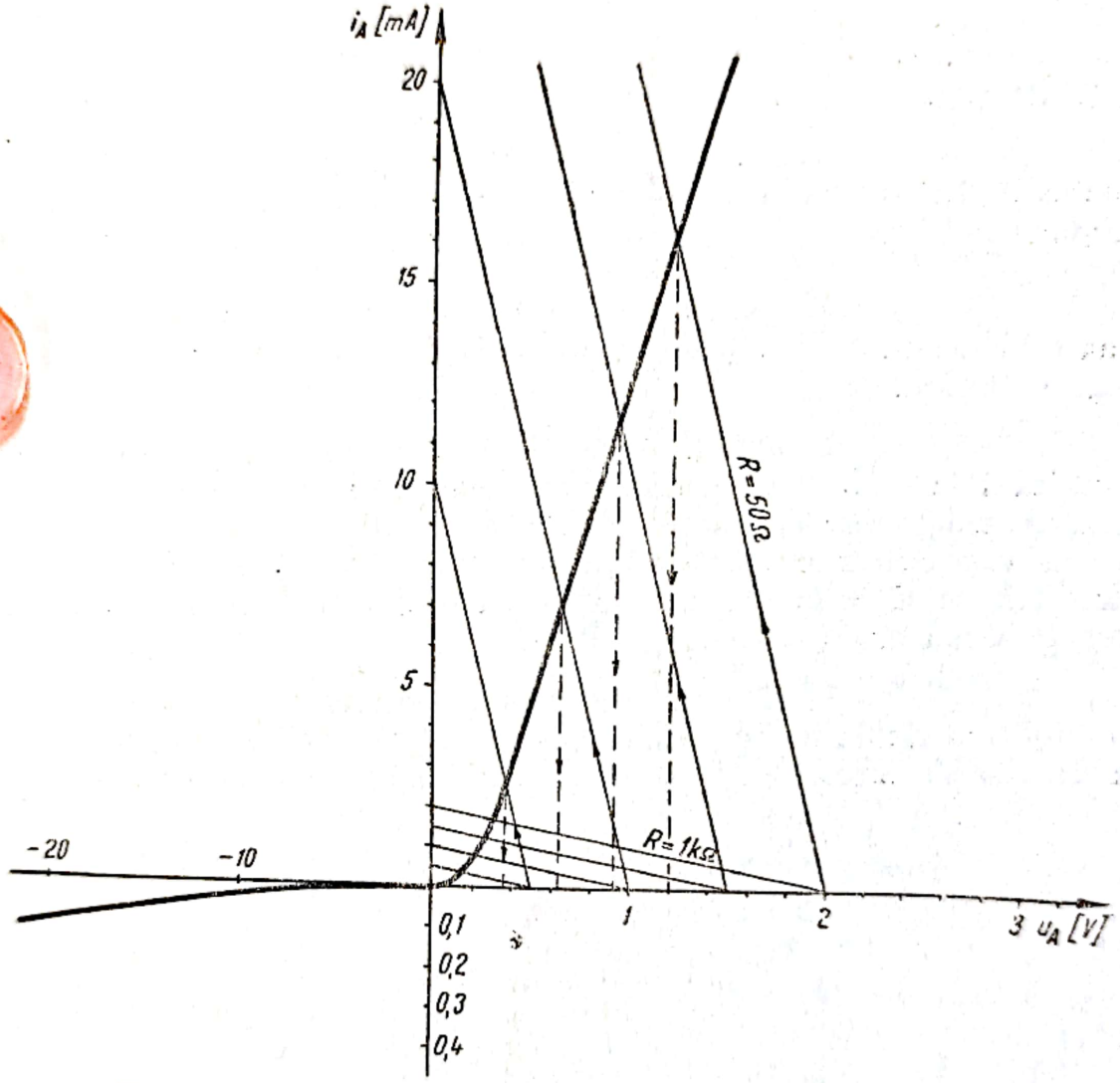


Fig. 17.11 *a*

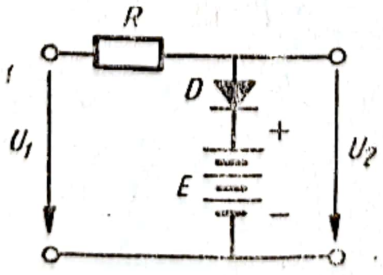


Fig. 17.11 *b*

figura 17.11 *b*, în care $R = 50\Omega$ și $E = 2$V. Să se stabilească grafic variația tensiunii U_2 la ieșirea circuitului funcție de tensiunea U_1 la intrare.

Scanned with OKEN Scanner

17.12 Să se rezolve problema precedentă pentru $R = 1\ k\Omega$; $R = 10\ k\Omega$.

17.13 (I). Să se calculeze rezistența dinamică în conducție directă pentru un punct de funcționare din zona liniară a caracteristicii pentru diodele:

a) UY21 (fig. 17.6);
b) 6Ц5С (fig. 17.10):
c) ДГ-Ц8 (fig. 17.11 *a*).

17.14. Să se calculeze rezistența inversă a diodei semiconductoare ДГ-Ц8 în punctul $U_A = -20V$, cu ajutorul caracteristicii din figura 17.11 *a*.

17.15. Să se rezolve analitic problema 17.11, utilizînd schema echivalentă a diodei din figura B.17.4 *b* din breviar cu $R_d = 60\Omega$ și $R_{inv} = 100\ k\Omega$.

17.16 (R). Dioda UY21 avînd rezistența internă $R_i \simeq 80\Omega$ este utilizată în etajul redresor monoalternanță din figura B.17.8 din breviar. Să se calculeze tensiunea continuă prin rezistența de sarcină $R_S = 1k\Omega$, dacă tensiunea electromotoare indusă în secundarul transformatorului are valoarea eficace $E = 250$ V, iar rezistența echivalentă a transformatorului la bornele secundarului este $R_T = 120\ \Omega$.

17.17 (R). Redresorul bialternanță din figura 17.17 este echipat cu dubla diodă 6Ц5С. Știind că sistemul este conectat la rețeaua de 120 V, se cere raportul de transformare al transformatorului de

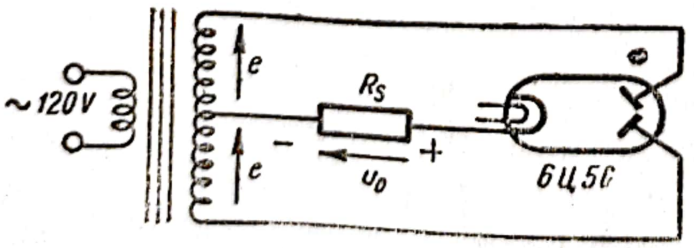


Fig. 17.17

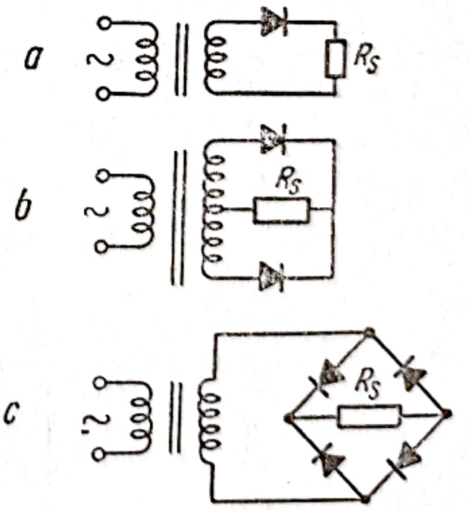


Fig. 17.18

alimentare, pentru ca valoarea medie a tensiunii la bornele rezistenței $R_S = 500\Omega$ să fie $U_0 = 200$ V. Rezistența înfășurării transformatorului se neglijează, iar rezistența internă a fiecărei secțiuni a diodei este $R_i = 160\ \Omega$.

Scanned with OKEN Scanner

17.18 (I). Dioda semiconductoare ДГ-Ц8 este conectată în montajul de redresare monoalternanță din figura 17.18 *a*, bialternanță din figura 17.18 *b* și în punte din figura 17.18 *c*. Rezistența de sarcină fiind $R_S = 1\text{k}\Omega$, tensiunea electromotoare indusă în secundarul fiecărei secțiuni de transformator fiind 40 V, să se calculeze:

1. valoarea medie a tensiunii la bornele rezistenței de sarcină,
2. valoarea maximă a curentului prin diode,
3. tensiunea inversă maximă aplicată diodelor.

17.19. Să se calculeze puterea de curent continuu maximă care poate fi obținută cu redresorul trifazat din figura 17.19 echipat cu un tub cu catod de mercur a cărui curent maxim este 6 A și a cărui tensiune inversă maximă este 15 kV.

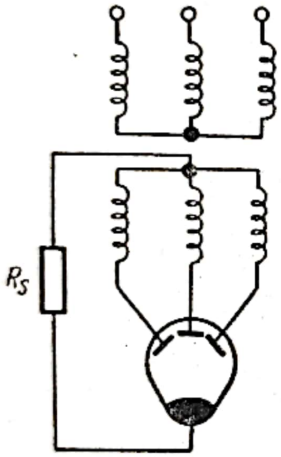


Fig. 17.19

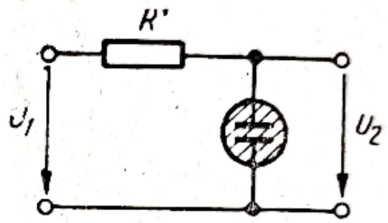


Fig. 17.20

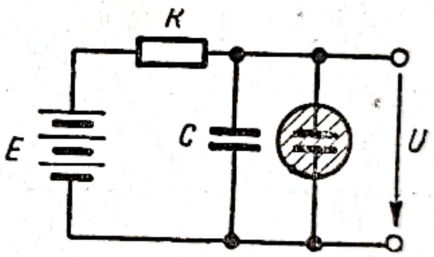


Fig. 17.21

17.20 (R). Să se calculeze variația tensiunii la ieșirea unui stabilizator cu schema din figura 17.20, cînd tensiunea de intrare variază cu 10 V. Rezistența dinamică a stabilotronului utilizat este $R_d = 50\Omega$, iar rezistența de protecție $R = 1\text{k}\Omega$.

17.21. Generatorul de tensiune în dinte de ferăstrău cu schema din figura 17.21 utilizează un tub cu neon, cu tensiunea de aprindere $U_{apr} = 80$ V. Să se calculeze constanta de timp τ a circuitului RC pentru ca perioada de repetiție a impulsurilor să fie $T = 1$ s. Să se găsească valoarea rezistenței R, dacă $C = 8\,\mu\text{F}$. Tensiunea electromotoare a sursei de alimentare este $E = 400$ V.

17.22 (I). Trioda 6C2C este conectată în schema de amplificare cu sarcină rezistivă din figura 17.22 *b*. Să se găsească punctele de funcționare pe caracteristicile din figura 17.22 *a*, cînd comutatorul K este pe

Scanned with OKEN Scanner

fiecare din cele două poziții *a* și *b*. Se dau $E_A = 350$ V, $E_G = 8$ V, $R_A = 50$ kΩ, $R_G = 1$ MΩ.

17.23 (I). Care este punctul de funcționare al triodei 6C2C conectată ca în problema 17.22 (comutatorul K pe poziția *a*), dacă tensiunea de alimentare anodică este $E_A = 200$ V?

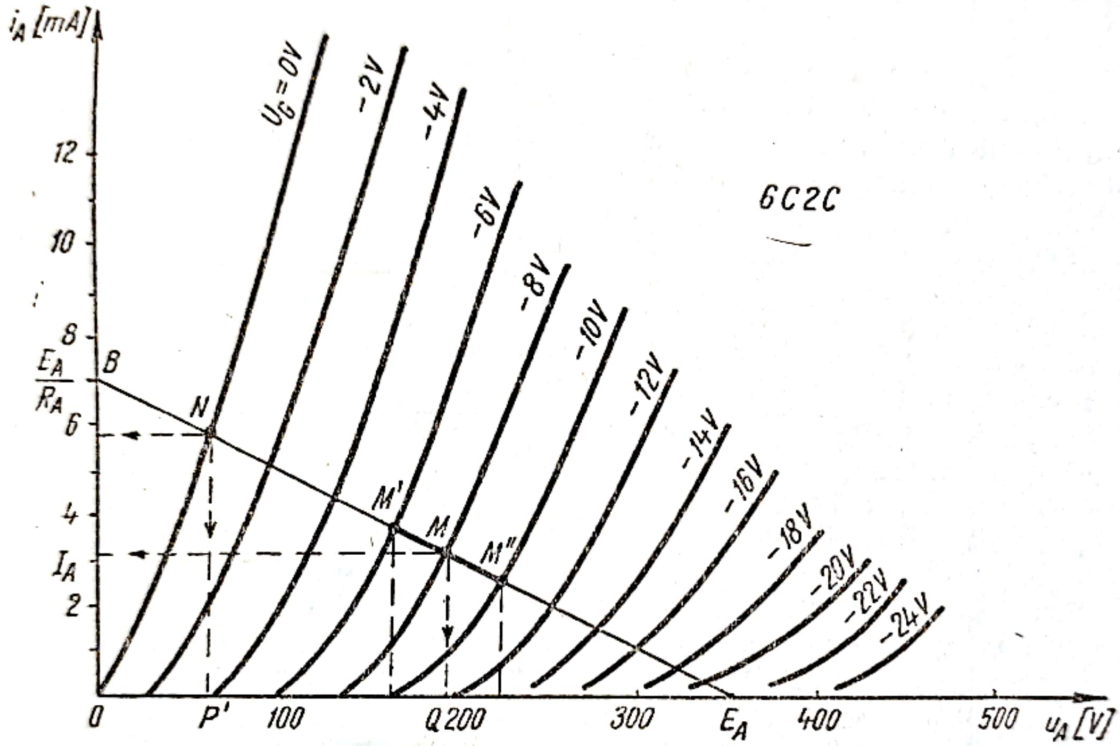


Fig. 17.22 *a*

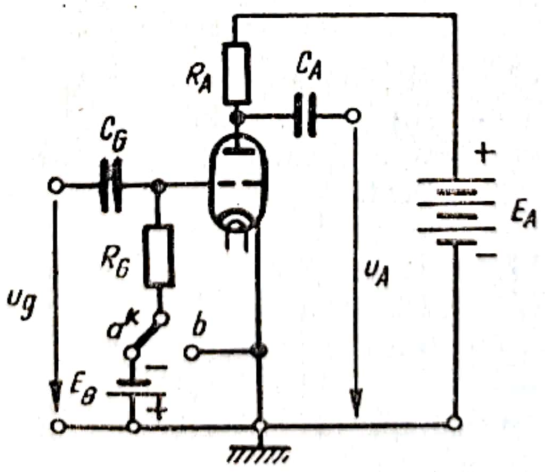


Fig. 17.22 *b*

17.24. Să se găsească punctele de funcționare ale triodei 6C2C din montajul din figura 17.22*b* pentru $E_A = 200$ V și $E_G = 6$ V, rezistența anodică fiind: a) $R_A = 0$; b) $R_A = 20$ kΩ; c) $R_A = 200$ kΩ.

Scanned with OKEN Scanner

17.25 (R). Să se găsească, cu ajutorul caracteristicilor din figura 17.22 *a*, care este amplitudinea tensiunii alternative amplificate, obținută la ieșirea montajului din problema 17.22, cu comutatorul K pe poziția *a*, cînd la intrare se aplică o tensiune sinusoidală de amplitudine $U_{g\,max} = 2$ V. Să se calculeze de aici amplificarea montajului.

17.26(I). Să se determine rezistența internă R_i și factorul de amplificare μ al triodei 6C2C în regiunea liniară a caracteristicilor din figura 17.22 *a*.

17.27(I). Să se stabilească schema echivalentă a montajului din problema 17.22 și să se calculeze amplificarea acestuia, utilizînd parametrii triodei determinați în problema 17.26.

17.28.(R). Să se calculeze elementele montajului amplificator reprezentat în figura B. 17.13 din breviar, pentru a lucra cu trioda 6SQ7 în punctul de funcționare $U_A = 250$ V; $I_A = 0{,}8$ mA; $U_G = -2$ V, utilizînd o sursă de alimentare anodică $E_A = 350$ V. Să se calculeze factorul de amplificare al montajului dacă tubul are $R_i = 91$ kΩ și $\mu = 100$. Frecvența minimă de lucru este 1 000 Hz.

17.29*(R). Să se stabilească schema echivalentă și să se calculeze amplificarea montajului din problema 17.28 dacă ar lipsi condensatorul C_C.

17.30(I). Să se stabilească schema echivalentă în curent alternativ și amplificarea repetorului catodic din figura 17.30.

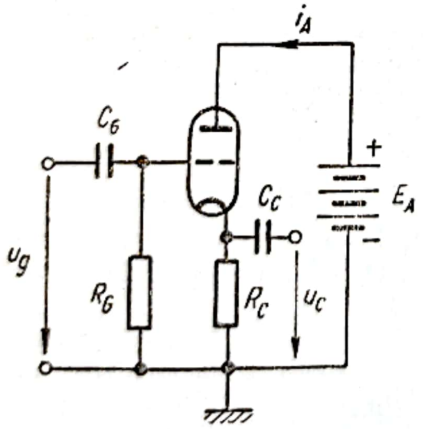


Fig. 17.30

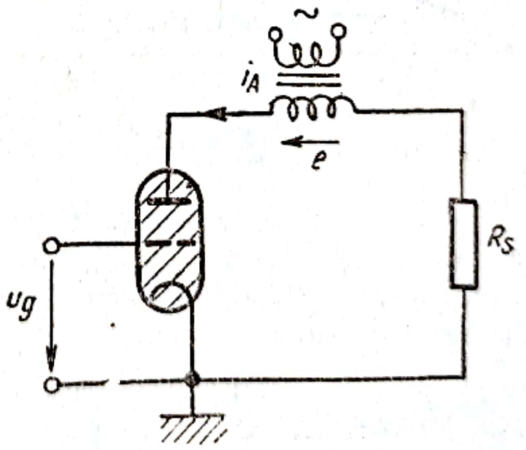


Fig. 17.31

17.31(R). Să se calculeze valoarea medie a curentului prin rezistența R_S în montajul din figura 17.31, dacă pe grila tiratronului se aplică o succesiune de impulsuri de aprindere cu frecvența egală cu a tensiunii de alimentare e, dar întîrziate față de aceasta cu un timp τ.

Scanned with OKEN Scanner

17.32(R). Să se proiecteze montajul de amplificator de tensiune din figura B.17.18 din breviar, echipat cu pentoda EF 95, pentru a lucra în punctul de funcționare M de pe caracteristicile din figura 17.32. Tensiunea de alimentare $E_A = 200$ V și frecvența minimă $f_{min} = 100$ Hz.

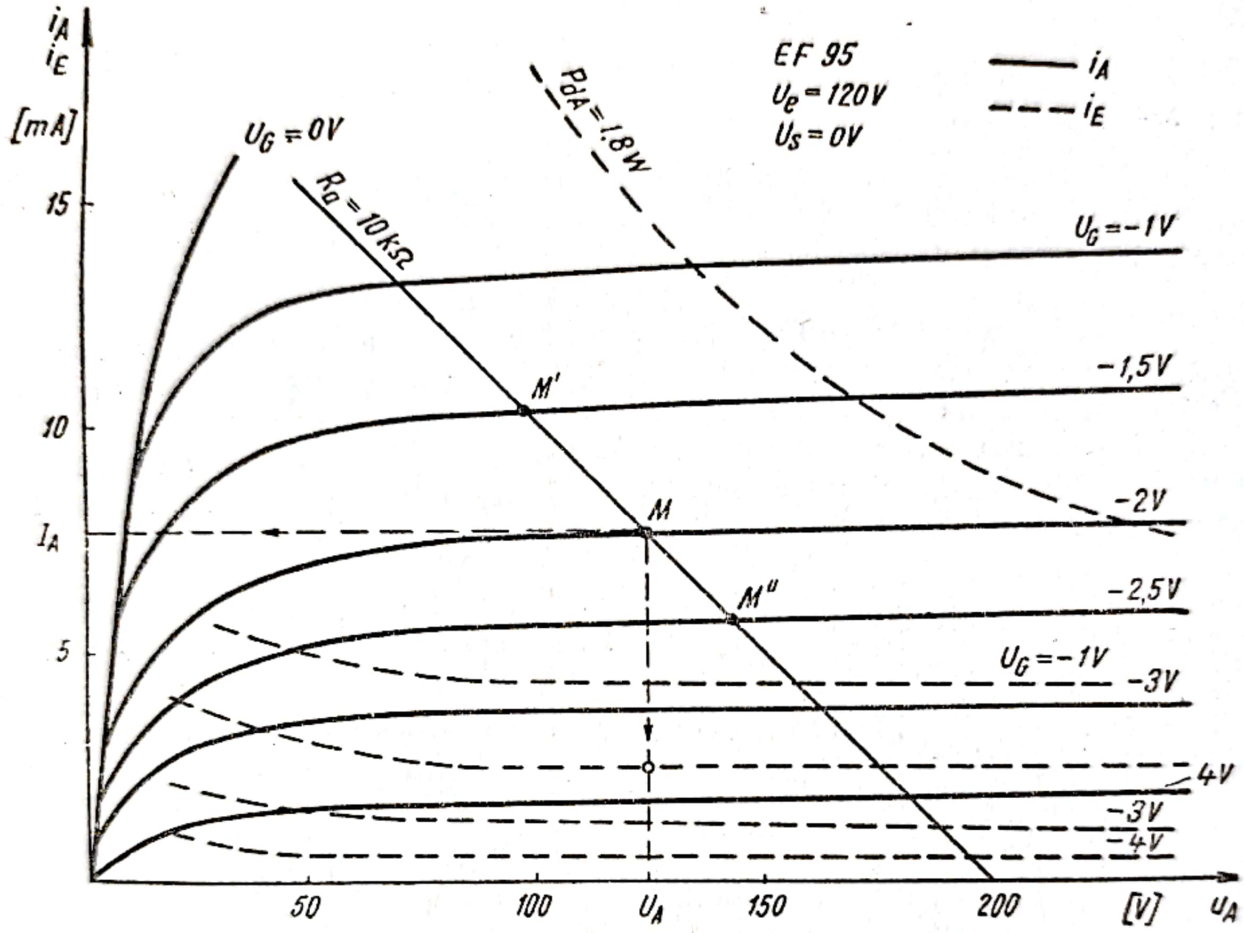


Fig. 17.32

17.33(I). Să se găsească pe cale grafică amplitudinea semnalului la ieșirea circuitului din problema 17.32 dacă pe grilă se aplică un semnal sinusoidal de amplitudine $U_{gmax} = 0,5$ V. Să se calculeze amplificarea montajului.

17.34(I). Să se calculeze rezistența internă și panta pentodei EF 95, avînd caracteristicile din figura 17.32 în punctul de funcționare din problema 17.32.

17.35(I). Să se proiecteze montajul amplificator din figura 17.18 din breviar, pentru a lucra cu pentoda EF 40 în punctul de funcționare $U_A = 250$ V, $I_A = 3$ mA, $U_E = 140$ V, $I_E = 0,8$ mA și $U_G = -2$V, utilizînd o sursă $E_A = 300$ V. Să se calculeze amplificarea montajului știind că în punctul de funcționare considerat pentoda are $S = 1,8$ mA/V

și $R_i = 2{,}5 M\Omega$. Frecvența de lucru 1 000 Hz. Caracteristicile pentodei sînt reprezentate în figura 17.37 *a*.

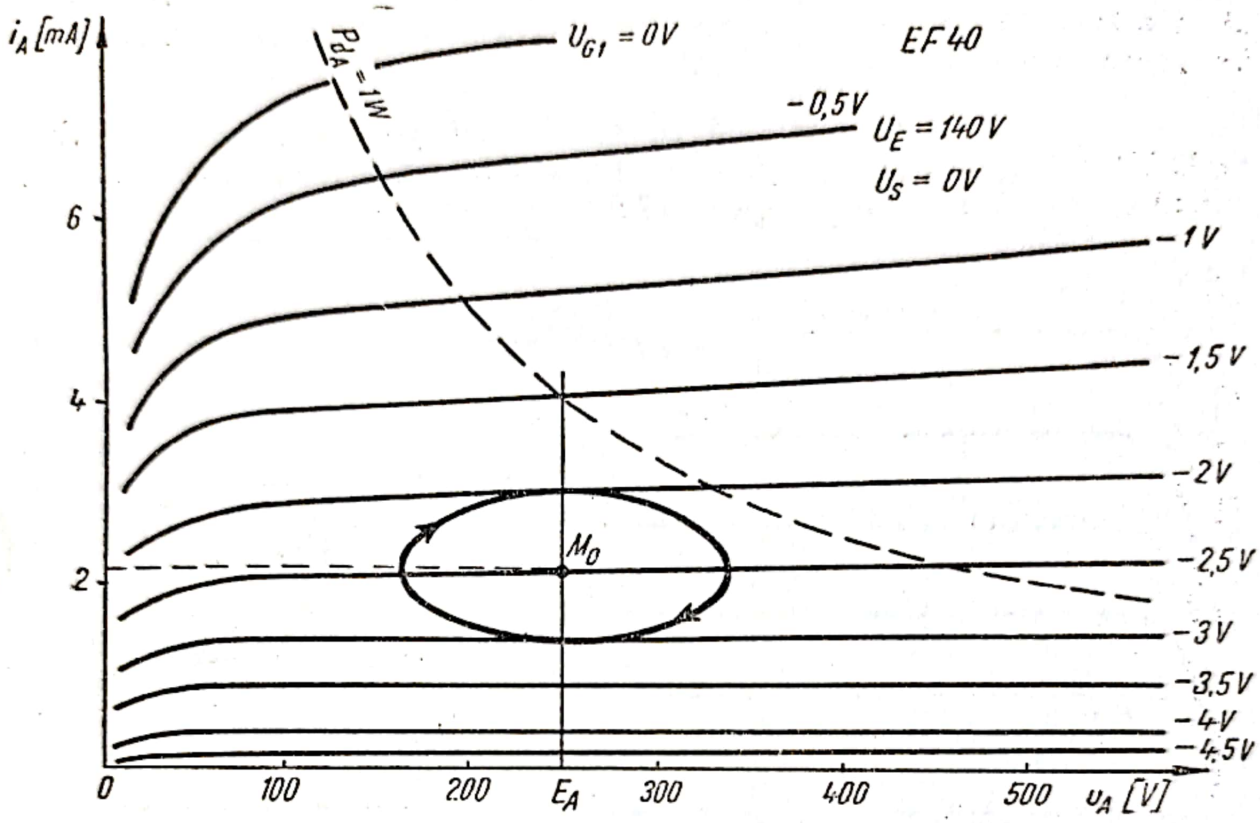


Fig. 17.37 *a*

17.36(I). Să se calculeze randamentul în putere al montajului din problema 17.32, cînd la intrare se aplică o tensiune alternativă de amplitudine 0,5 V.

17.37(I). Să se găsească pe caracteristicile din figura 17.37 *a*, punctul de funcționare al pentodei EF 40 din montajul 17.37 *b*.

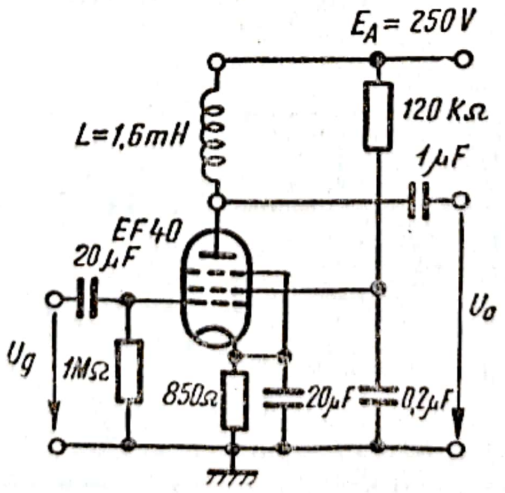


Fig. 17.37 *b*

Scanned with OKEN Scanner

17.38*(R). Să se stabilească schema echivalentă a amplificatorului cu sarcină inductivă din figura 17.37 *b* și să se traseze locul geometric al punctului de funcționare pe caracteristicile din figura 17.37 *a*, cînd la intrare se aplică o tensiune alternativă cu amplitudinea $U_{g\,max} = 0{,}5$ V și frecvența $f = 10\,000$ Hz.

17.39(I). Să se stabilească pe caracteristicile din figura 17.39 *a*, punctul de funcționare al transistorului EFT 153 conectat în circuitul de amplificare din figura 17.39 *b*.

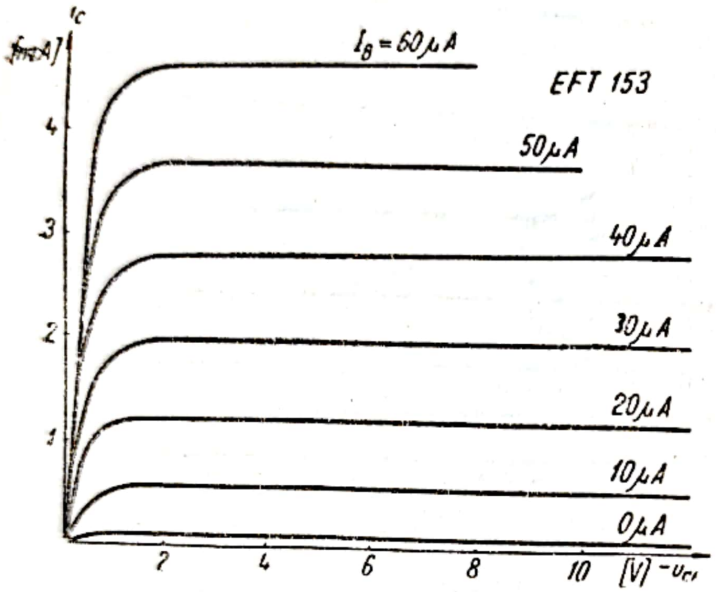


Fig. 17.39 *a*

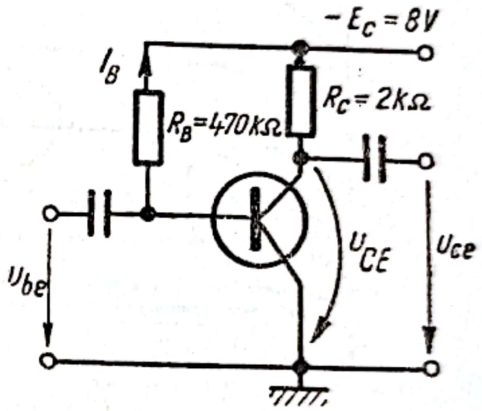


Fig. 17.39 *b*

17.40(I). Să se stabilească schema echivalentă a circuitului din figura 17.39 *b*, pentru curent alternativ.

17.41(I). Să se calculeze factorul de amplificare în tensiune, în curent și impedanța de intrare a circuitului amplificator din figura 17.39 *b*, cunoscînd parametrii hibrizi ai transistorului $h_{11} = 2{,}3$ kΩ; $h_{12} = 0{,}38 \cdot 10^{-3}$; $h_{21} = 80$; $h_{22} = 40$ μS.

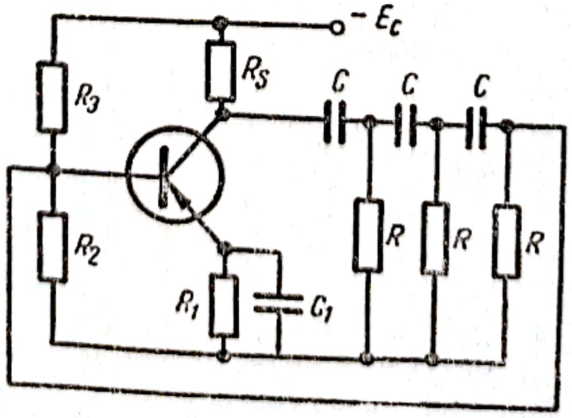


Fig. 17.42

17.42(R). Să se stabilească schema echivalentă a oscilatorului *RC* din figura 17.42.

17.43. Care este fluxul luminos ce cade pe catodul fotosensibil al tubului fotoelectronic con · tat în montajul din figura 17.43 *b*,

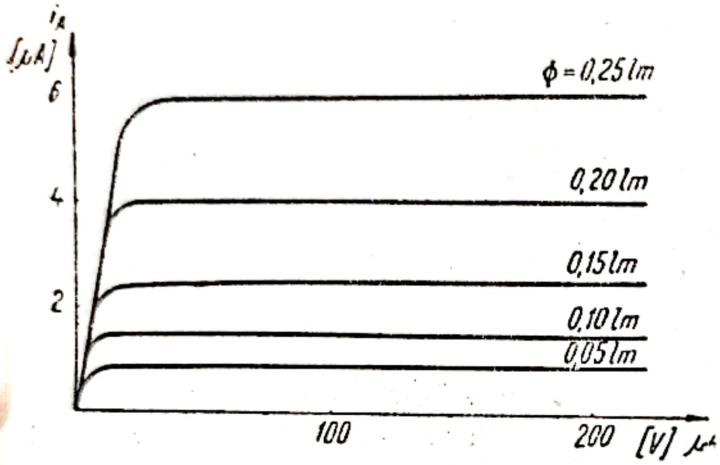


Fig. 17.43 *a*

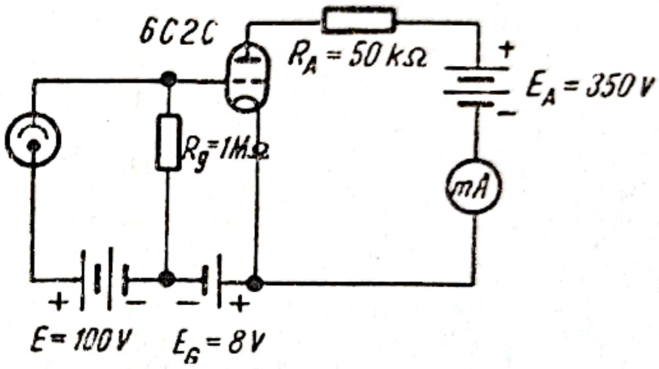


Fig. 17.43 *b*

dacă miliampermetrul din anodul triodei indică un curent de 4,4 mA? Caracteristicile tubului fotoelectronic sînt date în figura 17.43 *a*, iar ale triodei 6 C 2 C în figura 17.22 *a*.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 18

REȚELE ELECTRICE

A. BREVIAR

18.1. Rezistența liniilor electrice. Pentru calculul liniilor, rezistențele specifice ale conductoarelor se găsesc în tabele (v. anexa 10), corespunzătoare diferitelor secțiuni și se folosește relația:

$$R = r_0 \cdot l, \tag{18.1a}$$

în care: l este lungimea totală a liniei, în km; r_0 — rezistența specifică pe unitate de lungime, în Ω/km.

Pentru liniile formate din conductoare funie, lungimea firelor conductoare este, din cauza răsucirii, mai mare cu 2% decît lungimea l a liniei. Rezultă $R = 1{,}02\ l \cdot r_0$.

18.2. Reactanța liniilor electrice. În mod analog se calculează reactanța unei linii electrice, cu ajutorul expresiei:

$$X = x_0 \cdot l, \tag{18.2 a}$$

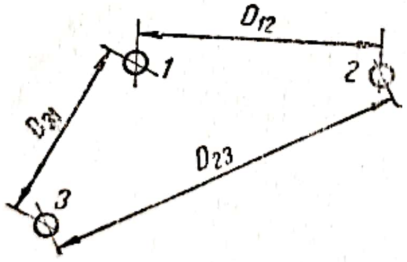


Fig. B.18.1

în care: l este lungimea totală a liniei, în km; x_0 — reactanța specifică a conductorului, în Ω/km, la 50 Hz, dată în anexa 10 funcție de distanța medie geometrică dintre conductoare.

Distanța medie geometrică între axele conductoarelor pentru orice fel de așezare a lor (fig. B.18.1) este dată de:

$$D_{med} = \sqrt[3]{D_{12} \cdot D_{23} \cdot D_{31}} \tag{18.2 b}$$

Scanned with OKEN Scanner

18.3. Calculul pierderilor de tensiune. Căderea de tensiune pe linie este dată de relația:

$$\Delta U = \frac{U_1 - U_2}{U_1}, \qquad (18.3\ a)$$

în care: U_1 este tensiunea la începutul liniei (la sursă); U_2 — tensiunea la sfîrșitul liniei, la receptor.

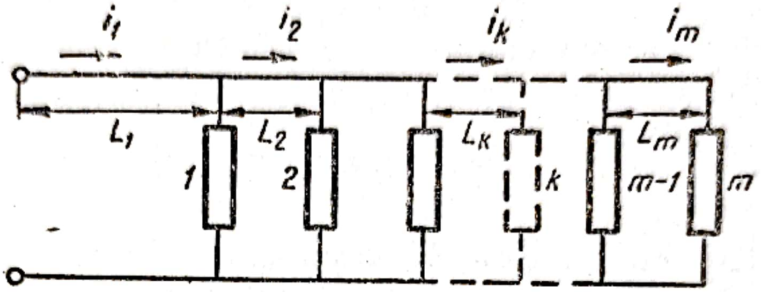


Fig. B.18.2

În curent continuu, în cazul unor receptori concentrați (fig. B.18.2), se obține:

$$\Delta U = \frac{2\sum_{1}^{m} L_k \cdot i_k}{\gamma S}, \qquad (18.3\ b)$$

în care: L_k este lungimea conductorului între două receptoare vecine, în m; i_k — curentul din porțiunea de linie dintre două receptoare vecine, în A; S — secțiunea conductorului, în mm², presupusă constantă; γ — conductivitatea conductorului, în m/Ω mm².

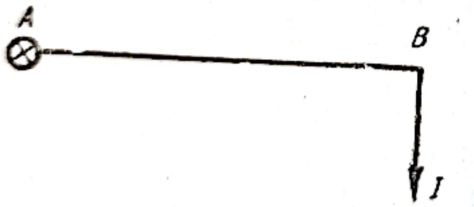


Fig. B.18.3

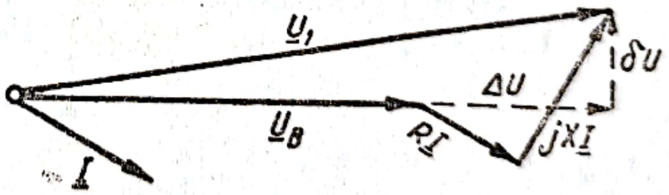


Fig. B.18.4

În curent alternativ pentru sarcină la un capăt al liniei (fig.B.18.3) se obține:

$$\underline{U}_A = \underline{U}_B + \Delta U + j\,\delta U, \qquad (18.3\ c)$$

în care: ΔU este căderea de tensiune longitudinală; δU — căderea de tensiune transversală; $\underline{U}_B$ — este luat origină de fază, conform diagramei vectoriale din figura B.18.4. Pierderea de tensiune are expresia:

$$D_U = U_A - U_B \simeq \Delta U + \frac{1}{2}\frac{\delta U^2}{U_B + \Delta U} \simeq \Delta U + \frac{1}{2}\frac{\delta U^2}{U_B}. \qquad (18.3\ d)$$

În practică, de obicei se neglijează al doilea termen din expresia 18.3 *d*, folosind relația $D_U = \Delta U$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru calculul celor două căderi de tensiune, ΔU și δU, se folosesc expresiile :

$$\Delta U = \frac{RP_n + XQ_n}{U_n}; \qquad \delta U = \frac{XP_n - RQ_n}{U_n}, \tag{18.3 e}$$

P_n, Q_n, U_n fiind mărimile nominale ale puterii active, ale puterii reactive și ale tensiunii care caracterizează receptorul.

18.4. Protecția rețelelor prin siguranțe fuzibile. Alegerea fuzibilelor din circuitele de alimentare ale motoarelor se face astfel încît între curentul lor nominal I_f și curentul de pornire I_p al motorului să existe relația :

— pentru condiții normale de pornire a motorului :

$$I_p \leqslant 2{,}5 I_f; \tag{18.4 a}$$

— pentru condiții grele de pornire a motorului

$$I_p \leqslant (1{,}6 \div 2) I_f. \tag{18.4 b}$$

În cazul alimentării mai multor motoare se folosește curentul $I_{p\ max}$ dat de relația aproximativă :

$$I_{p\ max} = m \sum_{1}^{n-1} I_k + I_p, \tag{18.4 c}$$

în care : $\sum_{1}^{n-1} I_k$ este suma curenților de încărcare a rețelei, cu toate receptoarele conectate, cu excepția celui care are cel mai mare curent de pornire; I_p — cel mai mare curent de pornire; m — coeficient de simultaneitate.

Pentru a asigura o protecție selectivă, curenții nominali ai fuzibilelor se aleg în scară crescătoare de la receptoare spre generatoare. Se dă scara normalizată a curenților nominali ai fuzibilelor: 6, 10, 15, 20, 25, 35, 45, 60, 80, 100, 125, 150, 200, 225, 300, 350, 450, 500, 600, 700, 850 și 1 000 A.

B. PROBLEME

18.1. Să se determine rezistența unui conductor de aluminiu, avînd lungimea de 30 km și secțiunea 50 mm², la temperaturile conductorului de 0°, 35° și 70°C. Rezistivitatea la 20°C se va considera $\rho = 31{,}2 \Omega mm^2/km$.

Scanned with OKEN Scanner

18.2 (R). Să se determine rezistența unui conductor din OL-Al-70 lung de 50 km, la o temperatură de 20°C. Să se arate că la calculul rezistenței se poate neglija conductivitatea oțelului, conductorul avînd o inimă de oțel de 9 mm². Se va lua:

$\rho = 31{,}2\ \Omega mm^2/km$ pentru aluminiu;

$\rho = 188\ \Omega mm^2/km$ pentru oțel.

18.3. Lungimea unei linii este de 30 km, iar calculele ne indică o rezistență de 6Ω. Ce secțiune normalizată trebuie să aibă conductorul, dacă se realizează din cupru? Dar din oțel-aluminiu?

18.4. Lungimea unei linii este de 5km, iar calculele ne indică o rezistență de 7,5Ω. Ce secțiune normalizată trebuie să aibă conductorul dacă se realizează din oțel? Dar din cupru?

18.5 (R). Să se determine secțiunea conductoarelor de cupru care alimentează un grup de 8 lămpi de 100 W, montate în paralel, dacă distanța de la tabloul de distribuție la lămpi este de 20 m. Tensiunea de alimentare este 220V, iar căderea de tensiune admisibilă este $\Delta U = 5V$. Să se aleagă și siguranțele fuzibile.

18.6. Să se determine căderea de tensiune pe o linie de curent continuu de 220 V (tensiune nominală), care are conductoare de cupru cu secțiunea 1 mm². Distanța pînă la receptor este de 30 m, puterea sa fiind 900 W.

18.7 (R). O linie cu conductoare de cupru alimentează doi consumatori, de 4 și 8 kW, așezați la distanțele de 100 și, respectiv, 200 m de sursă. Se cere secțiunea, presupusă constantă, a conductoarelor, dacă la al doilea cunsumator tensiunea minimă trebuie să fie 210 V. Tensiunea sursei care alimentează linia este 220 V.

18.8. La o linie de 220 V curent continuu se racordează patru receptoare consumînd fiecare:

$i_1 = 5$ A așezat la 250 m de sursă;
$i_2 = 20$ A așezat la 400 m de sursă;
$i_3 = 14$ A așezat la 500 m de sursă;
$i_4 = 5$ A așezat la 600 m de sursă.

Să se determine secțiunea conductorului de cupru din care trebuie să se facă linia, considerînd o cădere de tensiune admisibilă egală cu 3%.

Scanned with OKEN Scanner

18.9 (R). Schema de legătură a doi consumatori la o rețea de curent continuu este cea din figura 18.9. Tensiunea de alimentare este de 110 V. Căderea de tensiune maximă admisibilă în conductoarele de alimentare este 3%. Să se determine secțiunea conductoarelor principale ale acestei scheme, materialul fiind cupru, în ipoteza folosirii unei secțiuni constante.

Să se compare apoi acest rezultat cu cel obținut, impunînd condiția consumului minim de material.

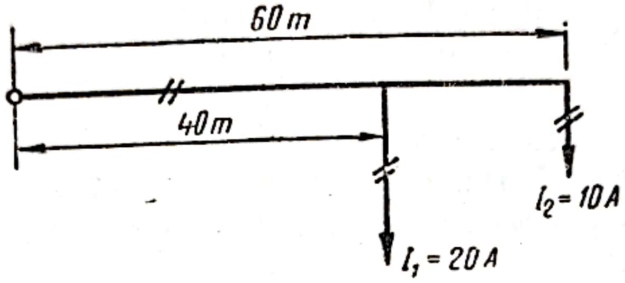


Fig. 18.9

18.10. Să se determine secțiunea conductoarelor de alimentare în cazul dat de problema 18.7 (R), punîndu-se de această dată ipoteza consumului minim de material. Să se compare rezultatele.

18.11 (R). O sarcină constituită din 60 de lămpi de 100 W se conectează în stea cu fir neutru, în montaj echilibrat, alimentîndu-se de la un tablou de curent trifazat, cu tensiunea de 220 V între faze. Să se calculeze secțiunile conductoarelor în ipoteza unei căderi de tensiuni admisibile de 3%, distanța de montare a lămpilor fiind 50 m. Să se aleagă siguranțele fuzibile.

Să se compare rezultatele cu cele care se obțin în ipoteza conectării lămpilor în triunghi.

18.12 (R). Printr-o linie trifazată, construită cu conductoare OL-Al-70, așezate în vîrfurile unui triunghi echilateral cu latura de 1,5 m, se alimentează un consumator care absoarbe o putere de 2MW la un factor de putere $\cos\varphi = 0{,}8$. Alimentarea se face de la barele de 10 kV ale unei stații, situată la distanța de 8 km de consumator. Să se determine căderea de tensiune pe fază și între faze.

18.13 (I). O linie aeriană trifazată, pornind de la o stație de 35 kV, cu conductoarele dispuse ca în figura 18.13 (avînd $d_{12} = 3$m, $d_{23} = 3$ m; $d_{31} = 6$m), alimentează doi consumatori situați la 10 km și, respectiv, 30 km de stație. Primul consumator absoarbe o putere de 6 000 kW la $\cos\varphi_1 = 0{,}8$ iar al doilea absoarbe o putere de 6 000 kW la $\cos\varphi_2 = 0{,}75$.

Scanned with OKEN Scanner

Se cere tensiunea la al doilea consumator, în ipoteza că primul tronson al liniei are conductoare de OL-Al-120, iar al doilea tronson conductoare de OL-Al-70.

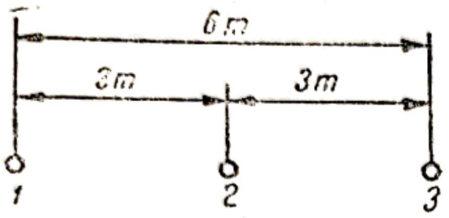


Fig. 18.13

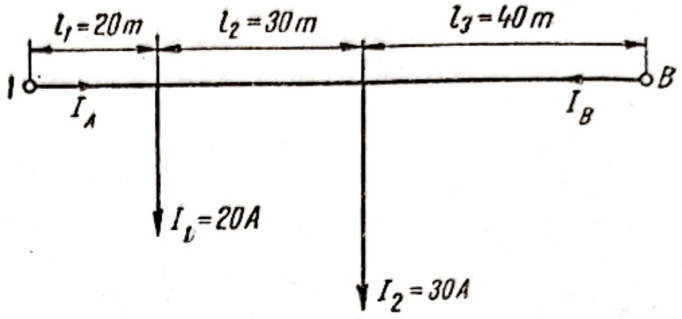


Fig. 18.14

18.14 (R). Doi consumatori sînt alimentați în curent continuu ca în figura 18.14, de la ambele capete ale liniei. Se cere distribuția curenților în linie și secțiunea conductoarelor, căderea de tensiune maximă admisibilă fiind 4 V.

Tensiunea celor două puncte de alimentare este aceeași.

18.15 (R). O linie a unei uzine, de tensiune 380 V, alimentează cinci motoare avînd caracteristicile:

$$P_1 = 2 \text{ kW} \quad \cos\varphi_1 = 0{,}8 \quad I_{P1} = 3 \quad I_{n1};$$
$$P_2 = 2 \text{ kW} \quad \cos\varphi_2 = 0{,}85 \quad I_{P2} = 3 \quad I_{n2};$$
$$P_3 = 2{,}5 \text{ kW} \quad \cos\varphi_3 = 0{,}8 \quad I_{P3} = 2{,}5\, I_{n3};$$
$$P_4 = 3 \text{ kW} \quad \cos\varphi_4 = 0{,}75 \quad I_{P4} = 4 \quad I_{n4};$$
$$P_5 = 4 \text{ kW} \quad \cos\varphi_5 = 0{,}85 \quad I_{P5} = 2{,}5\, I_{n5};$$

Să se determine siguranțele fuzibile necesare protecției fiecărui motor și cele necesare liniei de alimentare, considerînd un coeficient de simultaneitate $m = 0{,}5$.

18.16 (R). O linie trifazată de 10 kV, lungă de 8 km, avînd conductoare de cupru cu secțiunea de 35 mm², alimentează un consumator care absoarbe 1 500 kW la $\cos\varphi = 0{,}8$. Durata de utilizare a puterii maxime este de 5 000 ore pe an. Să se determine pierderile de energie anuale și să se compare cu cele obținute în ipoteza liniei construite din conductoare de OL-Al-70.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 19

ELECTROCHIMIE

A. BREVIAR

19.1. Electrochimia are ca obiect principal studiul transformării energiei electrice în energie chimică și al transformării inverse. Electrochimia constituie o ramură a chimiei fizice.

19.2. Electroliza. Procesul dirijării ionilor unui electrolit (în soluție sau topit) către două conductoare (electrozi) introduse în electrolit, atunci cînd între aceste conductoare se realizează un cîmp electric ca urmare a conectării lor la bornele unui generator de curent continuu, se numește *electroliză*.

Substanțele în care s-a produs disociația electrolitică a unor molecule de ioni, în urma dizolvării sau topirii, se numesc *electroliți*.

Dacă electrolitul este constituit dintr-o singură substanță, conform legilor lui Faraday, masa de substanță depusă la catod este dată de relația :

$$M = k_F \frac{A}{n} I \cdot t, \qquad (19.2\ a)$$

în care : M este masa hidrogenului (sau a metalului) pusă în libertate la catod (grame); $k_F = \frac{1}{96\,500}$ 1/C — inversul constantei lui Faraday; A — greutatea atomică a elementului (atom-gram); n — valența elementului; I — intensitatea curentului care străbate electrolitul (amperi); t — durata procesului de electroliză (secunde).

19.3. Tensiunea (forța) electromotoare a elementelor galvanice este egală cu diferența de potențial care se realizează între electrozi cînd aceștia nu sînt reuniți printr-un circuit exterior.

La introducerea unui metal în electrolit ia naștere o diferență de potențial,

Scanned with OKEN Scanner

între acesta și masa electrolitului, numită potențial de electrod, care se determină după ecuația lui Nernst :

$$E_c = E_0 + \frac{RT}{n_0 F} \ln C, \qquad (19.3\ a)$$

în care : E_c este potențialul de electrod în volți, corespunzător concentrației date a ionilor în soluție la temperatura T°K ; E_0 — potențialul normal de electrod (anexa 12) ; $R = 8{,}316$ jouli — constanta gazelor ; $F = 96\,500$ C — numărul lui Faraday ; n_0 — sarcina ionilor electrolitului ; C — concentrația ionilor metalului în soluție.

După înlocuiri și trecerea la logaritmi zecimali se obține, pentru potențialul de electrod, următoarea expresie :

$$E_c = E_0 + \frac{0{,}0002}{n_0} T \lg C. \qquad (19.3\ b)$$

Tensiunea electromotoare a pilei determinată de diferența de potențial dintre electrozi are expresia :

$$E = (E_0' - E_0'') + 0{,}0002\ T \left(\frac{lg\ C'}{n_0'} - \frac{lg\ C''}{n_0''} \right). \qquad (19.3\ c)$$

19.4. Tensiunea de descompunere a electrolitului este tensiunea exterioară minimă pentru care are loc electroliza, avînd expresia :

$$E = \frac{Q}{23{,}04\ n_0}, \qquad (19.4\ a)$$

în care : Q este efectul caloric al procesului de electroliză ; n_0 — sarcina ionilor electrolitului.

19.5. Potențialul de difuziune sau tensiunea contraelectromotoare de polarizare apare deoarece în procesul de electroliză concentrația ionilor de electrolit în spațiul anodic și cel catodic variază, apărînd o diferență de potențial suplimentară.

Mai apare polarizarea chimică provocată de viteza insuficientă a proceselor și reacțiilor secundare, care se produc la electrozi.

De asemenea, apare o supratensiune datorită reținerii gazului pe suprafața electrodului în timpul separării din soluție.

De aici rezultă că tensiunea electromotoare reală pentru descompunerea electrolitului este mai mare decît cea teoretică.

19.6. Elemente galvanice primare (pile). Pila Volta sau pila elementară este constituită din :

(—) Zn | H_2SO_4 | Cu (+) $\qquad E = 0{,}85 \ldots 0{,}9$ V.

Pila cu oxid de cupru :

(+) Cu | CuO || NaOH, 20% | Zn (—) $\quad E = 0{,}9 \ldots 1$ V.

Scanned with OKEN Scanner

Pila Daniel :

(+) Cu | $CuSO_4$ || $ZnSO_4$ | Zn (—) $E = 1{,}07 \ldots 1{,}08$ V.

Elementul cu acid azotic (Bunsen) :

(+) C | HNO_3 | H_2SO_4 | Zn (—) $E = 1{,}8 \ldots 1{,}95$ V.

Elementul avînd ca depolarizant bioxid de mangan (Leclanché) :

(+) MnO_2 | NH_4Cl | Zn (—) $E = 1{,}4 \ldots 1{,}65$ V.

Pila cu oxid de mercur (R.M.) :

(+) Fe | grafit || HgO | Zn (—) $E = 0{,}75 \ldots 1{,}34$ V.

19.7. Elemente galvanice secundare. Acumulatoare electrice cu plăci de plumb :

(+) PbO_2 | H_2SO_4 | Pb (—) $E = 2$V.

Reversibilitatea acumulatoarelor permite încărcarea și descărcarea lor repetată după curbele din figura B.19.1.

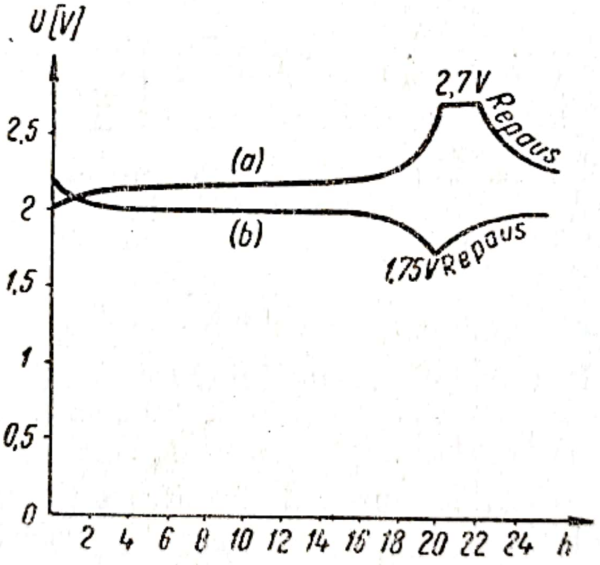


Fig. B.19.1
a) încărcare
a) descărcare

Acumulatoarele sînt caracterizate prin :

a) capacitatea în amper-ore (Ah) ;

b) capacitatea în wattore (Wh) ;

c) randamentul în amper-ore ;

$$\eta_{Ah} = \frac{\int_0^{t_d} I_d \cdot dt}{\int_0^{t_i} I_i \cdot dt} = \frac{I_{dm} \cdot t_d}{I_{im} \cdot t_i}, \qquad (19.7\ a)$$

în care : I_d și I_i sînt curenți de încărcare și descărcare ; t_d și t_i — durata de descărcare și încărcare ; m — indicele valorii medii ;

Scanned with OKEN Scanner

d) randamentul în wattore, care caracterizează gradul de utilizare al energiei :

$$\eta_{Wh} = \frac{\int_0^{t_d} U_d \cdot I_d \cdot dt}{\int_0^{t_i} U_i \cdot I_i \cdot dt} = \frac{U_{dm} \cdot I_{dm} \cdot t_d}{U_{im} \cdot I_{im} \cdot t_i} = \eta_{Ah} \frac{U_{dm}}{U_{im}} = \eta_{Ah} \cdot \Delta \qquad (19.7\ b)$$

în care : U_{dm} și U_{im} sînt tensiunile medii în timpul descărcării și încărcării ; Δ — coeficient de coborîre a tensiunii.

Practic :

$$\eta_{Ah} = 0{,}85;$$

$$\eta_{Wh} = 0{,}65 \ldots 0{,}75.$$

Acumulatoarele alcaline sînt de două tipuri :

a) Acumulatoare Fe—Ni :

(+) $Ni(OH)_3$ | KOH | Fe (—) $\qquad E = 1{,}41$ V

b) Acumulatoare Cd—Ni

(+) $Ni(OH)_3$ | KOH | Cd (—) $\qquad E = 1{,}38$ V

Caracteristicile lor de încărcare și descărcare sînt redate în figura B.19.2.

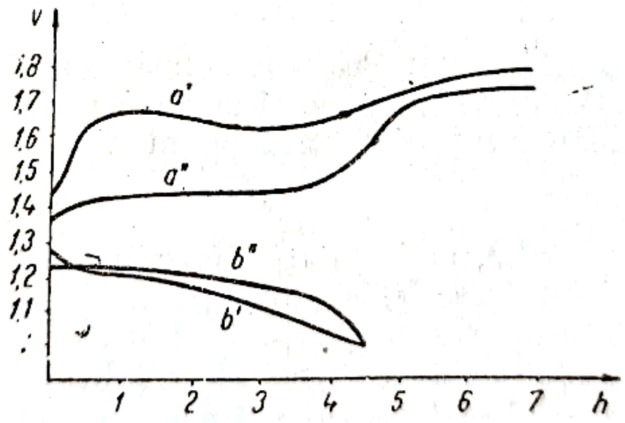


Fig. B.19.2
a' — încărcare Fe — Ni
a'' — încărcare Cd — Ni
b' — descărcare Fe — Ni
b'' — descărcare Cd — Ni

Randamentele acumulatoarelor alcaline :

a) $\eta_{Ah} = 0{,}7 \ldots 0{,}8$; $\qquad \eta_{Wh} = 0{,}5 \ldots 0{,}6$;

b) $\eta_{Ah} = 0{,}75 \ldots 0{,}8$; $\qquad \eta_{Wh} = 0{,}6 \ldots 0{,}65$

19.8. Determinarea activității ionilor de hidrogen. Aciditatea și alcalinitatea reală sînt exprimate în funcție de activitatea

soluției. Exponentul pH este prin definiție logaritmul cu semn schimbat al activității ionilor de hidrogen, adică :

$$\text{pH} = -\lg a_{H+}. \qquad (19.8\ a)$$

Scara pH-ului se întinde de la 0 la 14 și, conform anexei 12, soluțiile cu $p\text{H} < 7$ sînt acide, cele cu $p\text{H} = 7$ sînt neutre, iar cele cu $p\text{H} > 7$ sînt alcaline.

Metoda practică de determinare a pH-ului se bazează pe măsurarea activității ionilor H^+ în soluția de analizat, folosind un electrod indicator pentru ionii H^+, legat cu un electrod de comparație de potențial cunoscut, de obicei electrod de calomel.

B. PROBLEME

19.1 (I). Printr-o soluție de $ZnSO_4$ trece, timp de 20 min, un curent de 10 A. Dacă pe electrod (catod) se depun 3,86 g zinc, să se determine randamentul referitor la curent. Greutatea atomică a zincului este 65,4.

19.2. O instalație de galvanoplastie se compune din patru grupe a cîte 3 băi în serie, legate în paralel. Fiecare baie are rezistența $r = 0{,}4\ \Omega$. Rezistența exterioară a circuitului de alimentare este $R = 0{,}07\ \Omega$. În timp de o oră se depun 85,4 g cupru. Să se calculeze puterea generatorului care alimentează instalația și randamentul instalației. Greutatea atomică a cuprului este 63,5.

19.3 (R). Patru băi de electroliză sînt legate în serie. Catozii sînt de platină. Prima baie conține o soluție de azotat de argint, NO_3Ag, și un anod de argint pur; a doua baie conține o soluție de azotat de plumb, $(NO_3)_2Pb$, și un anod de plumb pur, iar ultimele două realizează depunerile unor metale bivalente. Se cunosc greutățile atomice ale argintului (108) și plumbului (207). Într-un interval de timp t, în prima baie se depun 5,59 g argint, în a treia baie 1,52 g metal, în a patra baie 1,64 g metal. Se

Scanned with OKEN Scanner

cere cantitatea de plumb depusă, curentul din circuit, ce metale se depun în băile a treia și a patra.

19.4. O placă metalică având suprafața totală de 200 cm^2 trebuie argintată cu un strat de 0,02 mm. Argintul are greutatea atomică 108 și greutatea specifică 10,5 kg/dm^3. Să se calculeze timpul necesar depunerii la trecerea unui curent cu intensitatea de 1 A prin soluția de azotat de argint.

19.5. O sîrmă de fier cu diametrul 2 mm, servind drept catod, este cufundată pe o lungime de 10 cm într-o soluție a unei sări de nichel. Greutatea atomică a nichelului este 58,7, iar cea specifică 8,8 kg/dm^3. Se cere stratul depus de un curent de 2 A într-o oră.

19.6. (I). Să se determine consumul de energie electrică al unei instalații de galvanizat, în care se depun 2 t zinc pe zi. Tensiunea celulelor este 2 V. Randamentul referitor la curent este 95%, greutatea atomică a zincului 65,4.

19.7 (R). Să se determine consumul de energie electrică necesară pentru fabricarea a 10 kg de clorat de potasiu $KClO_3$, prin electroliza KCl, dacă tensiunea de electroliză pe celulă este de 4 V, iar randamentul instalației $\eta = 92\%$. Se cere, de asemenea, productivitatea instalației dacă puterea ei este de 100 kW. Greutatea moleculară a cloratului de potasiu este 122,6.

19.8 (R). Să se calculeze tensiunea electromotoare a pilei Daniel:

$$(+)\ Cu \mid CuSO_4 \parallel ZnSO_4 \mid Zn(-)$$

dacă concentrația sulfatului de cupru este 200 g/l, a sulfatului de zinc 100 g/l gradul de disociere a sulfatului de cupru pentru concentrația indicată este $\alpha_1 = 0{,}3$, iar pentru sulfatul de zinc $\alpha_2 = 0{,}5$.
Greutatea moleculară a $CuSO_4$ este 159,6, iar a $ZnSO_4$ este 161,5. Se neglijează potențialul de difuziune.

19.9 (R). Să se calculeze potențialul de descompunere a clorurii de calciu, $CaCl_2$, la electroliza soluției ei în apă. Căldura de formare în soluție a $CaCl_2$ este 208 400 kcal/kmol, a $Ca(OH)_2$ este 238 000 kcal/kmol, iar a apei 68 380 kcal/kmol.

19.10. Să se calculeze potențialul de descompunere a acidului clorhidric la electroliza soluției sale în apă, dacă căldura de formare în soluție a HCl este + 39 310 kcal/kmol.

Scanned with OKEN Scanner

19.11 (R). Să se calculeze tensiunea electromotoare a acumulatorului cu plumb, pe baza teoriei dublei sulfatări. Se dau concentrațiile ionice:

$$c_{Pb}^{++++} = 0{,}91 \cdot 10^{-4} \text{ în soluție } 4{,}88 \text{ N } H_2SO_4$$
$$c_{Pb}^{++} = 4{,}10^{-8}$$

și

$E_0 = +1{,}69$ V, $E_0' = -0{,}126$ V potențialele normale ale proceselor care au loc la electrodul pozitiv și, respectiv, negativ.

19.12 (R). Un acumulator cu o capacitate de 100 Ah este descărcat în 10 h. Se cere:

a) intensitatea curentului de descărcare;

b) randamentul în cantitate de electricitate, dacă încărcarea se face în 5 h sub un curent de 25 A;

c) care este tensiunea de încărcare, dacă randamentul energetic al acumulatorului este de 73%, descărcarea făcîndu-se la 2 V.

19.13. Un acumulator se descarcă sub un curent de 10 A la tensiunea de 2 V. Încărcarea se face în același timp. Cunoscînd randamentul în cantitate de electricitate $\eta_{Ah} = 80\%$ și cel energetic $\eta_{Wh} = 70\%$, se cere tensiunea de încărcare și curentul de încărcare.

19.14 (R). Pentru măsurarea *p*H-ului se folosește ca electrod indicator hidrogenul:

— (Pt) H_2 | soluție H^+ | (x) | KCl (soluție saturată) | electrod calomel +

În acest caz potențialul de difuziune este neglijabil datorită punții de sare.

Dacă printr-o metodă de punte găsim o forță electromotoare de 0,84 V, se cere *p*H-ul soluției necunoscute.

Scanned with OKEN Scanner

IV.
INDICAȚII METODICE ȘI REZOLVĂRI

Scanned with OKEN Scanner

REZOLVĂRI ȘI INDICAȚII LA CAPITOLUL 1

1.1. Forța electrostatică de repulsie exercitată între corpurile 1 și 2 încărcate cu sarcină electrică se exprimă conform legii lui Coulomb (1.1)

$$F_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{d_{12}^2}. \tag{1}$$

Forțele F_{23}, F_{31} cu care se resping corpurile 2—3, respectiv 3—1, se exprimă analog :

$$F_{23} = \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{d_{23}^2}; \tag{2}$$

$$F_{31} = \frac{q_3 q_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{d_{31}^2}. \tag{3}$$

Prin înmulțirea relațiilor (1), (2) și (3) se obține o expresie din care rezultă produsul sarcinilor :

$$q_1 q_2 q_3 = \pm (4\pi\varepsilon_0)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{F_{12} \cdot F_{23} \cdot F_{31}} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{31}. \tag{4}$$

Din relațiile (2) și (4), (3) și (4), (1) și (4) rezultă, respectiv, valorile căutate ale sarcinilor electrice :

$$q_1 = \pm \sqrt{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{F_{12} \cdot F_{31}}{F_{23}}} \cdot \frac{d_{12} \cdot d_{31}}{d_{23}} \tag{5}$$

$$q_2 = \pm \sqrt{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{F_{23} \cdot F_{12}}{F_{31}}} \cdot \frac{d_{23} \cdot d_{12}}{d_{31}} \tag{6}$$

$$q_3 = \pm \sqrt{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{F_{31} \cdot F_{23}}{F_{12}}} \cdot \frac{d_{31} \cdot d_{23}}{d_{12}} \tag{7}$$

Semnele se asociază pe baza relațiilor (1), (2), (3).

Schimbarea semnului la toate sarcinile nu modifică forțele.

Scanned with OKEN Scanner

1.3. Notînd cu d distanța dintre două corpuri încărcate cu sarcinile electrice q_1, respectiv q_2, și cu ε permitivitatea mediului, forța de respingere exercitată asupra lor este, conform legii lui Coulomb (1.1):

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{d^2}. \tag{1}$$

La îndepărtarea corpurilor cu l, distanța dintre ele devine $(d + l)$ și deci forța de respingere scade la valoarea

$$F' = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{(d+l)^2}. \tag{2}$$

Notînd cu r distanța dintre cele două corpuri la un moment dat t în decursul deplasării, cu dr_1, respectiv dr_2, deplasările corpului 1, respectiv 2, realizate în intervalul de timp următor dt și presupunînd că deplasările corpurilor se fac în sensuri opuse pe aceeași dreaptă (D) pe care erau situate inițial corpurile (fig. R.1.3), rezultă expresia lucrului mecanic total:

$$L = \int F \cdot dr_1 + \int F \cdot dr_2. \tag{3}$$

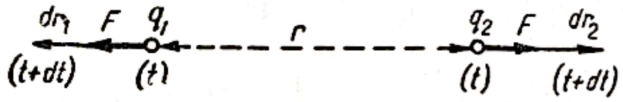


Fig. R.1.3

Observăm că în cele două integrale, care reprezintă lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea primului, respectiv celui de-al doilea corp, intervine aceeași forță F. Creșterea totală a distanței r în intervalul de timp dt fiind $dr = dr_1 + dr_2$ rezultă:

$$L = \int F(dr_1 + dr_2) = \int_{r=}^{r=d+l} F dr.$$

Rezultă pentru lucrul mecanic total expresia:

$$L = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \int_{r=d}^{r=d+l} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{l}{d(d+l)}. \tag{4}$$

Din ecuațiile (1) și (4) se obține

$$L = \frac{d}{d+l} \cdot l \cdot F. \tag{5}$$

Din ecuațiile (1) și (2) mai rezultă:

$$\frac{d}{d+l} = \sqrt{\frac{F'}{F}}. \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ca urmare, lucrul mecanic total efectuat pentru deplasarea corpurilor se exprimă în funcție de datele problemei astfel:

$$L = l \cdot \sqrt{F \cdot F'}. \tag{7}$$

Deoarece în regim electrostatic lucrul mecanic efectuat de forțele de natură electrostatică la deplasarea lentă a unui mic corp încărcat, de-a lungul unei curbe închise este nul, rezultă că presupunerea făcută cu privire la deplasarea rectilinie a corpurilor nu limitează valabilitatea formulei (7), aceasta fiind valabilă pentru o deplasare lentă pe curbe oarecare.

După transformarea valorii forței totale date în gram-forță, pe baza relației

$$1\,000 \text{ gf} = 9{,}81 \text{ N}$$

se obține

$$L = 0{,}2 \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2} \cdot (10{,}2 \cdot 9{,}81 \cdot 10^{-3})^2} = 1{,}41 \cdot 10^{-3} \text{J}.$$

1.12. *Soluția I.* Tensiunea electrică este, prin definiție, integrala de linie a intensității cîmpului electric:

$$U_{AB} = \int_A^B \bar{E}\, \overline{ds} = \int_A^B [(x+y)\,\bar{i} + x\bar{j} + 2\bar{k}] \cdot (\bar{i}\,dx + \bar{j}\,dy + \bar{k}dz). \tag{1}$$

Integrarea făcîndu-se de-a lungul axei Ox, rezultă $y = 0$, $z = 0$ și $\overline{ds} = \bar{i}\,dx$; ca urmare:

$$U_{AB} = \int_{x=a}^{x=2a} x dx = \frac{1}{2}\, x^2 \Big|_a^{2a} = \frac{1}{2}\,(4a^2 - a^2) = \frac{3}{2}\, a^2. \tag{2}$$

Soluția II. Intensitatea cîmpului electrostatic derivînd dintr-un potențial scalar definit de relația:

$$\bar{E} = -\operatorname{grad} V \tag{3}$$

se observă că potențialul corespunzător este

$$V(x,y,z) = -\left(\frac{x^2}{2} + xy\right) - xy - 2z + C, \tag{4}$$

unde C este o constantă. Tensiunea căut[illegible] exprimă ca diferență de potențial în forma

$$U_{AB} = V_A - V_B = V\,(a,0,0) - [illegible] = -\frac{a^2}{2} + \frac{4a^2}{2} = \frac{3}{2}\, a^2. \tag{5}$$

1.15. Se va determina o valoare aproximativă a intensității cîmpului electric, considerînd valoarea acestuia constantă în punctele unei linii de cîmp cuprinse între două suprafețe echipotențiale alăturate. Se va folosi relația $V_a - V_b = E \cdot l_{ab}$, unde l_{ab} este lungimea unui segment

Scanned with OKEN Scanner

de dreaptă care trece prin punctul în care se cere intensitatea E a cîmpului electric; segmentul este cuprins între cele două suprafețe echipotențiale alăturate și este aproximativ perpendicular pe acestea.

1.16. Se aproximează

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \text{ prin } E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x}.$$

1.17. Din motive de simetrie, intensitatea cîmpului electric în punctele situate pe mediatoarea segmentului este paralelă cu mediatoarea. Ca urmare, proiecțiile vectorilor cîmp electric elementari, corespunzători elementelor de lungime ds ale firului, au ca rezultantă cîmpul electric în punctele considerate (fig. R.1.17):

$$E = \int_{s=-\frac{1}{2}}^{s=\frac{1}{2}} \frac{\rho_l \cdot ds}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \cos\alpha. \qquad (1)$$

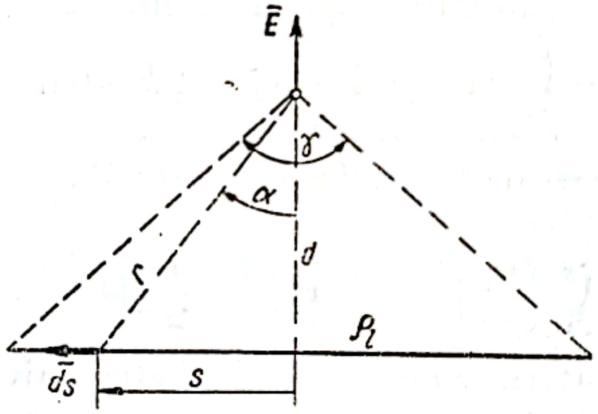


Fig. R.1.17

Din triunghiul dreptunghic reprezentat în figură se observă relațiile

$$s = d \cdot \operatorname{tg}\alpha \quad (2); \quad d = r \cdot \cos\alpha. \qquad (3)$$

Pe baza relațiilor de mai sus se obține

$$E = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 d} \cdot \int_{\alpha=-\frac{\gamma}{2}}^{\alpha=\frac{\gamma}{2}} \cos\alpha \cdot d\alpha = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}. \qquad (4)$$

1.20. Se observă că din motive de simetrie intensitatea cîmpului electric este perpendiculară pe plan. Se determină valoarea intensității cîmpului electric rezultant prin însumarea proiecțiilor pe normala pe plan a intensităților cîmpurilor elementare ale unor elemente de suprafață încărcate.

Scanned with OKEN Scanner

1.24. Se va determina intensitatea cîmpului electric din cavitate pe baza teoremei superpoziției cîmpurilor electrice. Se observă că realizarea cavității este echivalentă, din punctul de vedere al cîmpului produs, cu suprapunerea unei distribuții de sarcini de densitate $-\rho_v$ în interiorul sferei de rază a_2 peste o distribuție de densitate ρ_v din întreaga sferă de rază a_1.

1.25. Se va suprapune cîmpul distribuției uniforme ρ_{v1} de sarcină din cilindru cu cîmpul produs de o distribuție suplimentară de sarcini, de densitate $\rho_{v2} - \rho_{v1}$, existentă în interiorul sferei.

1.36. Cea mai mare intensitate de cîmp electric se realizează în imediata vecinătate a armăturii interioare $E_{max} = \frac{Q}{4\pi R^2 \varepsilon_0}$.

1.39. Se consideră aplicată o tensiune la borne de valoare arbitrară, de exemplu $U' = 1$ V, și se calculează tensiunile la bornele condensatoarelor. Dacă U'' este cea mai mare dintre tensiunile de la bornele condensatoarelor, tensiunea la borne fiind proporțională cu tensiunile repartizate pe condensatoare rezultă $U = \frac{U_1}{U''} \cdot U'$.

1.41. Condensatorul C_3, inițial presupus neîncărcat, fiind legat în serie cu condensatorul C_2, este încărcat cu aceeași sarcină ca și condensatorul de capacitate C_2. Ca urmare, $Q_2 = Q_3 = 24$ μC. Condensatorul C_4 fiind legat în derivație cu latura avînd înseriate condensatoarele C_2 și C_3, se obține

$$U_4 = U_2 + U_3 + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = 10 \text{ V}.$$

Sarcina condensatorului C_4 este deci $Q_4 = C_4 U_4 = 60$ μC. Condensatoarele legate în serie cu grupul de două laturi au sarcini egale cu

$$Q_1 = Q_5 = Q_2 + Q_4 = 64 \text{ μC}.$$

Ca urmare tensiunea la borne este

$$U = U_1 + U_4 + U_5 + \frac{Q_1}{C_1} + U_4 + \frac{Q_5}{C_5} = 8 + 10 + 32 = 50 \text{ V}.$$

1.42. Se trece la o schemă echivalentă cu conexiune mixtă (serie-paralel) prin înlocuirea conexiunilor în triunghi (cu vîrfurile A, B, E, respectiv B, D, F) prin conexiuni în stea echivalente.

Scanned with OKEN Scanner

1.48. Capacitățile dintre plăci se exprimă astfel

$$C_1 = \frac{\varepsilon \cdot A}{x}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon \cdot A}{d - x}.$$

a) Energia electrostatică a sistemului este

$$W = W_1 + W_2 = \frac{C_1(V_A - V_B)^2}{2} + \frac{C_2(V_B - V_C)^2}{2}.$$

Valorile lui x pentru care W are valori extreme se determină aflînd rădăcinile ecuației

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad \text{adică} \quad \frac{\varepsilon A}{2}\left[-\frac{(V_A - V_B)^2}{x^2} + \frac{(V_B - V_C)^2}{(d - x)^2}\right] = 0.$$

Rezultă o valoare minimă a energiei pentru $x = \left| d\frac{V_A - V_B}{V_A - V_C} \right|$.

Din punct de vedere fizic soluția corespunde numai dacă $|V_A - V_B| < |V_A - V_C|$, deoarece în caz contrar $x > d$ ceea ce este imposibil. Forța F, care acționează asupra armăturii intermediare tinzînd să mărească distanța, are, conform teoremei forțelor generalizate, valoarea algebrică

$$F = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{V = const} = 0.$$

b) Sarcina electrică totală a armăturii intermediare este suma sarcinilor de pe cele două fețe ale sale, corespunzătoare condensatoarelor de capacitate C_1 și C_2:

$$Q = -Q_1 + Q_2 = -C_1(V_A - V_B) + C_2(V_B - V_C) = \varepsilon A\left(-\frac{V_A - V_B}{x} + \right.$$

$$\left. + \frac{V_B - V_C}{d - x}\right).$$

Această sarcină este nulă dacă

$$\frac{x}{d - x} = \frac{V_A - V_B}{V_B - V_C},$$

deci

$$x = d\,\frac{V_A - V_B}{V_A - V_C}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din punct de vedere fizic soluția corespunde numai dacă $V_A - V_B$ și $V_A - V_C$ au același semn. În acest caz, distanța care corespunde energiei minime a sistemului corespunde și condiției de anulare a sarcinilor de pe placa interioară.

REZOLVĂRI ȘI INDICAȚII LA CAPITOLUL 2

2.3. Rezistențele electrice ale celor două linii bifilare sînt

$$R_{Cu} = \rho_{Cu} \frac{2l_{CU}}{A_{CU}} \text{ respectiv } R_{Al} = \rho_{Al} \frac{2l_{Al}}{A_{Al}} \tag{1}$$

Condiția de egalitate a rezistențelor și a lungimilor liniilor $l_{Cu} = l_{Al}$ conduce la următorul raport al secțiunilor celor două conductoare

$$\frac{A_{Cu}}{A_{Al}} = \frac{\rho_{Cu}}{\rho_{Al}}. \tag{2}$$

Masa materialului necesar se exprimă în funcție de densitatea de masă și de volumul conductoarelor

$$G_{Cu} = \gamma_{Cu} \cdot A_{Cu}(2l_{Cu}), \text{ respectiv } G_{Al} = \gamma_{Al} A_{Al}(2l_{Al}). \tag{3}$$

Costul cuprului, respectiv al aluminiului din care sînt realizate cele două linii, este deci

$$\begin{aligned} C_{Cu} &= c_{Cu} \cdot G_{Cu} = c_{Cu} \cdot \gamma_{Cu} \cdot 2A_{Cu} l_{Cu}, \\ C_{Al} &= c_{Al} \cdot G_{Al} = C_{Al} \cdot \gamma_{Al} \cdot 2A_{Al} l_{Al}. \end{aligned} \tag{4}$$

Raportul cerut se exprimă astfel:

$$\frac{C_{Cu}}{C_{Al}} = \frac{c_{Cu}}{c_{Al}} \cdot \frac{\gamma_{Cu}}{\gamma_{Al}} \cdot \frac{\rho_{Cu}}{\rho_{Al}}. \tag{5}$$

Se observă că pentru cunoașterea valorii exacte a acestui raport trebuie să se stabilească în prealabil temperaturile la care vor lucra cele două linii, temperaturi care determină valorile rezistivităților ρ_{Cu} și ρ_{Al}.

Scanned with OKEN Scanner

2.8. Se va ține seama de modificarea rezistivității și se va determina temperatura θ ca funcție de timp, pe baza ecuației care exprimă egalitatea dintre căldura înmagazinată în fir și cea produsă prin efect Joule-Lenz în timpul dt

$$c \cdot M \cdot d\theta = Ri^2 \cdot dt$$

2.7. Puterea consumată de lampa de rezistență R se exprimă:

$$P = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

Din datele problemei rezultă

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{127^2}{40} = 404 \ \Omega.$$

Această rezistență se realizează în regimul de funcționare normală a lămpii, la temperatura de θ°C.

Alimentînd un timp foarte scurt lampa cu o tensiune de numai 1 V, se poate neglija creșterea temperaturii filamentului în timpul cît este aplicată tensiunea. Ca urmare, filamentul la temperatura de 20°C, a camerei, are rezistența

$$R_{20} = \frac{10\ V}{256\ mA} = \frac{10\ V}{256 \cdot 10^{-3} \cdot A} = \frac{10^4 \text{V}}{256\ \text{A}} = 39{,}1\ \Omega.$$

În aproximația unei variații liniare a rezistivității (cu coeficient de temperatură constant):

$$R = R_{20}\,[1 + \alpha\,(\theta - 20)],$$

rezultă

$$\theta = \frac{R - R_{20}}{\alpha} + 20 = \frac{374{,}9}{0{,}144} + 20 = 2\,600 + 20 = 2\,620°\text{C}.$$

2.16. Se va ține seama de simetria sistemului. Notîndu-se cu I curentul cu care se alimentează circuitul, pe baza simetriei și a primei teoreme a lui Kirchhoff se vor exprima curenții din fiecare latură. Apoi, pe baza legii lui Ohm se va exprima tensiunea de-a lungul unui sistem de muchii care unesc cele două vîrfuri.

2.17. Se vor înlocui, pe rînd, rezistoarele legate în serie și cele legate în derivație cu rezistoare echivalente, pînă se va obține rezistorul echivalent al întregului circuit.

Scanned with OKEN Scanner

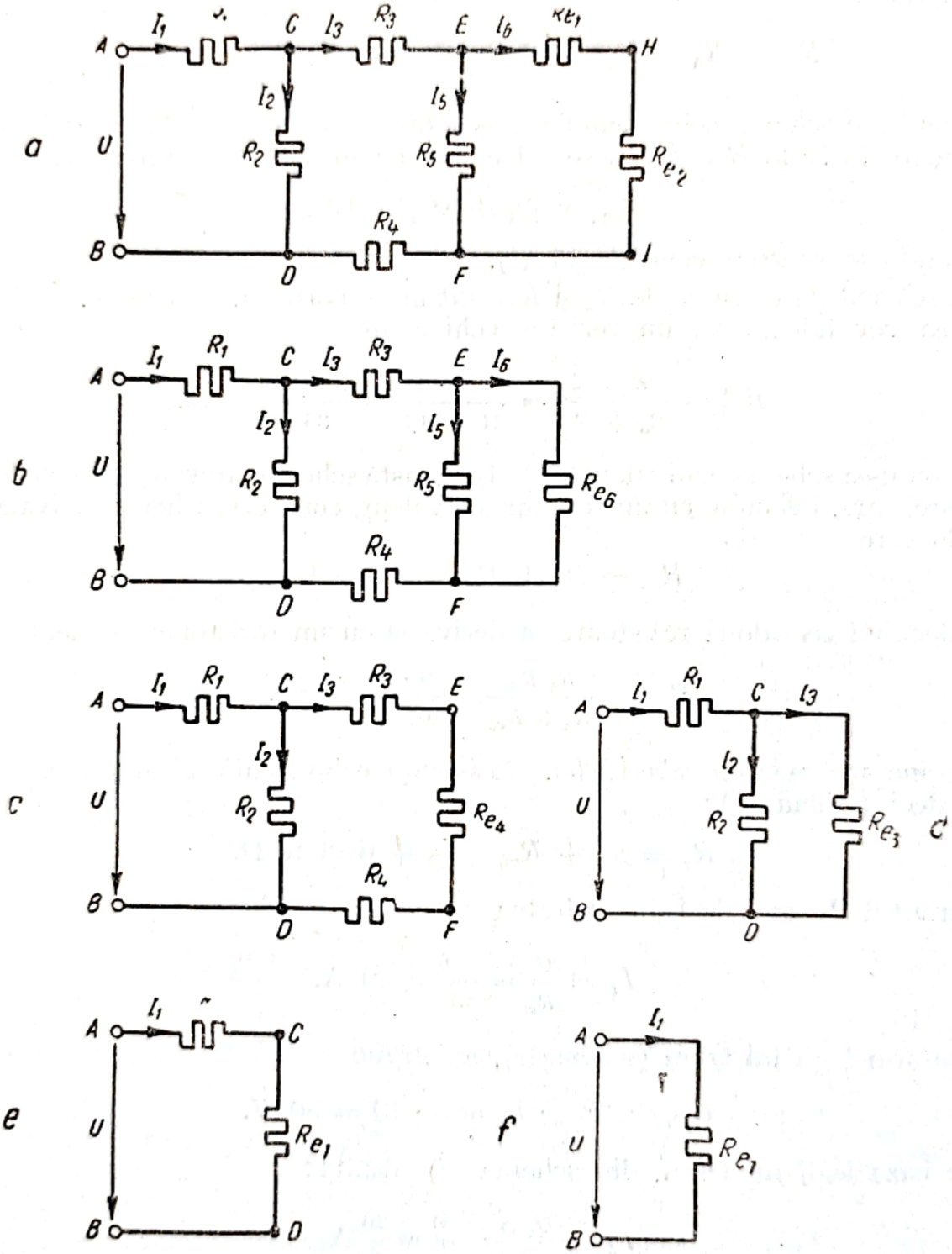

a
A
B
C
D
E
F
H
I
U
I_1
I_2
I_3
I_5
I_6
R_2
R_3
R_4
R_5
b
R_1
R_{e6}
c
R_{e4}
R_4
I_1
I_2
I_3
R_1
R_2
R_{e3}
e
R_{e1}
f

Fig. R.2.17

Rezistoarele R_6, R_7 legate în serie și rezistoarele R_8, R_9 legate în derivație, se înlocuiesc cu cîte un rezistor echivalent

$$R_{e1} = R_6 + R_7 = 10\ \Omega;\ R_{e2} = \frac{R_8 R_9}{R_8 + R_9} = 2\Omega,$$

obținîndu-se schema echivalentă reprezentată în figura R.2.17 *a*. Cele două rezistoare în serie R_{e1} și R_{e2} se înlocuiesc cu un rezistor echivalent

$$R_{e3} = R_{e1} + R_{e2} = 12\ \Omega,$$

obținîndu-se schema echivalentă (*b*).

În schema (*b*) rezistoarele R_5 și R_{e3} sînt în derivație și, ca urmare, la rîndul lor, se vor înlocui cu un rezistor echivalent

$$R_{e4} = \frac{R_5 R_{e3}}{R_5 + R_{e3}} = \frac{24 \cdot 12}{24 + 12} = \frac{24 \cdot 12}{36} = 8\Omega,$$

obținîndu-se schema echivalentă (*c*). În această schemă intervin trei rezistoare în serie, care, înlocuite cu un rezistor echivalent, conduc la schema echivalentă (*d*) în care

$$R_{e5} = R_3 + R_{e4} + R_4 = 18\ \Omega.$$

Înlocuind cele două rezistoare în derivație cu un rezistor echivalent

$$R_{e6} = \frac{R_2 R_{e5}}{R_2 + R_{e5}} = \frac{9 \cdot 18}{9 + 18} = 6\Omega$$

se obține schema echivalentă (*e*). Rezistența echivalentă a întregului circuit este deci (schema *f*):

$$R_e = R_1 + R_{e6} = 4 + 6 = 10\ \Omega.$$

Curentul I_1 are deci intensitatea

$$I_1 = \frac{U}{R_e} = \frac{100}{10} = 10\ \text{A}.$$

Conform legii lui Ohm (schema *e*), se obține

$$U_{CD} = R_{e6} \cdot I_1 = 6 \cdot 10 = 60\ \text{V}.$$

Pe baza legii lui Ohm, din schema (*d*) rezultă:

$$I_2 = \frac{U_{CD}}{R_2} = \frac{60}{9} = \frac{20}{3}\ \text{A}$$

$$I_3 = \frac{60}{18} = \frac{10}{3}\ \text{A}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din schema echivalentă (*c*) se calculează tensiunea

$$U_{EF} = R_{e4} I_3 = 8 \cdot \frac{10}{3} = \frac{80}{3} \text{ V}.$$

Folosind schema (*b*) din legea lui Ohm rezultă:

$$I_5 = \frac{U_{EF}}{R_5} = \frac{1}{24} \cdot \frac{80}{3} = \frac{10}{9} \text{ A}.$$

Conform primei teoreme a lui Kirchhoff aplicată în nodul E se obține

$$I_6 = I_3 - I_5 = \frac{30}{9} - \frac{10}{9} = \frac{20}{9} \text{ A}.$$

Observînd schema circuitului (*a*), rezultă:

$$U_{HI} = R_{e2} \cdot I_6 = 2 \cdot \frac{20}{9} = \frac{40}{9} \text{ V}.$$

Aplicînd legea lui Ohm laturilor 7 și 8 ale circuitului dat se obțin intensitățile

$$I_8 = \frac{U_{HI}}{R_8} = \frac{10}{9} \text{ A} \text{ și } I_9 = \frac{U_{HI}}{R_9} = \frac{10}{9} \text{ A}.$$

După determinarea intensităților curenților se determină, pe baza legii lui Ohm, folosind schema dată (a), tensiunile

$$U_{DF} = R_4 \cdot I_3 = \frac{70}{3} \text{ V}, \quad U_{EG} = R_6 I_6 = \frac{40}{9} \text{ V},$$

$$U_{GH} = R_8 I_6 = 8 \frac{20}{9} = \frac{160}{9} \text{ V}, \quad U_{AC} = R_1 I_1 = 40 \text{ V}$$

Puterile se calculează pe baza relațiilor de forma $P = RI^2 = UI$, obținîndu-se

$$P_1 = R_1 I_1^2 = 400 \text{ W}, \quad P_2 = R_2 I_2^2 = 400 \text{ W}, \quad P_3 = R_3 I_3^2 = \frac{100}{3} \text{ W},$$

$$P_4 = U_{DF} I_3 = \frac{700}{9} \text{ W}, \quad P_5 = U_{EF} I_5 = \frac{800}{27} \text{ W}, \quad P_6 = R_6 I_6^2 = \frac{800}{81} \text{ W},$$

$$P_7 = R_7 I_6^2 = \frac{3\,200}{81} \text{ W}, \quad P_8 = U_{HI} \cdot I_8 = \frac{400}{81} \text{ W}, \quad P_9 = U_{HI} I_9 = \frac{400}{81} \text{ W}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se verifică bilanțul puterilor care reprezintă egalitatea dintre puterea electrică totală primită de circuit (pe la borne) și puterea totală consumată (transformată în căldură în exemplul considerat)

$$UI_1 = P_1 + P_2 + \ldots + P_9,$$

rezultă

$$1\,000\ \text{W} = 400 + 400 + \frac{2\,700 + 6\,300 + 2\,400 + 800 + 3\,200 + 400 + 400}{81}$$

$$1\,000\ \text{W} = 800 + \frac{16\,200}{81} = 800 + 200 = 1\,000\ \text{W}.$$

REZOLVĂRI ȘI INDICAȚII LA CAPITOLUL 3

3.3. În regimul nominal de funcționare tensiunea având valoarea dată $U_{ln} = 127$ V, din diagramă rezultă valoarea intensității curentului electric corespunzător

$$I_{ln} = 600\ \text{mA}. \tag{1}$$

Tensiunea electrică la bornele circuitului format prin legarea în serie a lămpii și a reostatului se exprimă

$$U = U_l + RI_l, \tag{2}$$

în care U_l este tensiunea la bornele lămpii, iar I_l curentul din circuit.

a) Folosind valoarea dată pentru U în enunț și condiția de realizare a regimului nominal, rezultă valoarea căutată a rezistenței reostatului

$$R = \frac{U - U_{ln}}{I_{ln}} = \frac{220 - 127}{0{,}6} = \frac{93}{0{,}6} = 155\ \Omega.$$

b) Pentru o valoare a rezistenței reostatului de

$$R' = R - 0{,}1\ R = 0{,}9 \cdot 155 = 140\ \Omega,$$

și $U = 220$ V din ecuația circuitului rezultă condiția

$$220 = U_l + 140 \cdot I_l. \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Valorile tensiunii și intensității curentului lămpii trebuie să satisfacă atît relația (3), cît și caracteristica tensiune-curent a lămpii. Ca urmare, determinarea acestora se face simplu, observînd că ele corespund punctului (M) situat la intersecția caracteristicii lămpii cu dreapta de ecuație (3). Construcția acestei drepte se face simplu, determinînd coordonatele a două puncte ale ei; de exemplu:

$$A\begin{cases} I_l' = 0{,}3 \text{ A} \\ U_l' = 178 \text{ V} \end{cases} \qquad B\begin{cases} I_l'' = 0{,}7 \text{ A} \\ U_l'' = 122 \text{ V}. \end{cases}$$

Coordonatele punctului M corespund valorilor căutate ale tensiunii și curentului lămpii

$$U_l = 134 \text{ V}, \quad I_l = 0{,}605 \text{ A}. \tag{4}$$

c) Pentru $U = 220 + 0{,}1 \cdot 220 = 242$ V ecuația circuitului (2) devine

$$242 = U_l + 155 \cdot I_l. \tag{5}$$

Dreapta avînd această ecuație trece prin punctele

$$A_1\begin{cases} I_{1l}' = 0{,}4 \text{ A} \\ U_{1l}' = 180 \text{ V} \end{cases} \qquad B_1\begin{cases} I_{1l}'' = 0{,}7 \text{ A} \\ U_{1l}'' = 133 \text{ V}. \end{cases}$$

Punctul de intersecție al dreptei care trece prin punctele A_1, B_1 cu caracteristica tensiune-curent dă valorile corespunzătoare

$$\begin{aligned} U_{1l} &= 144 \text{ V} \\ I_{1l} &= 0{,}64 \text{ A}. \end{aligned} \tag{6}$$

Pentru $U = 220 - 0{,}1 \cdot 220 = 198$ V ecuația circuitului (2) devine

$$198 = U_l + 155 \cdot I_l. \tag{7}$$

Dreapta avînd această ecuație trece prin punctele

$$A_2\begin{cases} I_{2l}' = 0{,}2 \text{ A} \\ U_{2l}' = 167 \text{ V} \end{cases} \qquad B_2\begin{cases} I_{2l}'' = 0{,}7 \text{ A} \\ U_{2l}'' = 189{,}5 \text{ V}. \end{cases}$$

Intersecția acestei drepte cu caracteristica dă valorile corespunzătoare ale tensiunii lămpii și curentului lămpii. Pentru $U = 198$ V — punctul M_2 de pe caracteristică, corespunde

$$\begin{aligned} U_{2l} &= 80{,}4 \text{ V} \\ I_{2l} &= 0{,}56 \text{ A}. \end{aligned} \tag{8}$$

Aceeași chestiune de la punctul (*c*) al problemei se poate rezolva aproximativ folosind ecuațiile corespunzătoare unor variații mici ale tensiunilor și curenților (breviar 3.4)

$$\Delta U = R \cdot \Delta I_l + R_d \cdot \Delta I_l. \tag{9}$$

Scanned with OKEN Scanner

Considerînd o valoare (aproximativă) medie a rezistenței dinamice

$$R_d \cong \frac{U_1^I (I_1^I - U_1^{II} (I_1^{II})}{I_1^I - I_1^{II}}, \tag{10}$$

alegînd $I_1^I = 0{,}66$ A și $I_1^{II} = 0{,}5$ A, din caracteristică rezultă

$$R_d \cong \frac{160 - 100}{0{,}66 - 0{,}55} = \frac{60}{0{,}16} = 374\ \Omega. \tag{11}$$

Pentru $\Delta U = 22$ V se obține

$$\Delta I_l = \frac{\Delta U}{R + R_d} = \frac{22}{155 + 374} = \frac{22}{529} = 0{,}0416\ \text{A}.$$

Se observă că această valoare corespunde valorilor calculate mai sus

$$I_{1l} \cong I_l + \Delta I_l$$

$$I_{2l} \cong I_l - \Delta I_l.$$

3.5. Se aleg valorile rezistențelor r_2 și r_3, astfel ca pentru regimul nominal al filamentului și tensiunea de alimentare dată $U = 24$ V să corespundă punctul de funcționare de pe mijlocul porțiunii rectilinii a caracteristicii $U_4 = 14$ V. Se verifică apoi valabilitatea soluției adoptate.

3.9. Pe baza simetriei circuitului se observă că se aplică o aceeași tensiune u_1 celor două elemente neliniare și o aceeași tensiune u_2 elementelor liniare.

Pentru realizarea unei stabilizări a tensiunii într-un domeniu cît mai larg de variație a tensiunii U, în prima aproximație, se consideră că regimul de funcționare a rezistențelor de tirit corespunde punctului situat la mijlocul porțiunii liniare de caracteristică, $U_1 = 180$ V și V și $I_l = 60$ mA.

Din datele problemei rezultă:

$$i = \frac{u}{r} = \frac{50}{300} \cong 0{,}167\ \text{A}.$$

Aplicînd prima teoremă a lui Kirchhoff rezultă:

$$I_2 = i + I_1 = 0{,}060 + 0{,}167 = 0{,}227\ \text{A}.$$

Pe baza teoremei potențialului electrocinetic staționar rezultă:

$$U_2 = U_1 - u = 108 - 50 = 58\ \text{V}.$$

Pe baza legii lui Ohm se obține valoarea rezistenței r_2

$$r_2 = \frac{U_2}{i} = \frac{58}{0{,}227} = 253\ \Omega.$$

Scanned with OKEN Scanner

Curentul cu care se alimentează stabilizatorul este

$$I = I_1 + I_2 = 0{,}060 + 0{,}227 = 0{,}287 \text{ mA}.$$

Exprimînd tensiunea sursei în funcție de căderile de tensiune din circuit

$$U = r_3 I + U_1 + U_2,$$

rezultă :

$$r_3 = \frac{U - U_1 + U_2}{I} = \frac{225 - (108 + 58)}{0{,}287} = \frac{59}{0{,}287} = 206\ \Omega.$$

Se observă realizarea condiției $r_2 \cong r_{1d}$.

3.8. *a)* La mers în gol fiecare din rezistențele de tirit este legată în serie cu cîte o rezistență liniară R și deci $I_1 = I_2 = I$. Se va construi grafic caracteristica $U = u_1 + u_2 = f(I)$ (1). Tensiunea în gol se exprimă $u_0 = u_1 - u_2$. Folosind caracteristica (1) și caracteristicile curent-tensiune ale elementelor neliniare și ale celor liniare se poate construi caracteristica $u_0 = u_1 - u_2 = g(u)$. (2).

Aceasta permite citirea directă a valorilor u_0 cerute la punctul (*a*) pentru $U = 180, 200, 220$ V și rezolvă, de asemenea, chestiunea pusă la punctul (*c*).

Legarea unui ampermetru de rezistență interioară neglijabilă corespunde scurtcircuitării punctelor 2′—2″, respectiv suprapunerii lor. Astfel se obține o schemă echivalentă în care fiecare element neliniar este legat în paralel cu cîte unul din elementele neliniare. În această schemă se observă că din motive de simetrie tensiunea comună aplicată elementelor liniare și neliniare este $\frac{U}{2}$. Curentul căutat este $i = I_2 - I_1$.

REZOLVĂRI ȘI INDICAȚII LA CAPITOLUL 4

4.2. Între viteza electronului v și energia sa cinetică avînd relația

$$\frac{m v^2}{2} = W = 150 \text{ eV} = 150 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{19} \text{J}, \qquad (1)$$

în care m este masa electronului, rezultă viteza electronului

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-17}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = 6{,}56 \cdot 10^{6}\ \text{m/s}.$$

Forța magnetică $\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$ fiind perpendiculară în fiecare moment pe viteza particulei, rezultă că această forță este orientată radial și corespunde accelerației radiale.

$$q\,v\,B = \frac{m\,v^2}{R}, \tag{3}$$

în care R este raza cercului pe care se va deplasa electronul. Ca urmare:

$$R = \frac{m\,v}{q\,B} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 6{,}56 \cdot 10^{6}}{1{,}60 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 10^{-4}} \cong 0{,}374\ \text{m}$$

$$L = 2\pi R = 2{,}36\ \text{m}.$$

Perioada mișcării de rotație a electronului pe acest cerc este

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \cdot 0{,}374}{6{,}56 \cdot 10^{6}} = 0{,}357 \cdot 10^{-6} = 0{,}357\ \mu\text{s}.$$

4.4. Forțele de natură magnetică fiind în fiecare moment perpendiculare pe viteza particulei nu efectuează lucru mecanic și deci nu contribuie nici la creșterea energiei cinetice a particulei. Considerînd nulă viteza electronilor la ieșirea din firul axial, energia cinetică a electronilor la suprafața cilindrului este egală cu lucrul mecanic efectuat de forțele de natură electrică la deplasarea particulei dintr-un punct situat la distanța r_1 de axă într-un punct situat la distanța r_2:

$$\frac{m v_1^2}{2} = q \int_{r_2}^{r_1} E\,\mathrm{d}\,r = q \cdot U_{21}. \tag{1}$$

Din egalitatea dintre momentul de rotație și dintre viteza de creștere a momentului cantității de mișcare rezultă

$$-\,rqB\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = m\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right). \tag{2}$$

Înmulțind cu $\mathrm{d}t$ și integrînd de la timpul $t = 0$, cînd electronul se află la suprafața conductorului de rază r_2, cu $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0$, la t se obține

$$r\,\frac{\mathrm{d}\theta}{dt} = v_t = -\,\frac{q}{mr}\int_{r_2}^{r_1} B r\,dr. \tag{3}$$

Pentru $B = \text{const.}$ rezultă:

$$V_t = \frac{qB}{2mr}\,(r_2^2 - r^2). \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cea mai mică tensiune U pentru care se anulează curentul este aceea pentru care la suprafața conductorului viteza v este tangențială, $v_1 = v_t$, pentru $r = r_1$. Din relațiile (4) și (1) rezultă

$$U_{21} = \frac{2(r_2^2 - r_1^2)^2 B^2}{8mr_1^2}. \tag{5}$$

Ca urmare,

$$B = \frac{2r_1}{r_1^2 - r_2^2} \cdot \sqrt{\frac{2m\,U_{12}}{q}} \cong \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{4^2 \cdot 10^{-4}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 9}{1{,}77 \cdot 10^{11}}} \cong 0{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{Wb/m}^2 = 5\ \text{Gs}.$$

4.11. Se aplică teorema superpoziției și se utilizează sistemul de coordonate indicat în figură. Se obține un cîmp magnetic învîrtitor, $H = \text{const.}$, cu o direcție care se rotește.

4.15. Se aplică teorema superpoziției, observînd că distribuția dată se obține prin două distribuții J și $-J$ în cilindrul complet, respectiv numai în cavitate.

REZOLVĂRI ȘI INDICAȚII LA CAPITOLUL 5

5.14. Prin împărțirea valorii fluxului magnetic cu valoarea secțiunii transversale a porțiunii de circuit magnetic, se obțin valorile secțiunii transversale a porțiunii de circuit magnetic se obțin valorile inducției magnetice în poli B_p, în întrefier B_δ. în jug B_j, în dinte B_d și în indus B_i:

$$B_p = \frac{k_d \Phi}{S} = \frac{1{,}17 \cdot 9{,}65 \cdot 10^{-2}}{920 \cdot 10^{-4}} = \frac{1{,}17 \cdot 9{,}65}{0{,}92} \cdot 10^{-1} = 1{,}23\ \text{Wb/m}^2,$$

$$B_j = \frac{k_d \Phi}{2S_j} = 0{,}93\ \text{Wb/m}^2;$$

$$B_\delta = \frac{\Phi}{S_\delta} = 0{,}84\ \text{Wb/m}^2; \qquad B_d = \frac{\Phi}{S_d} = 1{,}69\ \text{Wb/m}^2;$$

$$B_i = \frac{k_d \Phi}{2S_i} = 0{,}86\ \text{Wb/m}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din tabelele date în anexă, în funcție de natura materialului din care este confecționată partea respectivă de circuit, se determină intensitățile cîmpului magnetic.

$H_p = 9$ A/cm; $H_j = 5{,}05$ A/cm; $H_d = 66$ A/cm; $H_i = 4{,}4$A/ cm.

Intensitatea cîmpului magnetic în întrefier se calculează pe baza relației:

$$H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0} = \frac{0{,}84}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 6{,}7 \cdot 10^5 \text{ A/m}.$$

Pe baza legii circuitului magnetic se determină forța magnetomotoare a unei perechi de poli:

$$2F_M = l_j \cdot H_j + 2h \cdot H_p + 2\delta \cdot H_\delta + 2h_d \cdot H_d + l_i H_i = 5\,528 \text{ A}.$$

5.15. Linia medie de cîmp magnetic are forma unui cerc de rază

$$R_{med} = \frac{R_1 + R_2}{2} = 3{,}6 \text{ cm}. \tag{1}$$

Lungimea porțiunii de linie de cîmp din fier este

$$l_{fe} = 2\pi R_{med} - \delta = 22{,}6 - 0{,}1 = 22{,}5 \text{ cm}. \tag{2}$$

Aplicînd legea circuitului magnetic rezultă

$$\oint \overline{H}\,\overline{ds} = l_{fe} \cdot H_{fe} + \delta \cdot H_\delta = 0, \tag{3}$$

de unde se obține condiția:

$$H_{fe} = -\frac{\delta}{l_{fe}} \cdot H_\delta. \tag{4}$$

Pe de altă parte, din legea fluxului magnetic rezultă:

$$S \cdot B_{fe} \cong S \cdot B_\delta \text{ și deci } B_{fe} = B_\delta. \tag{5}$$

În întrefier

$$H_\delta = \frac{B}{\mu_0}, \tag{6}$$

Din (4), (5) și (6) rezultă următoarea relație între valoarea inducției magnetice în fier și intensitatea cîmpului magnetic în fier

$$B_{fe} = -\frac{l_{fe}}{\delta} \cdot \mu_0 \cdot H_{fe}. \tag{7}$$

Pentru oțelul magnetic din care este confecționat inelul dependența dintre B_{fe} și H_{fe} este redată în curba de magnetizare din fig. 5.15.b. Ca urmare, în material se stabilesc, în condițiile problemei, acele valori ale lui B_{fe} și

H_{fe} care satisfac atît relația (7), cît și dependența exprimată prin curba de magnetizare. Aceste valori se determină grafic intersectînd cu curba de magnetizare dreapta de ecuație (7), care trece prin origine și prin punctul (H_{fe}, B_{fe}), de coordonate

$$H_{fe} = -50 \text{ A/cm} = -50 \text{ A}/10^{-2} \text{ m} = -5 \cdot 10^3 \text{ A/m},$$

$$B_{fe} = \frac{22,5}{0,1} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^3 = 1,425 \text{ Wb/m}^2.$$

Punctul de intersecție dă valoarea căutată $B = 0,64$ Wb/m². În lipsa întrefierului corespunde inducția remanentă $B_r = 0,8$ Wb/m².

REZOLVĂRI ȘI INDICAȚII LA CAPITOLUL 6

6.1. Unghiul dintre componenta inducției, $B_n = B \cos 60°$, normala pe axa de rotație și normală pe planul spirei, are expresia $\alpha = \omega t$. Se neglijează cîmpul magnetic produs de curentul din spiră.

6.4. Rezistența voltmetrelor este foarte mare și, ca urmare, se neglijează fluxul magnetic produs de curentul (de intensitate foarte mică) din a doua bobină.

6.5. La legarea în serie a două bobine cu inductivitatea M, inductivitatea proprie echivalentă a circuitului are expresia $L_e = L_1 \pm 2M + L_2$, semnul + corespunzînd cazului cînd fluxurile din cele două bobine se adună.

6.7. Fluxul magnetic fascicular rezultant, utilizînd un sens de referință asociat după regula burghiului drept față de sensul de referință al curentului i_1, are expresia :

$$\Phi_f = \frac{n_1 i_1 - n_2 i_2}{R_m} = 28 \cdot 10^{-5} \cdot e^{-200t} \text{ Wb}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tensiunile la bornele celor două rezistențe se calculează pe baza legii lui Ohm generalizate

$$u_1 = n_1 \frac{d\Phi_f}{dt} + R_1 i_1 = -2{,}72\ e^{-200t}\ V;$$

$$u_2 = -n_2 \frac{d\Phi_f}{dt} + R_2 i_2 = 5{,}9\ e^{-200t}\ V.$$

Rezultă :

$$\frac{u_1}{u_2} = -0{,}462.$$

Se remarcă faptul că, dacă se neglijează căderile ohmice de tensiune $R_1 i_1$ și $R_2 i_2$ față de t.e.m. indusă în fiecare din bobine raportul tensiunilor la borne devine egal cu raportul numerelor de spire (cu semn schimbat).

$$\frac{u_1}{u_2} = -\frac{n_1}{n_2} = -0{,}5,$$

obținîndu-se o valoare apropiată de cea calculată mai sus.

6.19. Observînd simetria axială a sistemului și aplicînd legea inducției electromagnetice de-a lungul unor cercuri de rază r, cu centrul pe axa de simetrie se obține:

$$E_1 \cdot 2\pi r = \omega \cdot \pi r^2 \cdot B_m \cdot \cos\omega t \qquad \text{pentru } r \leqslant b$$

$$E_2 \cdot 2\pi r = \omega \cdot \pi b^2 \cdot B_m \cdot \cos\omega t \qquad \text{pentru } b \leqslant r.$$

În conductor cîmpul electric indus stabilește un curent electric de conducție de densitate $\bar{J} = \sigma \bar{E}$. Liniile de curent sînt, de asemenea, cercuri.

Puterea disipată prin efect Joule $p = \sigma E^2$ în întregul volum se calculează cu ajutorul integralei :

$$P = \int_{V_{conductor}} p\,dv = \int_a^b \sigma E_1^2 \cdot g \cdot 2\pi r \cdot dr + \int_b^c \sigma E_2^2 \cdot g \cdot 2\pi r \cdot dr =$$

$$= 50{,}3 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2\omega t \ \text{mW}.$$

6.20. Dimensiunile bobinei fiind prin ipoteză mici față de distanța pînă la placă, bobina se poate echivala cu un mic corp de moment magnetic $\bar{m} = (\mu_0 w A I_m \sin \omega t)\bar{n}$, în a cărui expresie s-au notat cu A — aria spirelor bobinei, w — numărul de spire și $\bar{n}$ — normala pe placă, cu orientare asociată după regula burghiului drept față de sensul de referință al curentului, i.

Inducția magnetică stabilită de acest corp cu moment magnetic se calculează cu ajutorul formulei:

$$\bar{B} = \frac{1}{4\pi}\left[3\frac{(\bar{m}\,\bar{R})}{R^5}\bar{R} - \frac{\bar{m}}{R^3}\right],$$

în care $\bar{R}$ este vectorul de poziție cu originea în punctul unde se află corpul cu moment magnetic (bobina) și extremitatea în punctul în care se calculează inducția $\bar{B}$.

Intensitatea cîmpului electric indus în placă și puterea disipată prin efect Joule se determină ca în problema 6.19.

REZOLVĂRI ȘI INDICAȚII LA CAPITOLUL 7

7.2. *a)* Fluxul magnetic care străbate spira are expresia

$$\Phi = BA\cos\alpha = \Phi_m \sin\omega t, \tag{1}$$

unde

$$\Phi_m = B_m A \cos\alpha. \tag{2}$$

T.e.m. indusă în spiră este

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = E_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \tag{3}$$

unde

$$E_m = \omega\Phi_m = \omega B_m A \cos\alpha. \tag{4}$$

b) Intensitatea curentului electric care se stabilește în spiră

$$i = \frac{e}{R} = I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \tag{5}$$

în care

$$I_m = \frac{E_m}{R} = \frac{\omega B_m A}{R}\cos\alpha. \tag{6}$$

c) Sarcina electrică care străbate secțiunea spirei într-un sfert de perioadă

$$(q)_{\frac{T}{4}} = \int_0^{\frac{T}{4}} i\,dt = \frac{1}{R}\int_0^{\frac{T}{4}}\left(-\frac{d\Phi}{dt}\right)dt = -\frac{1}{R}\int_0^{\Phi_m} d\Phi = \frac{\Phi m}{R} = -\frac{B_m A}{R}\cos\alpha. \tag{7}$$

d) Puterea medie pe o perioadă disipată prin efect Joule-Lenz

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T Ri^2\,dt = \frac{1}{2}RI_m^2 = \frac{\omega^2 B_m^2 A^2}{4R}(1 + \cos 2\alpha), \tag{8}$$

care se mai poate scrie

$$P = \frac{P_m}{2}(1 + \cos 2\alpha), \tag{9}$$

unde

$$P_m = \frac{\omega^2 B_m^2 A^2}{2R} \tag{10}$$

este valoarea maximă a puterii medii disipate.

Reprezentarea grafică $P = P(\alpha)$ se arată în figura R.7.2.

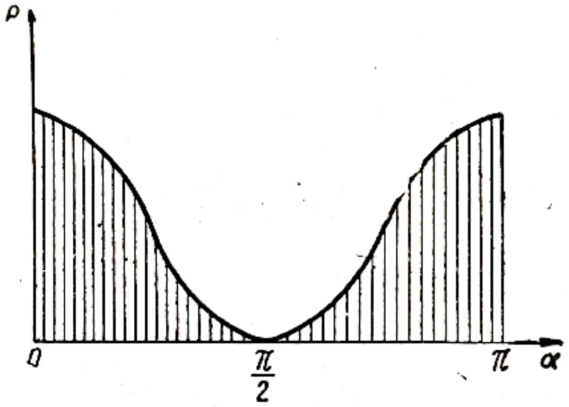


Fig. R.7.2

În cazul aplicației numerice : $\omega = 2\pi f = 100\,\pi$ rad/s, $\Phi_m = 4{,}44 \times 10^{-3}$ Wb, $E_m = 1{,}4$ V, $I_m = 0{,}7$ A, $(q)_{\frac{T}{4}} = 2{,}22 \cdot 10^{-3}$ C, $P = 0{,}49$ W.

7.4. Valoarea instantanee a forței electrodinamice de atracție f, care se exercită asupra unității de lungime a două conductoare filiforme, paralele, foarte lungi, situate în aer și parcurse de curenții i_1, respectiv i_2, are expresia :

$$f = \frac{\mu_0}{2\pi a} i_1 i_2, \tag{1}$$

unde a este distanța dintre cele două conductoare.

Valoarea medie a forței f pe timp de o perioadă este

$$F_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T f\,dt. \tag{2}$$

7.21. Pentru circuitul echivalent serie, figura R. 7.21, *a*, corespunde $Z_s = \frac{U}{I} = 200\,\Omega$; $R_s = \frac{P}{I^2} = 0{,}25$; $X_s = -\sqrt{Z_s^2 - R_s^2} = -200\ \Omega$; $C_s = \frac{1}{\omega |X_s|} \cong 16\,\mu$F.

Pentru circuitul echivalent derivație, figura R. 7.21 b, corespunde $Y_p = \frac{I}{U} =$

$$= 5 \cdot 10^{-3} \text{ S}; \quad G_p = \frac{P}{U^2} = 6{,}25 \cdot 10^{-6} \text{ S};$$

$$B_p = -\sqrt{Y_p^2 - G_p^2} \cong -5 \cdot 10^{-3} \text{ S}.$$

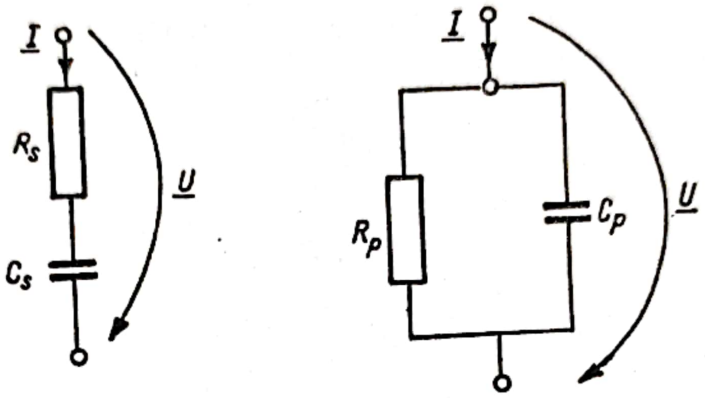


Fig. R.7.21 b

Rezultă :

$$R_p = \frac{1}{G_p} = 160 \text{ k}\Omega; \quad C_p = \frac{|B_p|}{\omega} \cong 16 \ \mu\text{F}.$$

7.22. Rezistența receptorului este

$$R_n = \frac{U_n^2}{P_n} = 6\Omega. \tag{1}$$

Impedanța complexă echivalentă a circuitului serie

$$\underline{Z}_e = R_n + \underline{Z} = (R_n + R\ ) + \text{j}X. \tag{2}$$

Tensiunea la bornele receptorului are expresia complexă

$$\underline{U}_n = \frac{R_n}{R_n + \underline{Z}} \underline{U}. \tag{3}$$

Tangenta unghiului φ de defazaj dintre curent și tensiunea la bornele circuitului este

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{X}{R + R_0}. \tag{4}$$

Notînd

$$\alpha = \frac{R}{Rn}; \qquad \beta = \frac{X}{R_n}, \tag{5}$$

relațiile (3) și (4) care rezolvă problema iau forma

$$(1+\alpha)^2+\beta^2=\left(\frac{U}{U_n}\right)^2; \tag{3'}$$

$$\frac{\beta}{1+\alpha}=\operatorname{tg}\varphi. \tag{4'}$$

7.25. *a)* Alegînd originea de fază astfel încît unghiul fazic inițial al tensiunii să fie nul, rezultă:

$$\underline{U}=120\ \text{V};\ \underline{I}_R=\frac{\underline{U}}{R}4\ \text{A};\ \underline{I}_L=\frac{\underline{U}}{\mathrm{j}\,\omega L}=-3\,\mathrm{j}=3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}90^\circ}\ \text{A}$$

$$\underline{I}=\underline{I}_R+\underline{I}_L=4-\mathrm{j}\,3=5\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}37^\circ}\ \text{A}.$$

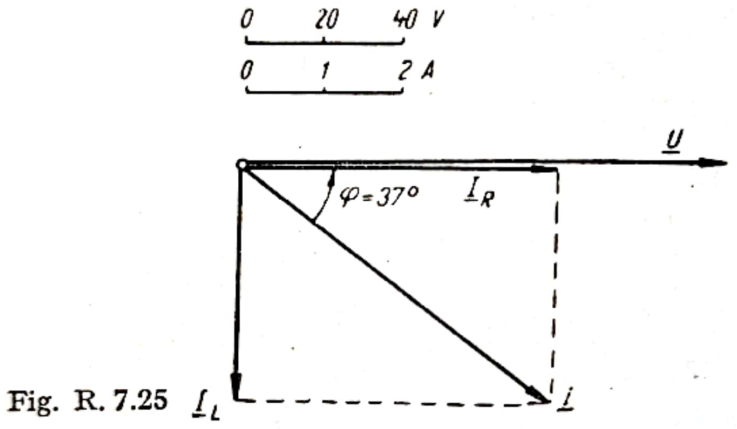


Fig. R. 7.25

b) Diagrama fazorilor este indicată în figura R.7.25.

c) Puterea complexă are expresia (7.25):

$$S=P+\mathrm{j}Q=\underline{U}\,\underline{I}^*=600\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}37^\circ}=600\,(\cos 37^\circ+\mathrm{j}\sin 37^\circ)=480+\mathrm{j}\,360,$$

de unde rezultă:

— puterea activă $P=480$ W;
— puterea reactivă $Q=360$ var;
— puterea aparentă $S=600$ VA.

d) Factorul de putere se determină simplu pe baza relației

$$\cos\varphi=\frac{P}{S}=0{,}8.$$

e) Calculul variației relative a curentului, pentru variații relative mici ale inductivității, se poate determina aproximativ diferențiind relațiile:

$$I^2=I_R^2+I_L^2 \text{ și } \ln I_2=\ln\frac{U}{\omega L}=\ln U-\ln\omega-\ln L.$$

Avînd $I_R = \frac{U}{R} =$ constant, rezultă :

$$2I\,\mathrm{d}I = 2\,I_L\,\mathrm{d}I_L \text{ și } \frac{\mathrm{d}I_L}{I_L} = -\frac{\mathrm{d}L}{L}.$$

Se obține :

$$\frac{\Delta I}{I} \simeq \frac{\mathrm{d}I}{I} = -\left(\frac{I_L}{I}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta L}{L}\right) = -1{,}8\%.$$

7.31. Se calculează expresia literală a fazorului curentului ($\underline{I}$) din impedanța $\underline{Z}$. Pentru ca $\underline{I}$ să nu depindă de $\underline{Z}$ este necesar și suficient ca factorul care în expresia lui $\underline{I}$ înmulțește fazorul $\underline{Z}$ să fie nul. Prin egalarea cu zero a acestui factor se obține relația căutată.

7.37. Se determină valoarea impedanței $\underline{Z}_s$, din condiția ca atunci cînd la ieșire se conectează impedanța $\underline{Z}_s$, impedanța la intrarea ultimului cuadripol să fie egală, de asemenea, cu $\underline{Z}_s$.

7.42. Din egalitatea puterii (active, respectiv reactive) totale cu cea a bobinei plus a condensatorului se determină C funcție de ω, U, R_L și L.

7.44. *a)* Curentul nominal al receptorului este dat de relația :

$$I_n = \frac{P_n}{U_n \cos \varphi_n} = \frac{10\,000}{220 \cdot 0{,}6} = 75{,}8 \text{ A}.$$

Impedanța, rezistența și reactanța receptorului se calculează folosind relațiile :

$$Z_n = \frac{U_n}{I_n} = 2{,}9\ \Omega; \quad R_n = Z_n \cos \varphi_n = 1{,}73; \quad X_n = Z_n \sin \varphi_n = 2{,}32\ \Omega.$$

Admitanța, conductanța și susceptanța receptorului sînt

$$Y_n = \frac{1}{Z_n} = 0{,}345 \text{ S}; \; G_n = Y_n \cos \varphi_n = 0{,}207 \text{ S};$$
$$B_n = Y_n \sin \varphi_n = 0{,}276 \text{ S}.$$

Tensiunea sursei de alimentare, corespunzătoare tensiunii nominale la bornele receptorului și deci corespunzătoare curentului nominal, este :

$$\underline{U} = (\underline{Z}_n + r + \mathrm{j}\,x)I_n \text{ sau } U = \sqrt{(R_n + r)^2 + (X_n + x)^2}\,.\,I_n = 259 \text{ V}.$$

b) La legarea unui condensator de susceptanță (capacitivă), $B_c = \omega C$ în paralel cu receptorul, se obține un receptor echivalent cu

$$G_e = G_n \text{ și } B_e = B_n - B_c.$$

Folosind relația $\operatorname{tg} \varphi_e = \frac{B_e}{G_e}$, rezultă :

$$B_c = B_n - B_e = B_n - G_n \cdot \operatorname{tg} \varphi_e = 0{,}276 - 0{,}207 \cdot 0{,}484 = 0{,}176 \text{ S}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ca urmare, capacitatea cerută este

$$C = \frac{B_c}{\omega} = 560 \ \mu\text{F}.$$

c) După introducerea capacității, curentul corespunzător tensiunii nominale este:

$$I' = Y_e \cdot U_n = \sqrt{G_e^2 + B_e^2} \cdot U_n = 50{,}6 \text{ A}.$$

d) Randamentul corespunzător este

$$\eta = \frac{R_n I_n^2}{(r + R_n) I_n^2} = \frac{R_n}{r + R_n} = \frac{1{,}73}{1{,}93} = 0{,}896,$$

respectiv

$$\eta' = \frac{R_e I'^2}{(r + R_e) I'^2} = \frac{R_e}{r + R_e} = \frac{\frac{G_e}{Y_e^2}}{r + \frac{G_e}{Y_e^2}} = \frac{3{,}91}{4{,}11} = 0{,}951.$$

REZOLVĂRI ȘI INDICAȚII LA CAPITOLUL 8

8.1. Se utilizează o metodă grafo-analitică: se construiește diagrama tensiunilor (fig. R.8.1), începînd cu triunghiul tensiunilor

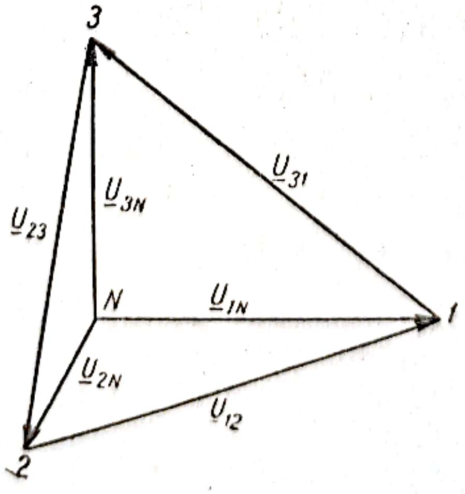


Fig. R. 8.1

de linie și apoi se determină unghiurile de defazaj cu relațiile trigonometrice de rezolvare a triunghiurilor oarecare cu laturile cunoscute.

8.8. *a)* Tensiunea de fază a receptorului este $U_f = \frac{U_l}{\sqrt{3}} = 120$ V, iar curenții de fază și de linie $\underline{I}_f = \underline{I}_l = \frac{\underline{U}_f}{\underline{Z}} = 24 \,|\!\underline{-36°50'}$ A, defazajul fiind exprimat pentru fiecare curent față de tensiunea pe faza respectivă. Considerînd $\underline{U}_1$ origine de fază, rezultă $\underline{I}_1 = 24 \,|\!\underline{-36°50'}$ A, $\underline{I}_2 = 24 \,|\!\underline{-156°50'}$ A, $\underline{I}_3 = 24 \,|\!\underline{83°10'}$ A.

b) Se obține diagrama prin particularizarea figurii B.8.7. din breviar.

c) Se calculează puterile din tabela

	Puteri primite de la rețea	Puteri în fazele receptorului
Puterea activă	$P = 3\,U_f I_f \cos\varphi = 6\,912$ W	$P = 3\,R_f I_f^2 = 6\,912$ W
Puterea reactivă	$Q = 3\,U_f I_f \sin\varphi = 5\,184$ var	$Q = 3\,X_f I_f^2 = 5\,184$ var
Puterea aparentă	$S = 3\,U_f I_f = 8\,640$ VA	$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 8\,640$ VA

d) Diagrama puterilor este reprezentată în figura R.8.8.

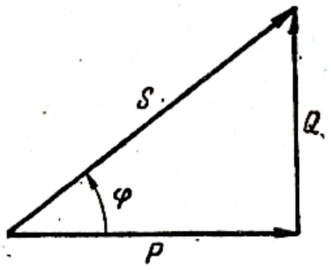


Fig. R. 8.8

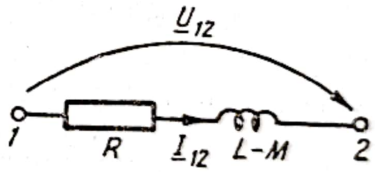


Fig. R. 8.12

8.11. Cu notațiile din figura B.8.4 din brevier rezultă $\underline{U}_{1'N} = \underline{U}_{10} - \Delta\underline{U}_l = \underline{U}_{10} - \underline{Z}_l\underline{I}_1$.

Considerînd $\underline{U}_{10}$ origine de fază, avem

$$\underline{U}_{1'N} = 120 - 2{,}24 \,|\!\underline{63°25'} \cdot 10 \,|\!\underline{-45°} = 98{,}8 \,|\!\underline{-4°10'} \text{ V}.$$

8.12. Din teorema a doua a lui Kirchhoff se obține pentru faza întîi a receptorului: $\underline{U}_{12} = (R + \mathrm{j}\,\omega L)\underline{I}_{12} + \mathrm{j}\,\omega M\underline{I}_{23} + \mathrm{j}\,\omega M\underline{I}_{31}$. Sistemul fiind simetric $\underline{I}_{23} = \mathrm{a}^2\underline{I}_{12}$ și $\underline{I}_{31} = \mathrm{a}\underline{I}_{12}$, ca urmare:

$$\underline{U}_{12} = [R + \mathrm{j}\,\omega L + \mathrm{j}\,\omega M\,(\mathrm{a} + \mathrm{a}^2)]\underline{I}_{12} = [R + \mathrm{j}\,\omega(L - M)]\,\underline{I}_{12}.$$

Rezultă schema echivalentă monofazată a circuitului din figura R. 8.12.

8.14. Curentul de linie absorbit de receptor se obține din relația (8.12 *a*): $I_l = \frac{P}{\sqrt{3}\,U_l \cos\varphi}$.

Impedanța unei faze a receptorului echivalent în stea are modulul $Z_Y = \frac{U_f}{I_f} = \frac{U_l}{\sqrt{3}\, I_l} = \frac{U_f^2 \cos\varphi}{P}$ și argumentul $\varphi = \text{arc cos } 0{,}8$.

Rezultă: $\underline{Z}_Y = \frac{U_f^2 \cos\varphi}{P} \underline{|\varphi} = 18 \underline{|36°50'}\,\Omega.$

Impedanța de fază a receptorului echivalent, conectat în triunghi este:

$$\underline{Z}_\Delta = 54 \underline{|36°50'}\,\Omega.$$

8.16. Se transfigurează ambele receptoare din triunghi în stea și se includ impedanțele liniilor $\underline{Z}_l'$ și respectiv $\underline{Z}_l''$. Receptoarele obținute fiind simetrice au punctele neutre la același potențial cu neutrul generatorului și fazele lor pot fi socotite în paralel. Se determină astfel receptorul stea echivalent.

8.18. *a*) Curentul de linie al motorului se obține cu relația (8.12 *a*).

$$I_l' = \frac{P'}{\sqrt{3} U_l \cos\varphi'} = 34{,}7\text{ A},$$

iar defazajul față de tensiunea de fază este $\varphi' = -\text{ arc cos } 0{,}8 = -36°50'$.

Curentul de fază al receptorului în triunghi este:

$$I_f'' = \frac{U_l}{Z''} = \frac{208}{|3 + j\,3|} = 49\text{ A},$$

iar curentul său de linie:

$$I_l'' = \sqrt{3}\, I_f'' = 85\text{ A}.$$

Defazajul față de tensiunea de fază a rețelei este:

$$\varphi'' = -\arg \underline{Z}'' = -45°.$$

Considerînd origine de fază tensiunea $\underline{U}_{10}$ a rețelei, rezultă:

$$\underline{I}_1' = 34{,}7 \underline{|-36°50'}\text{ A},\ \underline{I}_2' = 34{,}7 \underline{|-150°50'}\text{ A},\ \underline{I}_3' = 34{,}7 \underline{|83°10'}\text{ A}$$

$$\underline{I}_1'' = 85 \underline{|-45°}\text{ A},\ \underline{I}_2'' = 85 \underline{|-165°}\text{ A},\ \underline{I}_3'' = 85 \underline{|75°}\text{ A}.$$

b) Curentul total al primei linii este:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1' + \underline{I}_1'' = 34{,}7 \underline{|-36°50'} + 85 \underline{|-45°} \approx 27{,}75 - j\,20{,}8 + 60{,}2 - j\,60{,}2 \approx$$

$$\approx 88 - j\,81 \approx 120 \underline{|-42°40'}\text{ A}.$$

d) Bilanțul puterilor se face calculînd puterile primite și puterile disipate, ca în tabela alăturată:

	Puteri primite de la rețea	Puterile Motorul
Putere activă	$P = \sqrt{3}\, U_l I_l \cos\varphi = 31{,}8$ kW	$P' = 10$ kW
Putere reactivă	$Q = \sqrt{3}\, U_l I_l \sin\varphi = 29{,}3$ kvar	$Q' = P' \operatorname{tg}\varphi' = 7{,}5$ kvar
Putere aparentă	$S = \sqrt{3}\, UI = 43{,}2$ kVA	$S' = \sqrt{P'^2 + Q'^2} = 12{,}5$ kVA

8.19. Curenții de linie la scurtcircuitul trifazat formează un sistem trifazat simetric.

Curentul în releu:

$$\underline{I}_R = \underline{I}_1 - \underline{I}_3 = 10 - a \cdot 10 = 10\sqrt{3}\,\underline{|-30^\circ}\ \text{A}.$$

8.22. Puterea activă absorbită de receptorul trifazat este conform relației (8.11 *c*)

$$P = \mathrm{Re}[\underline{S}] = Re[\underline{V}_1\underline{I}_1^* + \underline{V}_2\underline{I}_2^* + \underline{V}_3\underline{I}_3^*].$$

Utilizînd relația (8.7 *b*) se obține:

$$\underline{I}_3^* = -(\underline{I}_1^* + \underline{I}_2^*)$$

și de aici

$$P = \mathrm{Re}[(\underline{V}_1 - \underline{V}_3)\underline{I}_1^* + (\underline{V}_2 - \underline{V}_3)\underline{I}_2^*] = \mathrm{Re}[(\underline{V}_1 - \underline{V}_3)\underline{I}_1^*] + \\ + \mathrm{Re}[(\underline{V}_2 - \underline{V}_3)\underline{I}_2^*] = \mathrm{Re}[\underline{U}_{13}\underline{I}_1^*] + \mathrm{Re}[\underline{U}_{23}\underline{I}_2^*].$$

Indicațiile wattmetrelor, pentru modul de conectare din figura 8.22, fiind:

$$P_1 = U_{13}I_1 \cos(\widehat{\underline{U}_{13}, \underline{I}_1}) = \mathrm{Re}[\underline{U}_{13}\underline{I}_1^*] \text{ și}$$

$$P_2 = U_{23}I_2 \cos(\widehat{\underline{U}_{23}, \underline{I}_2}) = \mathrm{Re}[\underline{U}_{23}\underline{I}_2^*]$$

rezultă relația din enunț:

$$P = P_1 + P_2.$$

8.23. Dacă circuitul este simetric, diagrama curenților și tensiunilor are aspectul din figura 8.5, indicațiile wattmetrului fiind:

$$P_1 = U_{13}I_1 \cos(\widehat{\underline{U}_{13}, \underline{I}_1}) = U_l I_l \cos(30^\circ - \varphi) = \\ = U_l I_l [\cos 30^\circ \cos\varphi + \sin 30^\circ \sin\varphi];$$

$$P_2 = U_{23}I_2 \cos(\widehat{\underline{U}_{23}, \underline{I}_2}) = U_l I_l \cos(30^\circ + \varphi) = \\ = U_l I_l [\cos 30^\circ \cos\varphi - \sin 30^\circ \sin\varphi].$$

De aici se obține imediat

$$\mathrm{tg}\varphi = \sqrt{3}\,\frac{P_1 + P_2}{P_1 + P_2},$$

factorul de putere rezultînd

$$\cos\varphi = \left|\frac{P_1 + P_2}{2\sqrt{P_1^2 - P_1P_2 + P_2^2}}\right|.$$

receptoarelor

Receptorul Δ	Total
$P'' = 3\,R_f\,I_f''^{\,2} = 21{,}8$ kW	$P = P' + P'' = 31{,}8$ kW
$Q'' = 3\,X_f\,I_f''^{\,2} = 21{,}8$ kvar	$Q = Q' + Q'' = 29{,}3$ kvar
$S'' = \sqrt{P''^2 + Q''^2} = 30{,}7$ kVA	$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 43{,}2$ kVA

8.24. Vezi problema 8.23.

8.30. *a*) Curenții de fază sînt conform relațiilor (8.9 *a*) :

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} = \frac{200\,|0}{10\,|0} = 20\ \text{A};\quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} = \frac{200\,|-120°}{20\,|-30°} = 10\,|-90°\ \text{A};$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}} = \frac{200\,|120°}{20\,|30°} = 10\,|90°\ \text{A}.$$

Curenții de linie rezultă din relațiile (8.9 *b*) :

$$\underline{I}_1 = 20 - \text{j}\,10 = 22{,}4\,|-26°30'\ \text{A};\quad \underline{I}_2 = -20 - \text{j}10 = 22{,}4\,|-153°30'\text{A};$$

$$\underline{I}_3 = \text{j}\,20 = 20\,|90°\ \text{A}.$$

Puterea complexă este :

$$\underline{S} = \underline{U}_{12}\underline{I}^*_{12} + \underline{U}_{23}\underline{I}^*_{23} + \underline{U}_{31}\underline{I}^*_{31} = P = 7\,460\ \text{W}.$$

Diagrama de tensiuni și curenți are aspectul din figura R. 8.30 *a*.

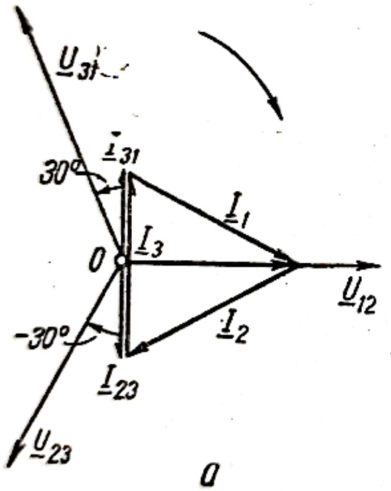


Fig. R. 8.30 *a*

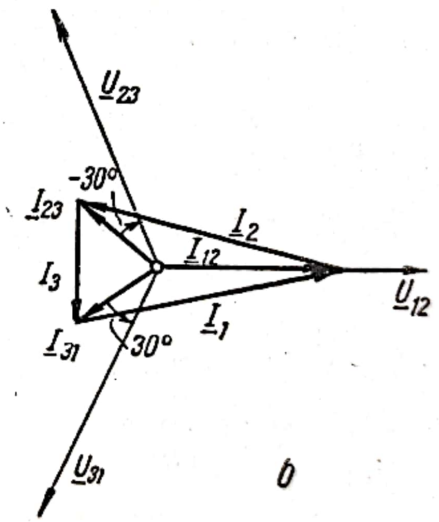


Fig. R. 8.30 *b*

b) Curenții de fază sînt, în acest caz,

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} = \frac{200\,|0}{10\,|0} = 20\text{A};\quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} = \frac{200\,|120°}{20\,|-30°} = 10\,|150°\ \text{A};$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}} = \frac{200\,|-120°}{20\,|30°} = 10\,|-150°\ \text{A}.$$

Corespunzător, curenții de linie calculați cu (8.9 *b*) sînt :

$$\underline{I}_1 = 29\,|9°54'\ \text{A};\quad \underline{I}_2 = 29\,|170°\,6'\ \text{A};\quad \underline{I}_3 = 10\,|-90°\ \text{A}.$$

Puterea complexă rămîne în acest caz constantă $\underline{S} = P = 7\,460$ W.

Diagrama vectorială a tensiunilor și curenților este reprezentată în figura R. 8.30 *b*.

8.31. *a*) Pentru circuitul stea cu fir neutru de impedanță nulă ($\underline{Z}_N = 0$) sînt valabile relațiile (8.6 k), care dau curenții de linie:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{120\,|0°}{5\,|0°} = 24\,|0°\text{ A};\quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{120\,|-120°}{5\,|-36°50} =$$

$$= 24\,|-83°10'\text{ A};\quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{120\,|120°}{5\,|36°50'} = 24\,|83°10'\text{ A}$$

și curentul de neutru $\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \simeq 29{,}7$ A.

b) Puterea aparentă complexă cedată de generator, calculată cu relația (8.11 *e*) este:

$$\underline{S} = \underline{E}_1\underline{I}_1^* + \underline{E}_2\underline{I}_2^* + \underline{E}_3\underline{I}_3^* = 7\,490\text{ W},$$

de unde

$$P = 7\,490\text{ W și } Q = 0\text{ var.}$$

c) Figura R.8.31

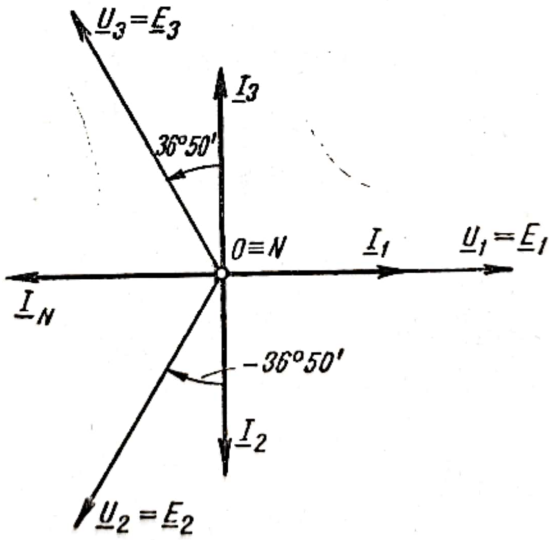


Fig. R.8.31

8.34. Notînd $G = \frac{1}{R}$ conductanța lămpilor și cu $B = \frac{1}{X_c}$ susceptanța condensatorului, deplasarea neutrului, pentru o succesiune directă a fazelor, este conform relației (8.7 *a*):

$$\underline{U}_N = \frac{\mathrm{j}BE + Ga^2E + GaE}{\mathrm{j}B + 2G} = \frac{\mathrm{j} + a^2 + a}{\mathrm{j} + 2}E = \frac{\mathrm{j} - 1}{\mathrm{j} + 2}\mathrm{E} = 0{,}63\,\mathrm{E}\,|108°\,30'.$$

În diagrama de tensiune din figura R.8.34 se vede că tensiunea U_2 la bornele becului de pe faza a doua este mai mare decît tensiunea U_3 la bornele becului de pe faza a treia, care va lumina mai slab. Aceasta coincide cu cele indicate în enunțul problemei, deci succesiunea fazelor este directă.

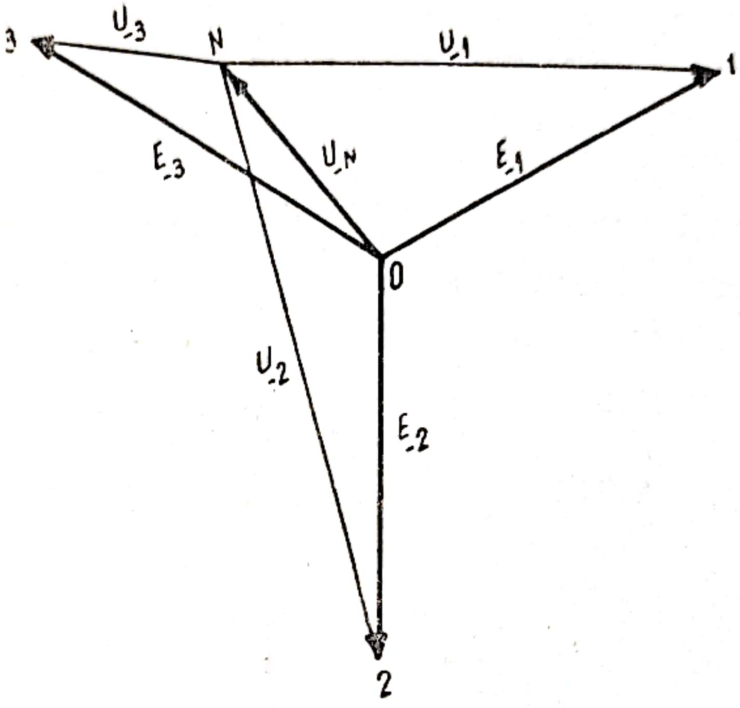


Fig. R. 8.34

8.37. *a*) Notînd $G = \frac{1}{R}$ conductanța, $B_C = \frac{1}{X_C}$ susceptanța condensatorului și $B_L = \frac{1}{X_L}$ susceptanța bobinei, deplasarea neutrului se calculează cu relația :

$$\underline{U}_N = \frac{GE + \mathrm{j}B_C a^2 E - \mathrm{j}B_L aE}{G + \mathrm{j}B_C - \mathrm{j}B_L} = (1 + \mathrm{j}a^2 - \mathrm{j}a)E = [1 + \mathrm{j}(a^2 - a)]E =$$

$$= (1 + \sqrt{3})E = 328 \text{ V}.$$

Curenții de linie, conform relației (8.6 *b*) sînt :

$$\underline{I}_1 = G(\underline{E}_1 - \underline{U}_N) = -\sqrt{3}\,GE = -20{,}8 \text{ A};$$

$$\underline{I}_2 = \mathrm{j}B_C(\underline{E}_2 - \underline{U}_N) = 3{,}35\,GE\,\underline{|-75^\circ} = 40{,}2\,\underline{|-75^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_3 = \mathrm{j}B_L(\underline{E}_3 - \underline{U}_N) = 3{,}35\,GE\,\underline{|75^\circ} \text{ A} = 40{,}2\,\underline{|75^\circ} \text{ A}.$$

Puterea aparentă complexă, calculată cu (8.11 *a*) este :

$$\underline{S} = \underline{E}_1\underline{I}_1^* + \underline{E}_2\underline{I}_2^* + \underline{E}_3\underline{I}_3^* = 3GE^2 = 4\,320 \text{ W}.$$

b) Deplasarea neutrului este :

$$\underline{U}_N = \frac{GE + jB_C aE - jB_L a^2 E}{G + jB_C - jB_L} = (1 + ja - ja^2)\,E = [1 - j\,(a^2 - a)]\,E =$$

$$= (1 - \sqrt{3})E = -87{,}5 \text{ V}.$$

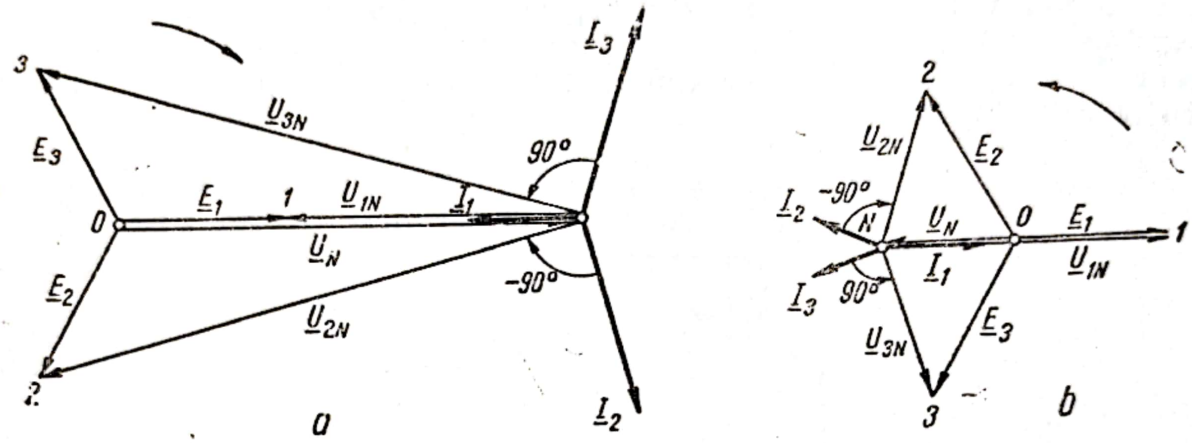


Fig. R.8.37

Curenții de linie vor fi similar :

$$\underline{I}_1 = G(\underline{E}_1 - \underline{U}_N) = \sqrt{3}GE = 20{,}8 \text{ A};$$

$$\underline{I}_2 = jB_C(\underline{E}_2 - \underline{U}_N) = 0{,}89\ GE\ \underline{|167°} = 10{,}7\ \underline{|167°} \text{ A}.$$

$$\underline{I}_3 = -j\,B_L(\underline{E}_3 - \underline{U}_N) = 0{,}89\ GE\ \underline{|-167°} = 10{,}7\ \underline{|-167°} \text{ A}.$$

Puterea complexă :

$$\underline{S} = \underline{E}_1\underline{I}_1^* + \underline{E}_2\underline{I}_2^* + \underline{E}_3\underline{I}_3^* = 3GE^2 = 4\,320 \text{ W}.$$

Diagramele vectoriale ale tensiunilor și curenților sînt reprezentate în figurile R. 8.37 *a* și *b*.

8.38. Utilizînd deplasările punctelor neutre calculate în problema 8.37 avem :

$$\underline{U}_N = (1 + \sqrt{3})E \text{ și } \underline{U}_M = (1 - \sqrt{3})E.$$

Tensiunea măsurată de voltmetru este

$$\underline{U}_{NM} = \underline{U}_N - \underline{U}_M = 2\sqrt{3}\,E = 2U_l = 416 \text{ V}.$$

8.43. Tensiunea măsurată de voltmetru este

$$U_V = \frac{1}{K_v}\left|\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3\right| = \frac{1}{K_v}\left|-3\underline{U}_N\right| = \frac{3\,U_N}{K_v} = 12 \text{ V}.$$

8.45. Se stabilesc fazele tensiunilor $\underline{U}_{23}$ și $\underline{U}_{31}$, cînd $\underline{U}_{12}$ este originea de fază, ținînd seamă că $\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0$.
Curenții fiecărei faze se calculează separat cu relațiile (8.9 *a*) iar curenții de linie rezultă din ecuațiile (8.9 *b*).

8.47. Se stabilește schema echivalentă în stea din figura R.8.47 avînd impedanțele fazelor $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_l + 1{,}5\,\underline{Z}$; $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}_l$ pentru care se calculează deplasarea neutrului N (de fapt tensiunea între bornele scurtcircuitate și neutrul generatorului). Se calculează apoi curenții de linie cu relațiile (8.6 *b*).

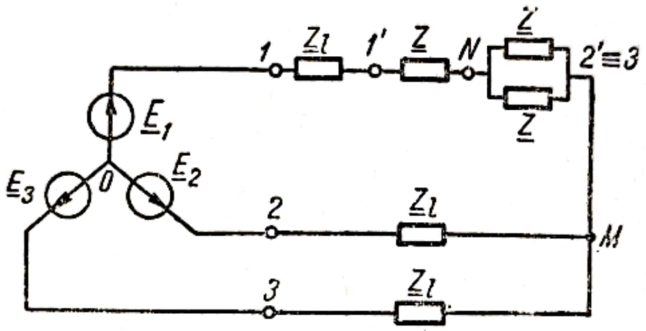


Fig. R. 8.47

8.51. Se transfigurează receptorul stea în triunghi și se pun receptoarele în paralel, fază cu fază.

REZOLVĂRI ȘI INDICAȚII LA CAPITOLUL 9

9.1. Se utilizează metoda expusă la § 9.3 din breviar.

9.6. Curentul care va trece prin bobină va fi conform celor arătate la § 9.6 din breviar :

$$i = \sum_{k=1}^{N} \frac{U_k \sqrt{2}}{k\omega L} \cdot \sin\left(k\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Reactanța echivalentă (aparentă) se definește ca raportul valorilor eficace ale tensiunii și curentului

$$X_e = \frac{U}{I} = \frac{\sqrt{\sum_k U_k^2}}{\sqrt{\sum_k I_k^2}} = \frac{\sqrt{\sum_k U_k^2}}{\sqrt{\sum_k \left(\frac{U_k}{k\omega L}\right)^2}}.$$

Pentru datele numerice valorile eficace ale armonicelor curentului sînt $I_1 = 1$ A, $I_3 = 0{,}1$ A și $I_5 = 0{,}02$ A, iar valorile eficace ale curentului și tensiunii :

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2} = 1{,}005 \text{ A și } U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2} = 105 \text{ V}.$$

Reactanța echivalentă a bobinei pentru tensiunea nesinusoidală $X_e = \frac{U}{I} \approx 104{,}5\ \Omega$ rezultă practic egală cu reactanța pentru prima armonică, datorită distorsiunilor relativ reduse.

9.7. Similar cu 9.6 rezultă $I_1 = 1$ A, $I_3 = 0{,}9$ A și $I_5 = 0{,}5$ A, de unde $I = 1{,}435$ A și $X_e = 73\ \Omega$. Valoarea este sensibil diferită de reactanța pentru prima armonică $X_1 = 100\ \Omega$, datorită distorsiunilor mari ale curentului.

9.9. Relația din enunț : $2\frac{U_1}{Z_1} = \frac{U_3}{Z_3}$ se scrie sub forma unei ecuații în ω :

$$\left(\frac{Z_1}{Z_3}\right)^2 = \frac{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}{R^2 + \left(3\omega L - \frac{I}{3\omega C}\right)^2} = 4\left(\frac{U_1}{U_3}\right)^2,$$

care rezolvată dă $\omega = 628$ rad/s și $f = 100$ Hz.

Scanned with OKEN Scanner

9.10. Conform celor expuse la § 9.6 din breviar rezultă :

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \simeq 60\ \Omega;$$

$$Z_3 = \sqrt{R^2 + \left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C}\right)^2} \simeq 10\ \Omega;$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \simeq -80°35'; \quad \varphi_3 = \operatorname{arc\,tg} \frac{3\omega L - \frac{1}{3\omega C}}{R} \simeq 0,$$

de unde :

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_1} = 0{,}5\ \text{A} \quad \text{și} \quad I_3 = \frac{U_3}{Z_3} = 1\ \text{A}$$

și $i = 0{,}5\sqrt{2}\sin(\omega t + 80°35') + \sqrt{2}\sin 3\omega t$ A

valoarea eficace a curentului fiind $I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = 1{,}12$ A

Puterea activă, calculată cu relația (9.12), este :

$$P = U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_3 I_3 \cos\varphi_3 \simeq 12{,}5\ \text{W}.$$

Puterea reactivă rezultă din relația (9.13) :

$$Q = U_1 I_1 \sin\varphi_1 + U_3 I_3 \sin\varphi_3 = -14{,}8\ \text{var}.$$

Puterea aparentă, conform definiției (9.14), este :

$$S = U\,I = 31{,}6 \cdot 1{,}12 = 35{,}4\ \text{VA}.$$

Puterea deformantă, obținută din (9.15) va fi :

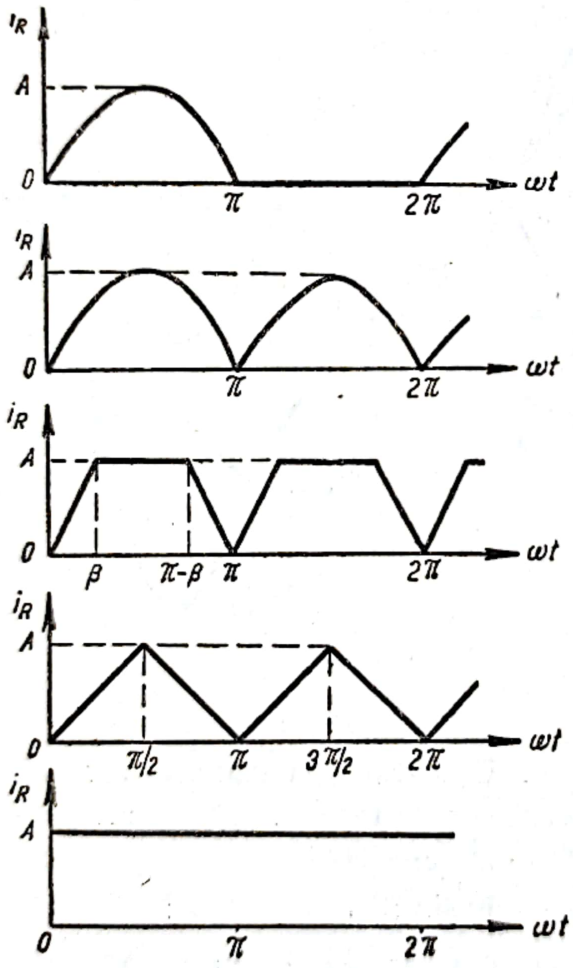
$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} \simeq 29{,}6\ \text{vad}.$$

9.15. Aparatele electromagnetice măsoară valoarea eficace a mărimilor, iar aparatele magnetoelectrice — valoarea medie. Wattmetrul indică valoarea puterii active $P = \sum_k U_k I_k \cos\varphi_k$

Scanned with OKEN Scanner

9.16. Aparatul indicator al miliampermetrului de curent alternativ cu punte de diode este străbătut de curentul de măsurat redresat pe ambele alternanțe, iar indicația sa este determinată de valoarea medie $I_{med,r}$ a acestuia.

În figura R.9.16 sînt reprezentate formele de undă ale curenților din figura 9.1 după redresarea bialternanță și sînt precizate indicațiile I' ale aparatului pentru fiecare caz.



a $I_{ef} = 0{,}500\ A$
$I' = 0{,}500\ I_{ef}$

b $I_{ef} = 0{,}707\ A$
$I' = I_{ef}$

c $I_{ef} = A\sqrt{1-\frac{4\beta}{3\pi}}$
$I' = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\pi-\beta}{\sqrt{1-\frac{4\beta}{3\pi}}} I_{ef}$

d $I_{ef} = 0{,}577\ A$
$I' = 0{,}962\ I_{ef}$

e $I_{ef} = A$
$I' = 1{,}12\ I_{ef}$

Fig. R. 9.16

9.18. Se aplică metoda indicată în § 9.5 din breviar, împărțind perioada în minimum 6 părți. Împărțind perioada în 12 părți; se găsește : $f(x) = 100 \sin x + 50 \sin 2x + 30 \sin 3x$.

În figura R. 9.18, este reprezentată grafic variația funcției nesinusoidale f(x) și a armonicilor determinate.

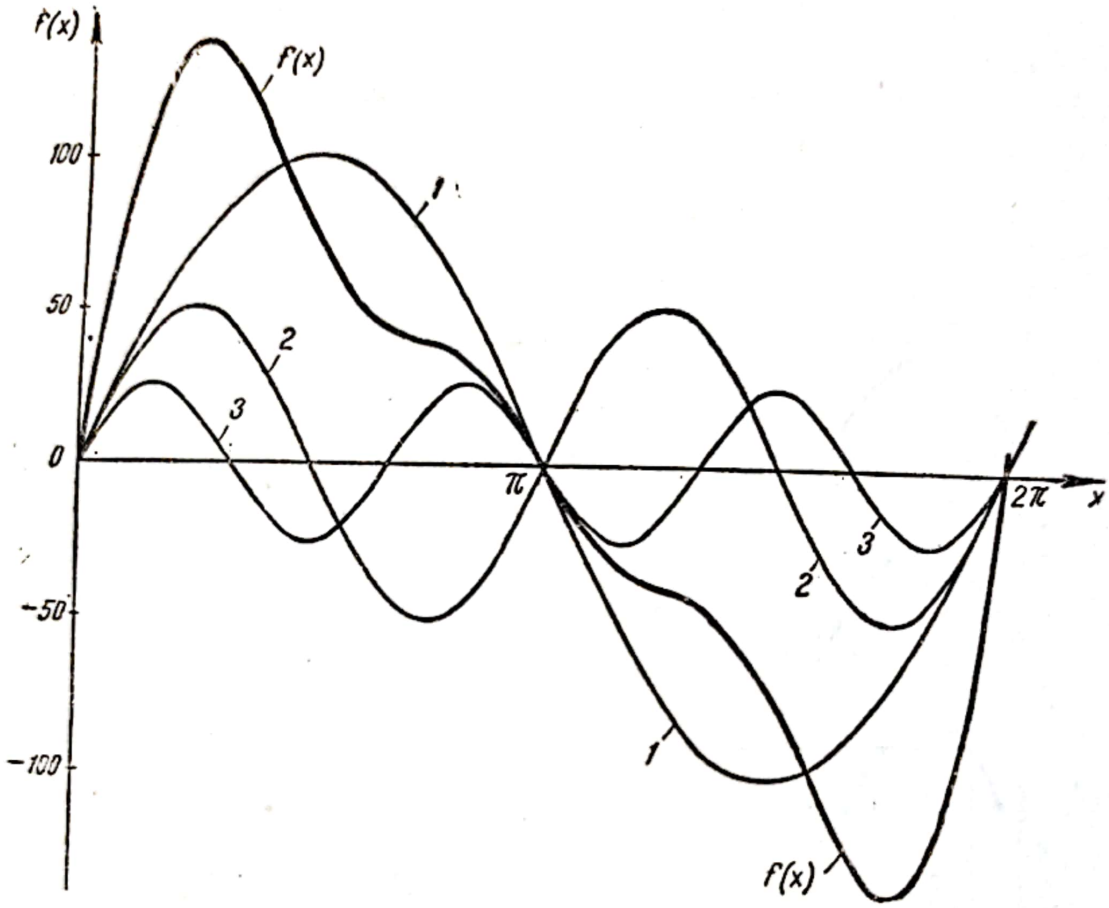


Fig. R. 9.18

9.19. *a)* Curbele sînt de tipul (9.4 *a*) din breviar pentru care $C_0 = A_{2k} = B_{2k} = 0$. Curentul și tensiunea vor avea deci numai armonici impare. Analiza curbelor de tensiune și de curent se face cu metoda expusă în § 9.5 din breviar. Se găsește :

$$u = 100 \sin \omega t + 50 \sin (3\omega t - 45°) \text{ V};$$

$$i = 7{,}1 \sin (\omega t - 45°) + 1{,}6 \sin (3\omega t - 117°) \text{ A}.$$

Variația în timp a tensiunii și curentului și a armonicilor lor este reprezentată grafic în figura R. 9.19.

d) Impedanța circuitului pentru prima armonică este

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = 14{,}1 \ \Omega.$$

Rezistența rezultă :

$$R = Z_1 \cos \varphi_1 \simeq 10\ \Omega,$$

iar reactanța

$$X_1 = Z_1 \sin \varphi_1 \simeq 10\ \Omega.$$

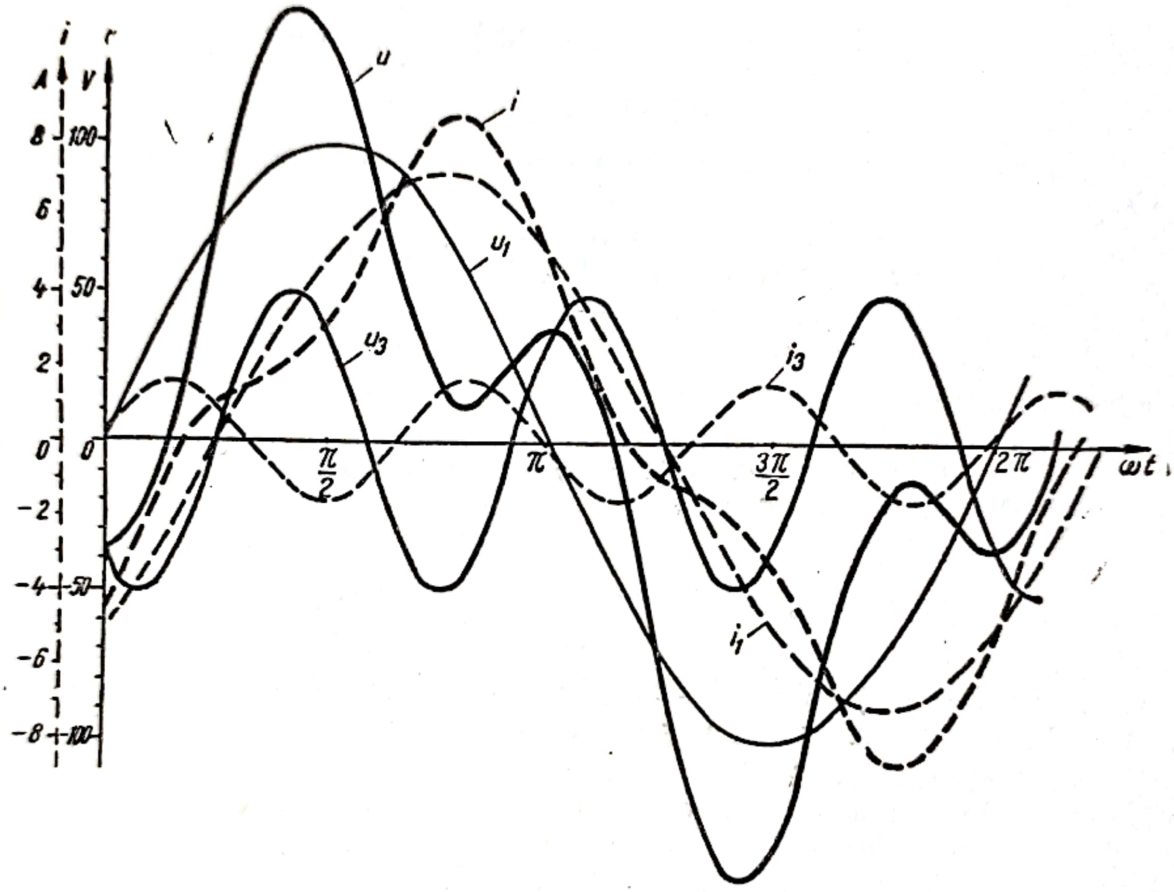


Fig. R. 9.19

Pentru armonica a treia :

$$R = Z_3 \cos \varphi_3 \simeq 10\ \Omega \quad \text{și} \quad X_3 = Z_3 \sin \varphi_3 \simeq 30\ \Omega.$$

e) Calculul puterilor se face cu relațiile de definiție (9.12) — (9.15) din breviar sau scriind:

$$P = RI^2 \text{ și } Q = X_1 I_1^2 + X_3 I_3^2.$$

9.20. *a)* Se calculează tensiunea de linie pentru fiecare armonică cu relația $u_{12} = u_1 - u_2$ și apoi se însumează sinusoidele obținute. Armonicele de rang $(3k + 1)$ din tensiunea de fază formează sisteme trifazate de succesiune directă (de aceeași succesiune cu prima armonică), astfel încît pentru acestea relația între tensiunea de linie și cea de fază este

$U_{l3k+1} = \sqrt{3}\, U_{f3k+1}\, e^{j30°}$. Armonicele de rang $(3k + 2)$ formează sisteme trifazate de succesiune inversă, și ca urmare $U_{l3k+2} = \sqrt{3} U_{f3k+2}\, e^{-j30°}$. Armonicele de rang $3k$ formează sisteme omopolare de tensiuni și de aceea $U_{l3k} = 0$. Se poate deci scrie :

$$u_{12} = 220\sqrt{3}\sqrt{2}\sin(\omega t + 30°) + 40\sqrt{3}\sqrt{2}\sin(5\omega t - 75°) + \\ + 20\sqrt{3}\sqrt{2}\sin(7\omega t + 20°)\ \text{V}.$$

b) Valorile eficace ale tensiunii de fază și de linie sînt conform relației (9.7 *b*)

$$U_f = \sqrt{U_{f_1}^2 + U_{f_3}^2 + U_{f_5}^2 + U_{f_7}^2} = 242\ \text{V și}$$

$$U_l = \sqrt{U_{l_1}^2 + U_{l_5}^2 + U_{l_7}^2} = 389\ \text{V} < U\sqrt{3}.$$

c) Pentru prima fază

$$i = \sum_k \frac{U_{fk}\sqrt{2}}{Z_k}\sin(k\omega t + \gamma_k - \varphi_k),$$

unde

$$Z_k = \sqrt{R^2 + k^2 X_1^2} \text{ și } \operatorname{tg}\varphi_k = \frac{kX_1}{R}.$$

Rezultă : $i = 22\sqrt{2}\sin(\omega t - 36°50') + 4{,}56\sqrt{2}\sin(3\omega t + 30° - 66°) + 1{,}28\sqrt{2}\sin(5\omega t - 45° - 75°5') + 0{,}48\sqrt{2}\sin(7\omega t - 10° - 78°15')$ A.

Valoarea eficace $I = 22{,}5$ A.

Curentul de neutru se datorește armonicelor 3 care formează un sistem omopolar :

$$i_N = 3 \cdot 4{,}56\sqrt{2}\sin(3\omega t + 30° - 66°)\ \text{A}.$$

d) În lipsa firului neutru curenții de linie nu pot cuprinde componente omopolare și dispare armonica a treia. Tensiunea dintre punctele neutre se datorește în acest caz componentei omopolare a tensiunilor de fază, deci armonicelor de ordinul trei :

$$u_N = 90\sqrt{2}\sin(3\omega t + 30°)\ \text{V}.$$

e) $P = 3\sum_k U_{fk} I_{fk}\cos\varphi_k = 3RI_f^2 \simeq 12\,150$ W

$$Q = \sum_k U_{f_k} I_{f_k}\sin\varphi_k = \sum_k X_k I_{f_k}^2 \simeq 10\,000\ \text{var}$$

$$S = 3\,U_f\,I_f = 16\,350\ \text{VA}; \quad D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = 4\,500\ \text{vad}$$

Scanned with OKEN Scanner

Calculul s-a făcut pentru circuitul cu fir neutru. În lipsa acestuia dispare armonica a treia.

9.21. Cînd generatorul în triunghi este în gol, prin înfășurarea sa trece un curent datorită armonicelor de ordinul trei ale tensiunilor electromotoare ale fazelor care formează un sistem omopolar.

REZOLVĂRI ȘI INDICAȚII LA CAPITOLUL 10

10.1. *a)* După închiderea întrerupătorului K_1, întrerupătorul K_2 fiind deschis, prin ambele bobine trece același curent $i(t)$ și conform celor indicate la § 10.7, se poate scrie a doua teoremă a lui Kirchhoff sub forma:

$$(R_1 + R_2)\, i + (L_1 + L_2)\, \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = E$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2}\, i = \frac{1}{L_1 + L_2}\, E.$$

După cum se știe soluția ecuației diferențiale obținute este suma dintre soluția părții omogene a ecuației, care este componenta tranzitorie sau liberă a curentului:

$$i_t = I_t\, e^{-\frac{R_1+R_2}{L_1+L_2}\, t}$$

și o soluție particulară a ecuației neomogene, care este componenta permanentă sau forțată a curentului, egală în acest caz cu:

$$i_p = \frac{E}{R_1 + R_2}.$$

Curentul în circuit va fi deci de forma:

$$i = \frac{E}{R_1 + R_2} + I_t\, e^{-\frac{R_1+R_2}{L_1+L_2}\, t}.$$

Constanta I_t se determină din condițiile inițiale. După cum s-a arătat la § 10.9, pentru un curent care trece printr-o bobină $i(0_+) = i(0_-) = 0$. De aici rezultă:

$$I_t = -\frac{E}{R_1 + R_2}$$

și

$$i = \frac{E}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_1+R_2}{L_1+L_2}t}\right) = 0{,}5\left(1 - e^{-\frac{t}{2\cdot 10^{-3}}}\right) \text{A}.$$

b) Se scriu ecuații de forma (10.7) pentru cele două ochiuri independente. Pentru primul ochi se obține:

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} = E$$

și, procedînd ca în cazul precedent, se găsește soluția:

$$i_1 = \frac{E}{R_1} + I_{t_1} e^{-\frac{R_1}{L_1}t}.$$

Condiția inițială este în acest caz $i_1(\theta_+) = i_1(\theta_-) = i(\theta)$, de unde rezultă

$$\frac{E}{R_1} + I_{t_1} e^{-\frac{R_1}{L_1}\theta} = i(\theta)$$

și

$$I_{t_1} = \left(i(\theta) - \frac{E}{R_1}\right) e^{\frac{R_1}{L_1}\theta}$$

unde

$$i(\theta) = 0{,}5\left(1 - e^{-\frac{\theta}{2\cdot 10^{-3}}}\right) = 0{,}432 \text{ A}.$$

Curentul în prima bobină, pentru $t \geqslant \theta = 4\text{ms}$, va fi deci:

$$i_1 = \frac{E}{R_1} + \left[i(\theta) - \frac{E}{R_1}\right] e^{-\frac{R_1}{L_1}(t-\theta)} = 0{,}75 - 0{,}318\, e^{-\frac{t-\theta}{10^{-3}}} \text{ A}.$$

Similar pentru al doilea ochi se poate scrie:

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = 0.$$

Rezolvînd ecuația și utilizînd condiția inițială $i_2(\theta_+) = i_2(\theta_-) = i(\theta)$ curentul din a doua bobină, pentru $t \geqslant \theta$, rezultă :

$$i_2 = i(\theta)\, e^{-\frac{R_2}{L_2}(t-\theta)} = 0{,}432\, e^{-\frac{t-\theta}{4 \cdot 10^{-3}}} \text{ A}.$$

c) Figura R.10.1

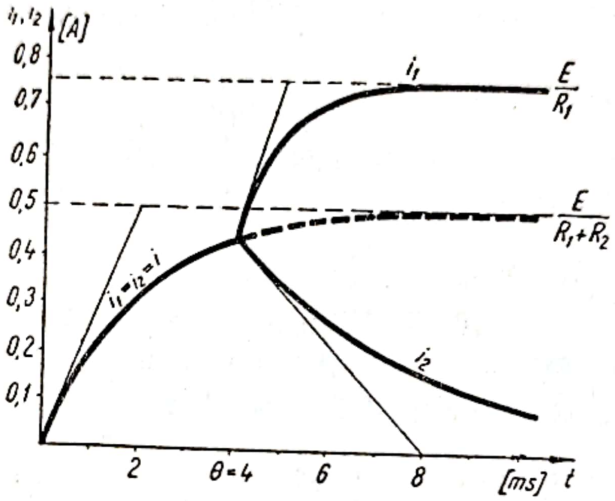


Fig. R. 10.1

10.2. În acest caz idealizat nu se aplică considerațiile de la § 10.9, deoarece în momentul deschiderii întrerupătorului K_2 nu este posibil ca curenții din bobine să-și păstreze inițial valorile. Condiția inițială este ca suma fluxurilor bobinelor pe întreg ochiul să nu varieze discontinuu, deoarece tensiunea la bornele sursei are o valoare finită. Rezultă deci :

$$L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-) = L_1 i_1(0_+) + L_2 i_2(0_+).$$

10.4. După deconectarea circuitului, conform primei teoreme a lui Kirchhoff, suma curenților prin voltmetru și prin bobină trebuie să fie nulă :

$$i_V(0_+) + i_L(0_+) = 0$$

Ținînd seamă de condiția inițială (10.9) :

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{U}{R_L}$$

rezultă :

$$i_V(0_+) = -\, i_L(0_-) = -\frac{U}{R_L}.$$

Tensiunea aplicată voltmetrului în primul monent după deconectare va fi :

$$u_V(0_+) = R_V i_V(0_+) = -\frac{R_V}{R_L} \cdot U = -\,500 \text{ V}.$$

Pentru a evita deteriorarea voltmetrului acesta trebuie scos din circuit înainte de a deconecta bobina.

10.5. Se ține seama de faptul că tangenta la curba de variație a curentului în funcție de timp intersectează axa timpului într-un punct a cărui abscisă este egală cu constanta de timp $\tau = RC$ a circuitului, iar valoarea inițială a curentului este $i(0_+) = \frac{U}{R}$.

Se poate utiliza relația :

$$\tau = \frac{t}{\ln \frac{i(0)}{i(t)}}$$

10.13. Tensiunea aplicată la borne poate fi considerată ca rezultînd prin suprapunerea a două tensiuni sinusoidale, una începînd de la $t = 0$, iar cealaltă de la $t = \frac{T}{2}$:

$$u = u_1 + u_2; \text{ unde :}$$

$$u_1 = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ U_0 \sin \omega t; & t \geqslant 0 \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} 0; & t < \frac{T}{2} \\ U_0 \sin \omega\left(t - \frac{T}{2}\right); & t \geqslant \frac{T}{2} \end{cases}$$

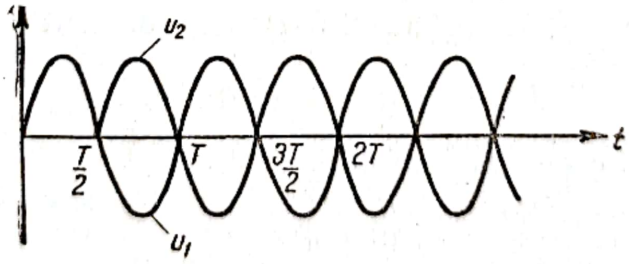


Fig. R.10.13

Se determină ca în problema 10.10, curenții i_1 și i_2 care corespund aplicării numai a uneia din tensiunile sinusoidale u_1, respectiv u_2, și conform principiului suprapunerii efectelor se găsește $i = i_1 + i_2$.

10.15. Un dipol pasiv poate fi înlocuit cu o impedanță operațională echivalentă $Z(s)$, dacă condițiile inițiale sînt nule. Scriind

ecuația lui Ohm sub formă operațională pentru cazul general al aplicării unei tensiuni orecare și pentru tensiunea în treaptă unitară se obține:

$$Z(s) \cdot I(s) = U(s),$$

$$Z(s) \cdot I_0(s) = U_0(s) = \frac{1}{s},$$

unde $U_0(s) = \frac{1}{s}$ este transformata Laplace a tensiunii treaptă unitară obținută din tabelul din anexa 7.

Rezultă transformata Laplace a curentului:

$$I(s) = sI_0(s)\,U(s).$$

Utilizînd tabelul din anexa 7 găsim legătura între funcțiile original:

$$i(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t i_0(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau = \frac{d}{dt}\int_0^t i_0(\tau)\,u\,(t-\tau)\,d\tau,$$

care permite calculul curentului $i(t)$ ce străbate dipolul cînd se aplică la borne o tensiune $u(t)$, cunoscînd curentul $i_0(t)$ care apare la aplicarea unei tensiuni treaptă unitară.

10.21. Se scriu ecuațiile lui Kirchhoff sub formă operațională și se exprimă tensiunea de la ieșire în funcție de cea de la intrare. Conform anexei 7, $U_1(s) = \frac{U_0}{s}$. Rezultă $U_2(s)$ și în tabel se găsește $u_2(t)$.

10.22. Se consideră impulsurile dreptunghiulare ca suprapunerea a două tensiuni în treaptă de amplitudini U_0 și $-U_0$ decalate cu timpul T, ca în figura R.10.22,. Tensiunea la bornele de ieșire se obține

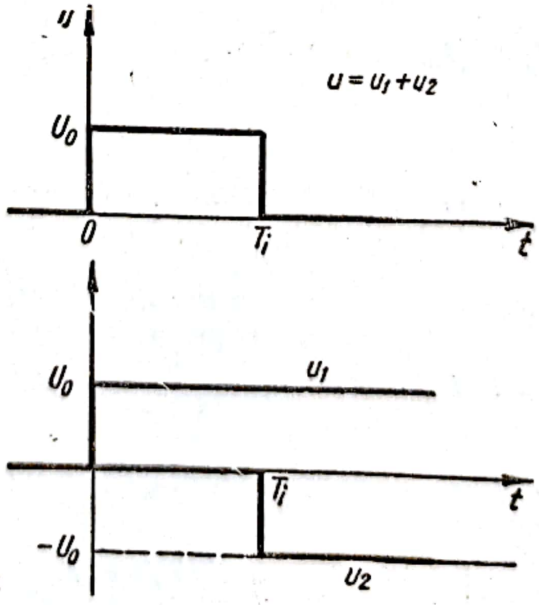


Fig. R. 10.22

conform principiului superpoziției prin însumarea soluțiilor pentru cele două tensiuni treaptă. Se utilizează rezultatele problemei precedente.

10.27. Se scriu ecuațiile lui Kirchhoff sub forma operațională și se demonstrează că $U_N(s) = 0$. De aici rezultă:

$$I_1(s) = \frac{E_1(s)}{Z(s)}; \quad I_2(s) = \frac{E_2(s)}{Z(s)} \text{ și } I_3(s) = \frac{E_3(s)}{Z(s)},$$

ceea ce permite determinarea separată a curentului fiecărei faze. Valorile curenților pe fazele 2 și 3 se pot deduce prin analogie din valoarea calculată i_1.

10.28. Se aplică teorema lui Thèvenin sub formă operațională

$$I_{AB}(s) = \frac{U_{AB_0}(s)}{Z_{AB_0}(s) + r}$$

și se arată că $U_{AB0}(s) = 0$.

10.31. După un număr suficient de mare comutații se poate considera că variația în timp a curentului după fiecare comutare este aceeași. Rezolvînd ecuațiile circuitului pentru cele două poziții se găsesc valorile curentului cînd bobina este conectată la bornele sursei (1) și cînd este conectată la bornele rezistenței de sarcină (2), de forma:

$$i_1 = I_{p_1} + (I_{0_1} - I_{p_1})\, e^{-\frac{t}{\tau_1}}; \qquad 0 \leqslant t < \frac{T}{2};$$

$$i_2 = I_{p_2} + (I_{0_2} - I_{p_2})\, e^{-\frac{t-\frac{T}{2}}{\tau_2}}; \quad \frac{T}{2} \leqslant t \leqslant T,$$

unde

$$I_{p_1} = \frac{E}{R + R_i}, \quad I_{p_2} = 0, \quad \tau_1 = \frac{L}{R + R_i} \text{ și } \tau_2 = \frac{L}{R + R_s}.$$

Dacă se notează cu T perioada de comutație, se vede că avem:

$$i_1\left(\frac{T}{2}\right) = I_{02} \text{ și } i_2(T) = I_{01}.$$

Se obține un sistem de două ecuații cu necunoscutele I_{0_1} și I_{0_2}, a cărui rezolvare permite precizarea legilor de variație a curenților $i_1(t)$ și $i_2(t)$. Se găsește astfel:

$$i_1 = \frac{E}{R+R_i}\left[1 - \frac{1-e^{-\frac{T}{2}\frac{1}{\tau_2}}}{1-e^{-\frac{T}{2}\left(\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}\right)}} e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right]; \quad 0 \leqslant t < \frac{T}{2}$$

$$i_2 = \frac{E}{R+R_i} \frac{1-e^{-\frac{T}{2}\frac{1}{\tau_1}}}{1-e^{-\frac{T}{2}\left(\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}\right)}} e^{\frac{t-\frac{T}{2}}{\tau_2}}; \quad \frac{T}{2} \leqslant t < T.$$

10.32. Datorită diodei, condensatorul rămîne încărcat după fiecare impuls.

Tensiunea la bornele condensatorului cînd la intrare se aplică al n-lea impuls de durată T și de amplitudine U este:

$$u_{C_n} = U + (u_{C_{n-1}} - U)\, e^{-\frac{T}{RC}}$$

După un număr suficient de mare de impulsuri $u_{c_n} \approx U$.

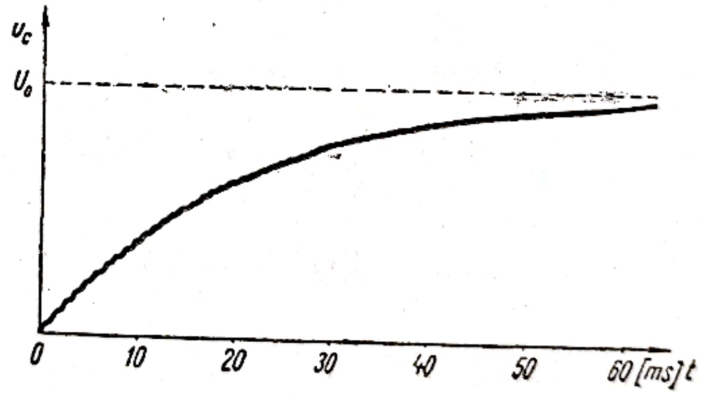


Fig. R. 10.32

Variația în timp a tensiunii condensatorului, pentru valorile numerice date, este reprezentată în figura R.10.32.

10.33. Pentru circuitul din figura 10.33 se pot scrie ecuațiile lui Kirchhoff sub formă operațională:

$$U_1(s) = RI_1(s) + U_1'(s)$$

$$U_2(s) = \frac{1}{sC} I_2(s) + U_1'(s)$$

$$I_1(s) + I_2(s) = 0$$

și ecuația amplificatorului

$$U_2(s) = -AU_1'(s).$$

De aici se obține:

$$U_2(s) = \frac{U_1(s)}{sRC\left(1+\frac{1}{A}\right)-\frac{1}{A}}.$$

Pentru $A \gg 1$, rezultă:

$$U_2(s) \simeq \frac{1}{RC}\cdot\frac{U_1(s)}{s}$$

și, cu ajutorul tabelului din anexa 7, se găsește:

$$u_2(t) \simeq \frac{1}{RC}\int_0^t u_1(t)\ dt + u_2(0).$$

Circuitul se utilizează pentru această proprietate în mașinile analogice de calcul.

REZOLVĂRI ȘI INDICAȚII LA CAPITOLUL 11

11.1. *a)* Utilizînd relațiile de definiție (11.1 *b* și 11.1 *c*) se calculează rezistența statică:

$$R_s = \frac{U_A}{I_A} = \frac{1}{A}\,U_A^{-\frac{1}{2}} = 5\ \text{k}\Omega$$

și rezistența dinamică a diodei:

$$R_d = \frac{du_A}{di_A} = \frac{2}{3A}U_A^{-\frac{1}{2}} = 3{,}3\ \text{k}\Omega.$$

b) Cu relația (11.1 d) se obține:

$$R_{ca} = \frac{U_a}{I_a} = \frac{U_a}{\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}} = \frac{U_a}{\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A^2(U_a\sqrt{2})^3 \sin^3 \omega t\ dt}} = 8{,}16\ \text{k}\Omega.$$

11.2. *a*) Neliniaritatea caracteristicii unui termistor se datorește scăderii rezistenței sale cînd temperatura termistorului crește ca urmare a măririi curentului care îl străbate. Inerția termică a dispozitivului face ca în curent alternativ, pentru o valoare eficace dată a curentului, termistorul să se comporte ca o rezistență liniară.

Forma de undă a curentului în circuitul din problema 11.2 este deci sinusoidală.

b) Ecuația în complex a circuitului din figura 11.2 *b* este :

$$\underline{U} = U_T(I) - \frac{j}{\omega C} I,$$

de unde :

$$U_T^2(I) + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 I^2 = U^2.$$

Reprezentînd grafic această ecuație în planul caracteristicii termistorului se obține o elipsă a cărei ecuație canonică este :

$$\left(\frac{U_T}{U}\right)^2 + \left(\frac{I}{\omega C U}\right)^2 = 1.$$

Pentru datele numerice ale problemei elipsa se transformă într-un cerc, iar punctul de funcționare al circuitului se determină prin intersecția acestui cerc cu caracteristica $U_T = U_T(I_T)$ a termistorului. Se găsește valoarea eficace a curentului care străbate circuitul $I_T = 27{,}2$ mA.

11.3. Pentru variații relativ mici ale tensiunii la bornele diodei în jurul valorii de curent continuu, dioda poate fi înlocuită aproximativ cu o rezistență liniară egală cu rezistența dinamică corespunzătoare tensiunii de polarizare în curent continuu. Utilizînd valoarea numerică a rezistenței dinamice a diodei, calculată în problema 11.1 pentru tensiunea de polarizare de 16 V rezultă valoarea eficace a curentului alternativ din circuit :

$$I = \frac{U}{\sqrt{R_d^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = 0{,}26 \text{ mA}.$$

11.4. Inducția maximă în fierul bobinei se calculează cu relația (11.3 *h*) :

$$B_m = \frac{U}{4{,}44 f w S} = 1{,}08 \text{ Wb/m}^2$$

Scanned with OKEN Scanner

și, corespunzător, curba de magnetizare din figura 11.4 *b* dă amplitudinea cîmpului magnetic $H_m = 225$ A/m. Amplitudinea curentului din înfășurarea bobinei rezultă din legea circuitului magnetic :

$$I_m = \frac{H_m \cdot l}{w} = 73{,}3 \text{ mA}.$$

$l = 26$ cm fiind lungimea liniei de cîmp medii în miezul feromagnetic din figura 11.4 *a*.

11.5. În prezența unui întrefier legea circuitului magnetic se scrie sub forma :

$$H_m l + H_{am}\delta = wI_m,$$

unde : $\delta = 4$ mm este lungimea întrefierului, iar $H_{am} = 1/\mu_0 \; B_m$ este amplitudinea cîmpului magnetic în aer.

11.6. Dacă tensiunea la bornele bobinei este sinusoidală și dacă se neglijează rezistența înfășurării bobinei, rezultă că fluxul și inducția sînt, de asemenea, sinusoidale. Variația în timp a cîmpului magnetic se obține grafic ca în figura R.11.6. Cîmpul magnetic fiind legat de

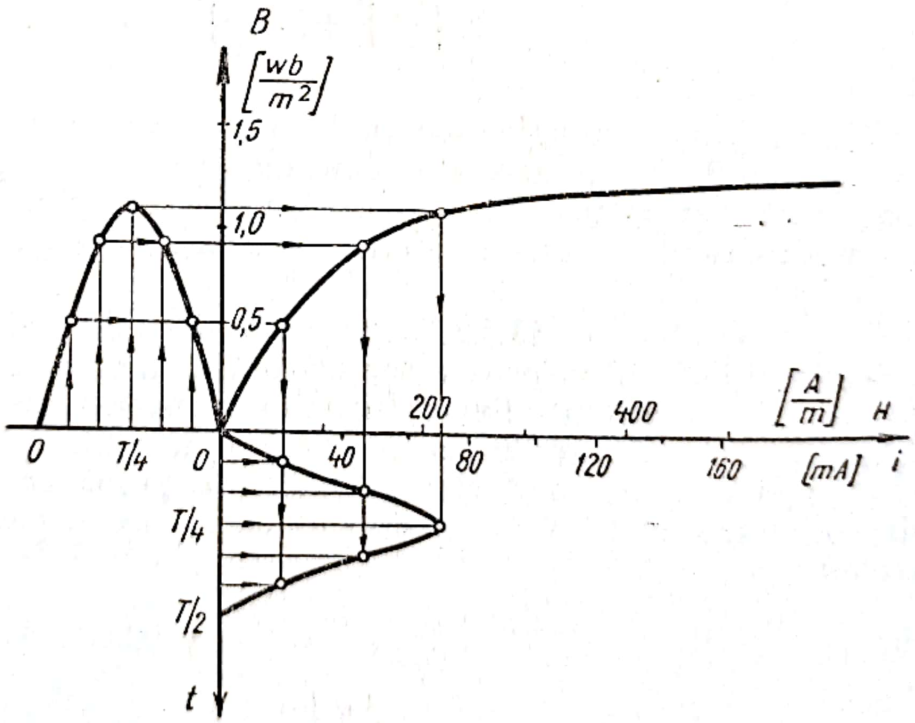


Fig. R. 11.6

curentul în înfășurarea bobinei conform legii circuitului magnetic printr-o relație liniară, curba de variație în timp a cîmpului magnetic reprezintă la o altă scară forma de undă a curentului din circuit. Inducția magnetică în funcție de tensiunea la borne și curentul funcție de cîmpul magnetic se calculează ca în problema 11.4.

11.7. Vezi figura R.11.7.

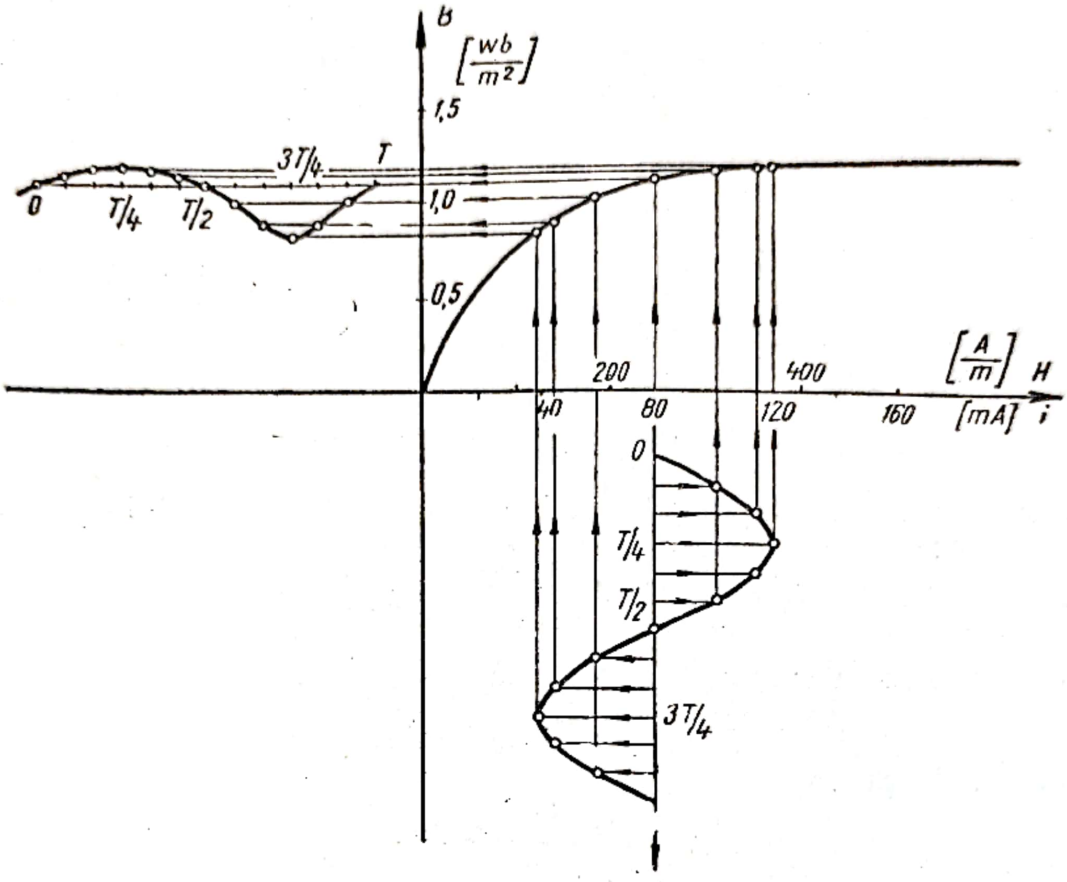


Fig. R.11.7

11.8. Se utilizează relațiile de definiție (11.3 *c*) și (11.3 *d*).

11.9. Pierderile în tole prin curenți induși se pot calcula cu relația (11.3 *k*):

$$P_F = K_F \cdot B_m^2 \cdot f^2 \cdot V,$$

unde K_F se calculează cu relația (11.3 *l*):

$$K_F = 1{,}64\ 10^{-4} \frac{\Delta^2}{\rho} = 13{,}3 \text{ unități MKSA};$$

$B_m = 1{,}08$ Wb/m² este inducția maximă în fier calculată în problema 11.4; V — volumul efectiv al tolelor egal cu produsul dintre factorul de umplere γ și volumul geometric V_g al miezului calculat cu dimensiunile din figura 11.4 *a*; $V = \gamma V_g$; $f = 50$ Hz —frecvența tensiunii de alimentare.

Numeric:

$$P_F = 13{,}3 \cdot 1{,}08^2 \cdot 50^2 \cdot 0{,}9 \cdot 162{,}5 \cdot 10^{-6} = 5{,}6 \text{ W}.$$

Scanned with OKEN Scanner

11.10. Din relația lui Steinmetz (11.3 *j*) se obține:

$$P = \eta B_m^n f V = \eta B_m^n f \gamma V_g = 150 \cdot 1{,}2^{1{,}6} \cdot 50 \cdot 0{,}91 \cdot 80 \cdot 10^{-6} = 0{,}73 \text{ W}.$$

11.12. *a*) Utilizînd relația (11.3 *h*) se poate calcula numărul de spire astfel încît tensiunii aplicate la borne să-i corespundă valoarea maximă a inducției în fier indicată:

$$w = \frac{U}{4{,}44 f S B_m} \simeq 200 \text{ spire}.$$

b) Pe caracteristica de magnetizare din figura 11.4 *b* se găsește că valorii $B_m = 1$ Wb/m² îi corespunde valoarea maximă a cîmpului magnetic $H_m = 175$ A/m. Valoarea eficace a curentului de magnetizare rezultă din legea circuitului magnetic:

$$I_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{H_m l}{w} = 0{,}495 \text{ A} \simeq 0{,}5 \text{ A}$$

Valoarea eficace a componentei active a curentului rezultă din pierderile totale în fier:

$$I_a = \frac{P}{U} = \frac{1{,}5 \text{W/kg} \cdot 12{,}6 \text{kg}}{220 \text{ V}} = 0{,}086 \text{ A}.$$

Valoarea eficace a curentului total al bobinei este:

$$I = \sqrt{I_\mu^2 + I_a^2} = 0{,}51 \text{ A},$$

iar factorul de putere

$$\cos \varphi = \frac{I_a}{I} = 0{,}174.$$

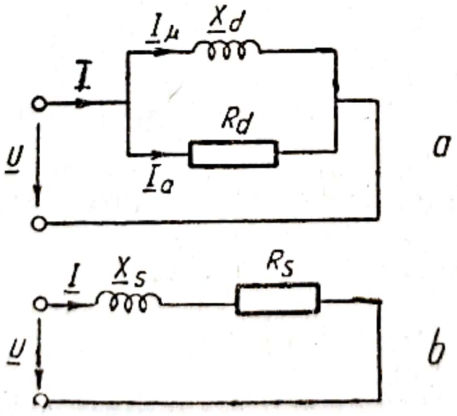


Fig. R.11.12

c) Elementele schemei echivalente derivație (fig. R 11.12 *a*) rezultă:

$$X_d = \frac{U}{I_\mu} = 440 \ \Omega;$$

$$R_d = \frac{U}{I_a} = 2\,560 \ \Omega$$

iar ale schemei serie (fig. R. 11.12 *b*):

$$X_s = Z \sin \varphi = \frac{U}{I} \sin \varphi \simeq 420\ \Omega;$$

$$R_s = Z \cos \varphi = \frac{U}{I} \cos \varphi \simeq 75\ \Omega.$$

11.13. Reactanța bobinei este maximă cînd inductivitatea dinamică a acesteia este maximă:

$$L_d = \frac{w^2}{Re_d} = \frac{w^2}{Re_{d_f} + Re_{d_a}} = \frac{w^2}{\frac{1}{\mu_d}\frac{l}{S} + \frac{1}{\mu_0}\frac{\delta}{S}} = \frac{w^2 S}{l} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\mu_d} + \frac{1}{\mu_0}\frac{\delta}{l}}$$

unde : Re_d este reluctanța dinamică totală a circuitului magnetic; Re_{d_f} — reluctanța dinamică a porțiunii cu fier a circuitului magnetic; $Re_{d_a} = Re_a$ — reluctanța întrefierului; $\mu_d = \frac{dB}{dH}$ — permeabilitatea magnetică dinamică a materialului care depinde de valoarea componentei continue B_f a inducției în fier.

Vom căuta minimul expresiei de la numitor $\left(\frac{1}{\mu_d} + \frac{1}{\mu_0}\frac{\delta}{l}\right)$. Pentru aceasta se stabilește dependența între componenta continuă a inducției în fier B_f

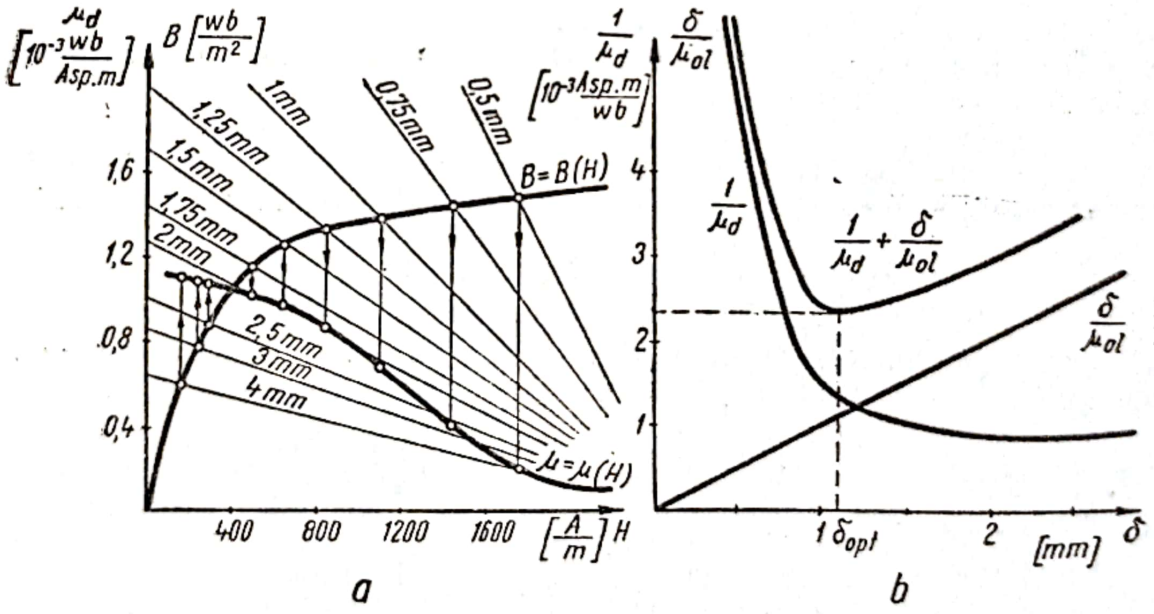


Fig. R.11.13,

și lungimea l a întrefierului. Din legea circuitului magnetic rezultă $lH_f + \delta H_a = wI_0$, iar din legea fluxului magnetic $B_f = B_a$. Utilizînd și relația între inducția și cîmpul magnetic din aer $B_a = \mu_0 H_a$, rezultă o relație între

inducția și cîmpul magnetic din fier : $B_f = \frac{\mu_0}{\delta}(wI_0 - lH_f)$, care împreună cu caracteristica de magnetizare $B_f = B_f(H_f)$ permite determinarea grafică a componentei continue a cîmpului în fier pentru diferite valori ale întrefierului δ și, corespunzător, a valorilor permeabilității dinamice (v. fig. R. 11.13 *a*). Acum se poate construi curba $\frac{1}{\mu_d} + \frac{\delta}{\mu_0 l}$ funcție de δ prin sumarea curbelor $\frac{1}{\mu_d}$ și $\frac{\delta}{\mu_0 l}$ funcție de întrefierul δ ca în figura R.11.13 *b*. Minimul curbei indică valoarea optimă a întrefierului $\delta = 1{,}1$ mm pentru care inductivitatea maximă este $L_d = 0{,}425$ H.

11.16. Se utilizează relația de definiție a inductivității incrementale (11.3 *d*) sub forma :

$$L_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta i} = \frac{S\Delta B}{\Delta i} = S\frac{B_A - B'_A}{H_A - H'_A}\frac{w}{l}.$$

11.17. Cîmpul magnetic corespunzător amplitudinii curentului depășește valoarea de saturație, astfel încît la fiecare perioadă este descris întregul ciclu histerezis din figura 11.14, energia pierdută astfel fiind egală cu aria ciclului (v. relația 11.3 *i*)

11.18. Corespunzător valorilor indicate ale cîmpului magnetic se găsesc pe caracteristica de magnetizare din figura 11.4 valorile inducției, care trebuie să verifice relația din enunț. Se obțin astfel trei ecuații cu necunoscutele a_1, a_3, și a_5.

11.20. Fluxul fascicular ce trece prin coloana *1* a transformatorului este legat de tensiunea sinusoidală la borne prin relația :

$$w_1\frac{d\varphi_1}{dt} = u_1 = U_1\sqrt{2}\sin\omega t.$$

În regim permanent, considerînd componenta continuă nulă (nu există premagnetizare) rezultă :

$$\varphi_1(t) = \Phi_{1m}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

unde

$$\Phi_{1m} = \frac{U_1}{4{,}44fw_1} = \frac{220}{4{,}44 \cdot 50 \cdot 100} = 1{,}24 \cdot 10^{-3}\ \text{Wb}$$

Cît timp coloana *2* este nesaturată, practic tot fluxul trece prin aceasta :

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t) = \Phi_{1m}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ pentru } |\varphi_2(t)| \leqslant \Phi_{2s} = S_2 B_s$$

Scanned with OKEN Scanner

Tensiunea electromotoare indusă în înfășurarea secundară 2 va fi în această perioadă de timp de formă sinusoidală (v. fig. R.11.20) și amplitudinea ei va fi :

$$E_{2m} = \frac{w_2}{w_1} U_1 \sqrt{2} = 620 \text{ V}$$

Cînd fluxul φ_2 a atins valoarea Φ_{2_s} coloana a doua se saturează și fluxul în bobina secundară rămîne constant, tensiunea electromotoare indusă fiind nulă (pentru caracteristica de magnetizare aproximată din fig. 11.20 b). Diferența fluxului trece prin coloana a treia $\varphi_3 = \varphi_1 - \Phi_{2_s}$.

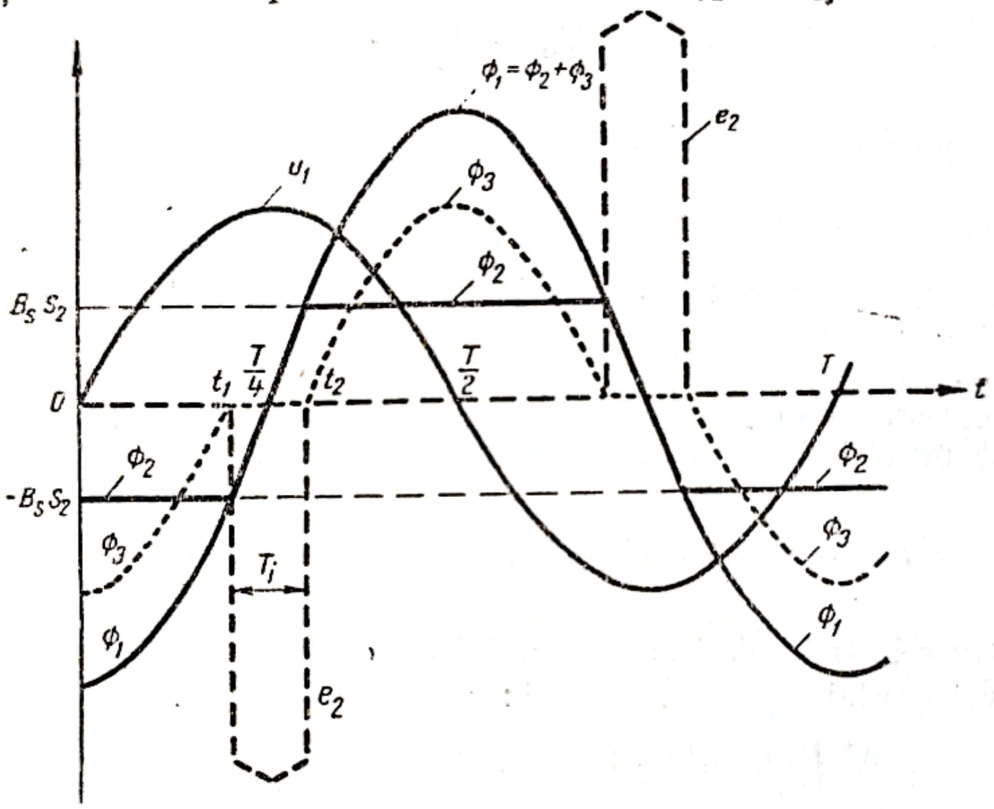


Fig. R.11.20

Durata T_i a impulsului de tensiune indusă în bobina secundară este egală cu timpul cît fluxul total trece de la $-B_sS_2$ la $+B_sS_2$.

Cu notațiile din figura 11.20 se poate scrie:

$$T_i = t_2 - t_1 = 2\left(\frac{T}{4} - t_1\right) = 2\left(\frac{1}{4f} - t_1\right)$$

unde t_1 rezultă din relația:

$$\Phi_{1m} \sin\left(\omega t_1 - \frac{\pi}{2}\right) = -B_sS_2 \quad \text{sau} \quad t_1 = \frac{1}{\omega} \text{arc cos} \frac{B_sS_2}{\Phi_{1m}}.$$

Durata impulsului rezultă $T_i \simeq 2{,}3$ ms.

11.21. Componenta continuă a cîmpului magnetic din miezul de fier rezultă din legea circuitului magnetic

$$H_0 = \frac{w_1 I_1}{l},$$

iar amplitudinea componentei alternative a cîmpului magnetic se obține similar

$$H_m = \frac{w_2 I_2 \sqrt{2}}{l}.$$

Corespunzător amplitudinea componentei alternative a inducției magnetice va fi :

$$B_m = \mu_d (H_0) \cdot H_m = \mu_d(H_0) \frac{w_2 I_2 \sqrt{2}}{l},$$

unde μ_d este permeabilitatea magnetică dinamică funcție de componenta continuă a cîmpului. Valoarea eficace a tensiunii electromotoare induse în înfășurarea de ieșire se obține cu relația (11.3 *h*) :

$$E_3 = 4{,}44\, f\, w_s S B_m = 6{,}25\, \mu_d(H_0) \cdot w_2 w_3 f \frac{S}{l} I_2 \simeq 2 \cdot 10^3\, \mu_d(H_0).$$

Pentru cele trei valori ale curentului de comandă I_1 se găsesc corespunzător valorile lui H_0 și μ_d. Rezultă :

a) $E_3 = 2{,}16$ V; *b)* $E_3 = 1{,}2$ V; *c)* $E_3 = 0{,}3$ V.

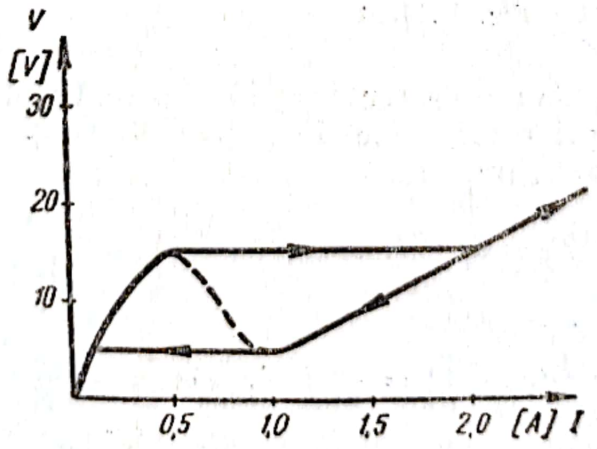


Fig. R.11.22

11.22. Se observă că la $U = 15$ V apare un punct de discontinuitate, curentul crește brusc de la 0,5 la 2 A. Revenirea se face cînd tensiunea devine mai mică decît 5 V, curentul scade brusc de la 1 la 0,1 A (v. fig. R. 11.22).

REZOLVĂRI ȘI INDICAȚII LA CAPITOLUL 12

12.1. *a*) Calculul puterii se face cu relația $P = UI$ și conform relației (12.10 *f*) eroarea relativă a determinării va fi $\varepsilon_P = \varepsilon_U + \varepsilon_I$. De aici rezultă eroarea relativă admisibilă la măsurarea curentului:

$$\varepsilon_I = \varepsilon_P - \varepsilon_U = 1{,}5 - 0{,}6 = 0{,}9\%$$

și respectiv eroarea absolută admisibilă, conform (12.3):

$$\Delta I = \varepsilon_I \cdot I = 0{,}9\% \cdot 6 = 0{,}054 \text{ A}$$

b) Eroarea relativă nominală se calculează cu relația (12.4)

$$\varepsilon_{I_N} = \frac{\Delta I}{I_N} 100\% = 0{,}54\%.$$

Ampermetrul se va alege deci de clasă 0,5, ceva mai bună decît eroarea admisibilă.

12.2. Puterea se calculează cu relația $P = RI^2$ și eroarea relativă a rezultatului va fi după (12·10 *f*) $\varepsilon_P = \varepsilon_R + 2\,\varepsilon_I$, de unde:

$$\varepsilon_I = \frac{1}{2}(\varepsilon_P - \varepsilon_R) = \frac{1}{2}(1\% - 0{,}2\%) = 0{,}4\%.$$

Scanned with OKEN Scanner

12.5 Rezistența șuntului necesar pentru fiecare domeniu de măsură se calculează cu relația (12.13):

$$R_{S_1} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = \frac{R_A}{n_{A_1} - 1};$$

$$R_{S_2} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = \frac{R_A + R_5}{n_{A_2} - 1};$$

.....

$$R_{S_5} = R_1 = \frac{R_A + R_2 + R_3 + R_4 + R_5}{n_{A_5} - 1},$$

unde n_{A_k} ($k = 1, 2, \ldots, 5$) este factorul de multiplicare a șuntului utilizat pentru domeniul de măsură k.

Cunoscînd R_A și n_{A_k} se calculează, pe rînd, prin scăderea ecuațiilor succesive una din alta, rezistențele $R_5 = 1{,}777\,\Omega$; $R_4 = 0{,}223\,\Omega$; $R_3 = 0{,}177\,\Omega$; $R_2 = 0{,}022\,\Omega$ și $R_1 = 0{,}022\,\Omega$.

12.7. Datorită montării defectuoase, rezistența efectivă a șuntului se va compune din rezistența șuntului propriu-zis, calculată cu relația (12,13), la care se va adăuga rezistența firului de legătură. Ca urmare, aparatul indicator va avea aceeași indicație, pentru o valoare mai mare a curentului măsurat, eroarea rezultată fiind de 16%.

12.12 *a*) Aparatul fiind de clasă de precizie 1, eroarea absolută maxim admisibilă va fi:

$$\Delta U = \varepsilon_N \cdot U_{max} = 1\% \cdot 300\ \text{V} = 3\ \text{V}$$

și eroarea relativă a citirii:

$$\varepsilon'_U = \frac{\Delta U}{U} 100\% = \frac{U_{max}}{U} \cdot \varepsilon_N = 3\%$$

b) Conectarea voltmetrului în paralel cu R_1 face ca rezistența echivalentă între bornele B și C să scadă și deci să se modifice divizarea tensiunii pe rezistențele R_1 și R_2. Modificarea rezultată este $\varepsilon''_U = 1{,}6\%$.

c) Eroarea totală maximă este suma erorilor:

$$\varepsilon_U = \varepsilon'_U + \varepsilon''_U = 4{,}6\% \simeq 5\%.$$

12.13. Rezistențele adiționale se calculează astfel ca pentru fiecare domeniu de măsură la tensiunea maximă să treacă prin aparatul indicator curentul nominal de 1 mA.

Scanned with OKEN Scanner

12.14. *a*) Curentul măsurat de aparatul indicator este componenta continuă a curentului redresat de puntea cu diode:

$$I_A = \frac{1}{T}\int_0^T i_A \, dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} I\sqrt{2}\sin \omega t = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} I.$$

Valoarea eficace a tensiunii alternative aplicată la bornele punții va fi:

$$U = R_A \cdot I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} R_A \cdot I_A = 167 \text{ mV}.$$

b) Rezistențele adiționale se conectează în serie cu aparatul indicator, căci astfel diodelor li se aplică tensiuni mai mari și aproximația care se face considerînd diodele redresoare perfecte este mai mică.

12.16. *a*) Constanta wattmetrului se calculează cu relația (12.15):

$$C_W = \frac{U_N I_N}{\alpha_N} = \frac{150 \text{ V} \cdot 5 \text{ A}}{150 \text{ div}} = 5 \text{ W/div}$$

b) $P = C_W \cdot \alpha = 5 \text{ W/div} \cdot 80 \text{ div} = 400 \text{ W}.$

c) Eroarea absolută este determinată de clasa de precizie și de lărgimea domeniului de măsură, conform relației (12.4):

$$\Delta P = \varepsilon_N \cdot P_{max} = \varepsilon_N \cdot U_N \cdot I_N = 0{,}5\% \cdot 750 \text{ W} = 3{,}25 \text{ W}.$$

Eroarea relativă, calculată cu relația (12.3), este:

$$\varepsilon_P = \frac{\Delta P}{P} = \frac{P_{max}}{P}\varepsilon_N \simeq 0{,}8\%.$$

12.19. *a*) Utilizînd relația (12.16 *c*):

$P_2 = U_l I_l \cos(30° + \varphi) = 0$, rezultă $\varphi = 60°$ și $\cos\varphi = 0{,}5$.

b) Tensiunea de fază a receptorului fiind $U_f = \frac{U_l}{\sqrt{3}} = 120$ V, curentul de linie va fi $I_l = I_f = \frac{U_f}{Z} = 12$ A și indicația primului wattmetru trebuie să fie:

$$P_1 = 208 \cdot 12 \cos(30° - 60°) = 2\,160 \text{ W}.$$

12.20. Se vor utiliza relațiile de la paragraful 12.17 din breviar.

12.22. Eroarea relativă la măsurarea curentului este suma erorii datorită transformatorului și a erorii de citire a ampermetrului:

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{I_K} + \varepsilon_{I_A} = \varepsilon_{I_K} + \frac{I_{max}}{I}\varepsilon_{A_N} = 1\% + \frac{5 \text{ A}}{4 \text{ A}} \cdot 0{,}5\% \simeq 1{,}6\%.$$

Scanned with OKEN Scanner

Similar, eroarea relativă la măsurarea tensiunii este:

$$\varepsilon_U = \varepsilon_{U_K} + \varepsilon_{U_V} = \varepsilon_{U_K} + \frac{U_{max}}{U}\varepsilon_{V_N} = 0{,}5\% + \frac{100\text{ V}}{85\text{ V}} \cdot 1\% \simeq 1{,}7\%.$$

Eroarea la determinarea puterii se calculează cu relația (12.18 *f*) la care se adaugă eroarea de citire a wattmetrului:

$$\varepsilon_{P_{max}} = \varepsilon_{I_K} + \varepsilon_{U_K} + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}(\psi_U - \psi_I) + \varepsilon_{P_W};$$

$$\varepsilon_{P_{max}} \simeq 1\% + 0{,}5\% + 0{,}77 \cdot 0{,}017 + \frac{500\text{ W}}{270\text{ W}} \cdot 0{,}5\% \simeq 3{,}7\%.$$

12.25. *a* și *b*) Cînd întrerupătorul este pe poziția 1 se poate scrie ecuația:

$$U_1 = (R_A + R)\, I_1,$$

iar cînd este pe poziția 2 ecuația:

$$U_2 = \frac{R\, R_V}{R + R_V} I_2.$$

De asemenea, considerînd rezistența sursei de alimentare neglijabilă, avem:

$$U_1 = U_2 + R_A\, I_2.$$

Rezolvînd sistemul se găsesc necunoscutele R, R_A și R_V.

12.28.*c*) Din relația (12.20 *b*) rezultă tensiunea aplicată galvanometrului la o variație ΔR_4 a rezistenței R_4 de la valoarea de echilibru a punții:

$$e = S \cdot E = F \cdot \sigma \cdot E = F \cdot \frac{\Delta R_4}{R_4} \cdot E.$$

Deviația minimă decelabilă a galvanometrului fiind practic de o diviziune, rezultă curentul minim prin galvanometru:

$$i_g = \alpha\, C_g = C_g = \frac{e}{R_g},$$

de unde variația minimă sesizabilă a rezistenței R_4 va fi:

$$\Delta R_4 = \frac{R_g\, C_g}{FE} R_4 = 0{,}001\ \Omega.$$

12.29. *a*) Valoarea de echilibru a rezistenței R_4 este:

$$R_{40} = \frac{R_1\, R_3}{R_2} = 306\ \Omega.$$

Scanned with OKEN Scanner

Factorul de dereglaj rezultă:

$$\sigma = \frac{\Delta R_4}{R_{40}} = \frac{6}{306} \simeq 0{,}0196.$$

12.34. Condiția de echilibru a punții Sauty se scrie în complex sub forma (12.21 *a*) înlocuind impedanțele brațelor cu expresiile lor:

$$R_1\left(R_x - \frac{j}{\omega C_x}\right) = R_2\left(R_S - \frac{j}{\omega C_S}\right).$$

Separînd partea reală și cea imaginară rezultă condițiile de echilibru:

$$C_x = \frac{R_1}{R_2} C_S;$$

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_S.$$

12.37. Tensiunea termoelectrică a termocuplului funcție de temperatură este dată în figura 12.36, dependența fiind de forma relației (12.22 *a*):

$$E = E(t).$$

Curentul prin aparatul de măsură se datorește variațiilor tensiunii termoelectrice față de valoarea la temperatura t_0 pentru care a fost echilibrat montajul

$$I_A = \frac{\Delta E}{R_t} = \frac{E(t) - E(t_0)}{R_t} \approx \frac{1}{R_t} \cdot \frac{dE}{dt}(t_0) \cdot \Delta t.$$

Derivația acului indicator este conform relației (12.11),

$$\alpha = S_A \cdot I_A,$$

iar constanta sistemului rezultă:

$$C_t = \frac{\Delta t}{\alpha} = \frac{1}{S_A} \cdot \frac{R_t}{\frac{dE}{dt}(t_0)} \simeq 15°\text{C/div}.$$

12.38. Indicația galvanometrului la o variație a rezistenței R a tensometrului este:

$$\alpha = S_g \cdot e = S_g \cdot S \cdot E = S_g \cdot F \cdot \sigma \cdot E = S_g \cdot F \cdot E \cdot \frac{\Delta R}{R}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Variația relativă a rezistenței tensometrului la o alungire relativă $\frac{\Delta l}{l}$ a acestuia este :

$$\frac{\Delta R}{R} = S_r \frac{\Delta l}{l},$$

de unde :

$$\alpha = S_s \cdot S_r \cdot F \cdot E \frac{\Delta l}{l} = 10^4 \cdot 2 \cdot 0{,}2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 40 \text{ diviziuni.}$$

Constanta sistemului de măsură :

$$C = \frac{\Delta l / l}{\alpha} = \frac{0{,}5\%}{40 \text{ div}} = 0{,}125\%/\text{div.}$$

REZOLVĂRI ȘI INDICAȚII LA CAPITOLUL 13

13.1 (R) *a*) Cu notațiile din figura B.13.3 găsim :

$$R = R_1 + R_2' = \frac{P_{1sc}}{I_{1sc}^2} = \frac{P_{1sc} \cdot U_1^2}{S_n^2} = \frac{150 \cdot 10^3 \cdot (110 \cdot 10^3)^2}{(20 \cdot 10^6)^2} = 4{,}54 \ \Omega,$$

căci

$$I_{1sc} = I_{1n} = \frac{S_n}{U_1}.$$

Se ia :

$$R_1 \simeq R_2' = 2{,}27.$$

$$Z = \frac{U_{1sc}}{I_{1n}} = \frac{u_{1sc}}{100} \cdot \frac{U_1^2}{S_n} = \frac{10}{100} \cdot \frac{(110 \cdot 10^3)^2}{20 \cdot 10^6} = 60{,}5 \ \Omega;$$

$$X = X_1 + X_2' = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{60{,}5^2 - 4{,}54^2} = 60{,}36 \ \Omega;$$

$$X_1 = X_2' = 30{,}18.$$

Scanned with OKEN Scanner

S-a neglijat existența elementelor transversale, lucru posibil datorită valorilor lor foarte mari, care se determină cu ajutorul caracteristicilor de la mersul în gol:

$$R_{10} = \frac{U_1^2}{P_{10}} = \frac{(110 \cdot 10^3)^2}{60 \cdot 10^3} = 2{,}01 \cdot 10^5\ \Omega;$$

$$X_{10} = \frac{U_1}{\sqrt{I_{10}^2 - \left(\frac{P_{10}}{U_1}\right)^2}} = \frac{U_1}{\sqrt{\left(\frac{I_{10}}{100} \cdot \frac{S_n}{U_1}\right)^2 - \left(\frac{P_{10}}{U_1}\right)^2}};$$

$$X_{10} = \frac{110 \cdot 10^3}{\sqrt{\left(\frac{4}{100} \cdot \frac{20 \cdot 10^6}{110 \cdot 10^3}\right)^2 - \left(\frac{60 \cdot 10^3}{110 \cdot 10^3}\right)^2}} = \frac{110 \cdot 10^3}{\sqrt{7{,}28^2 - 0{,}36^2}} = 1{,}52 \cdot 10^4\ \Omega.$$

Se putea folosi de la început, cu suficientă exactitate, relația:

$$X_{10} = \frac{100}{I_{10}} \cdot \frac{U_1^2}{S_n}.$$

Mărimile pentru secundar neraportate:

$$R_2 = \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 \cdot R_2' = \left(\frac{6}{160}\right)^2 \cdot 2{,}27 = 0{,}00675\ \Omega;$$

$$X_2 = \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 \cdot X_2' = \left(\frac{6}{110}\right)^2 \cdot 30{,}18 = 0{,}09\ \Omega.$$

b) $U_2 = 6$ kV.

$$I_2 = \frac{S_n}{U_2} = \frac{20 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^3} = \frac{20 \cdot 10^3}{6} = 3\,333\ \text{A}.$$

Utilizînd schema echivalentă cu mărimi raportate la secundar:

$$R_1' = R_2 = 0{,}00295\ \Omega;$$

$$X_1' = X_2 = 0{,}00392\ \Omega.$$

$$\underline{Z} = R + \text{j}\, X = 0{,}0059 + \text{j}\, 0{,}00784\ \Omega;$$

$$U_2 = 6\,000\ \text{V};$$

$$I_2 = \frac{20 \cdot 10^3}{6} = 3\,333\ \text{A}.$$

$$\underline{U_1'} = \underline{U_2} + \underline{Z}\,\underline{I_2} = 6\,000 + (0{,}0059 + \text{j}\, 0{,}00784)\, 3\,333 = 6\,018{,}5 + \text{j}\, 23{,}8\ \text{V}.$$

$$\underline{U_1} = \underline{U_1'} \cdot \frac{U_1}{U_2} = (6\,018{,}5 + \text{j}\, 23{,}8)\, \frac{110}{6} = 110\,339 + \text{j}\, 437\ \text{V}.$$

Scanned with OKEN Scanner

13.5 (R) *a*) $P_2 = P_{2n} = 1\,000$ kW.

Deci :

$$\eta_n = \frac{P_2}{P_2 + P_{10} + P_{1sc}\left(\frac{P_2}{P_{2n}}\right)^2} = \frac{P_{2n}}{P_{2n} + P_{10} + P_{1sc}} = \frac{1\,000}{1\,000 + 3{,}2 + 16{,}5} = 0{,}9809.$$

Pierderile în cupru sînt proporționale cu pătratul sarcinii.
Pierderile în fier sînt constante :

$P_2 = 0{,}2 \cdot P_{2n} = \quad 200$ kW $\qquad \eta = 0{,}9813;$

$P_2 = 0{,}4 \cdot P_{2n} = \quad 400$ kW $\qquad \eta = 0{,}9832;$

$P_2 = 0{,}6 \cdot P_{2n} = \quad 600$ kW $\qquad \eta = 0{,}9840;$

$P_2 = 0{,}8 \cdot P_{2n} = \quad 800$ kW $\qquad \eta = 0{,}9834;$

$P_2 = 1{,}2 \cdot P_{2n} = 1\,200$ kW $\qquad \eta = 0{,}9782.$

b) $\eta = \dfrac{P_2}{P_2 + P_{10} + P_{1sc}\cdot\left(\frac{P_2}{P_{2n}}\right)^2}.$

Maximul randamentului se va găsi anulînd derivata :

$$\frac{d\eta}{dP_2} = \frac{P_2 + P_{10} + P_{1sc}\cdot\left(\frac{P_2}{P_{2n}}\right)^2 - P_2 - 2\,P_{1sc}\left(\frac{P_2}{P_{2n}}\right)}{\left[P_2 + P_{10} + P_{1sc}\left(\frac{P_2}{P_{2n}}\right)^2\right]^2} = 0.$$

Rezultă :

$$P_{10} = P_{1sc}\left(\frac{P_2}{P_{2n}}\right)^2.$$

Randamentul este maxim la sarcina pentru care pierderile în cupru sînt egale cu cele în fier.

$$\frac{P_2}{P_{2n}} = \sqrt{\frac{P_{10}}{P_{1sc}}} = \sqrt{\frac{3{,}2}{16{,}5}} = 0{,}44.$$

Deci

$$(P_2)\eta_{max} = 0{,}44\ P_{2n} = 440 \text{ kW}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ca valoare :

$$\eta_{max} = \frac{P_{2n}\sqrt{\frac{P_{10}}{P_{1sc}}}}{P_{2n}\sqrt{\frac{P_{10}}{P_{1sc}}} + P_{10} + P_{10}} = \frac{P_{2n}}{P_{2n} + 2\sqrt{P_{10} \cdot P_{1sc}}} = \frac{1\,000}{1\,000 + 2\sqrt{3{,}2 \cdot 16{,}5}} =$$

$$= 0{,}9857.$$

c) $\eta_{max} = \frac{\eta_n (1 + \beta^2)}{\eta_n (1 - \beta^2) + 2\beta}$, unde $\beta = \frac{P_2}{P_{2n}} = \frac{I_2}{I_{2n}}$;

η_n fiind randamentul la sarcina nominală.

d) Valoarea P_{2n} devine :

$$P_{2n} = S_{2n} \cos \varphi_2 = 1\,000 \cdot 0{,}8 = 800 \text{ kW}.$$

Deci valorile randamentelor se micșorează, alura curbei rămînînd aceeași, maximul fiind tot pentru o sarcină 0,44 P_{2n} :

$\eta = 0{,}9774$; $\eta_{max} = 0{,}9823$.

$\eta = 0{,}9812$;

$\eta = 0{,}9818$;

$\eta = 0{,}9789$;

$\eta = 0{,}9771$;

$\eta = 0{,}9735$.

13.6 (R).

$$\frac{U_1}{w_1 + w_2} = \frac{U_2}{w_2};$$

$$w_2 = \frac{U_2}{U_1}(w_1 + w_2) = \frac{100}{220} 440 = 200 \text{ spire};$$

$$w_1 = (w_1 + w_2) - w_2 = 440 - 200 = 240 \text{ spire};$$

$$U_1 I_1 = U_2 I_2$$

$$I_1 = \frac{U_2}{U_1} I_2 = \frac{100}{220} 11 = 5 \text{ A}.$$

Scanned with OKEN Scanner

13.8 (R). Energia înregistrată de contor va fi:

$$W = K_i \cdot K_u \cdot \frac{n}{K} = \frac{400}{5} \cdot \frac{6\,000}{100} \cdot \frac{200}{2\,400} = 400 \text{ kWh};$$

$$K_i = \frac{400}{5} = 80;$$

$$K_u = \frac{6\,000}{100} = 60.$$

Puterea corespunzătoare:

$$P = \frac{W}{t} = 3{,}6 \cdot 10^6 \frac{400}{360} = 4 \cdot 10^6 \text{ W} = 4 \text{ MW}.$$

13.10 (I). La mersul în gol se va lua

$$U_{10} = \frac{W_1}{W_2} \cdot U_{2n} = 2 \cdot 210 = 420 \text{ V}.$$

13.11 (R). *a*)

$$\eta = \frac{P_2}{P_2 + P_{10} + P_{1sc}} = \frac{S_n \cos \varphi_2}{S_n \cos \varphi_2 + P_{10} + P_{1sc}} = \frac{100 \cos \varphi_2}{100 \cos \varphi_2 + 4{,}5} = \frac{1}{1 + \frac{0{,}045}{\cos \varphi_2}}$$

$$P_2 = S_n \cos \varphi_2.$$

b) Pierderile anuale:

$$W_0 = (T_1 + T_2)\, P_0 = 6\,000 \cdot 1{,}5 = 9\,000 \text{ kWh}.$$

$$W_{sc} = \left(T_1 \cdot P_{sc} + \frac{1}{4} T_2 P_{sc}\right) = 4\,000 \cdot 3 + \frac{1}{4} 2\,000 \cdot 3 = 13\,500 \text{ kWh};$$

$$W_{2anual} = T_1 P_1 + T_2 P_2 = 4\,000 \cdot 100 + 2\,000 \cdot 50 = 500\,000 \text{ kWh};$$

$$\eta_{anual} = \frac{W_{2anual}}{W_{2anual} + W_0 + W_{sc}} = \frac{500\,000}{513\,500} = 0{,}975.$$

c) La pierderi se mai adaugă:

$$W_0' = [8\,760 - (T_1 + T_2)]\, P_0 = 2\,760 \cdot 1{,}5 = 4\,141 \text{ kWh}.$$

Deci:

$$\eta = \frac{W_{2anual}}{W_{2anual} + W_0 + W_{sc} + W_0'} = \frac{500\,000}{517\,640} = 0{,}965.$$

Scanned with OKEN Scanner

d) Avem de data aceasta :

$$P_1 = S_n \cos \varphi_1 = 100 \cdot 0{,}8 = 80\,\text{kW};$$

$$P_2 = S_n \cos \varphi_2 = 50 \cdot 0{,}8 = 40\,\text{kW}.$$

Deci :

$$W_{2anual} = 4\,000 \cdot 80 + 2\,000 \cdot 40 = 400\,000\,\text{kWh};$$

$$\eta = \frac{400\,000}{413\,500} = 0{,}967;$$

$\eta = \frac{400\,000}{417\,640} = 0{,}956$ (cînd înfășurarea primară nu se deconectează de la rețea).

13.12 (R). Receptorul are impedanța :

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25\,\Omega,$$

curenții de fază :

$$I_f = \frac{220}{25} = 8{,}8\,\text{A}$$

curenții de linie :

$$I = \sqrt{3} \cdot I_f = \sqrt{3} \cdot 8{,}8 = 15{,}25\,\text{A}.$$

În cazul conectării greșite, tensiunile se determină din diagrama vectorială din figura R. 13.12.

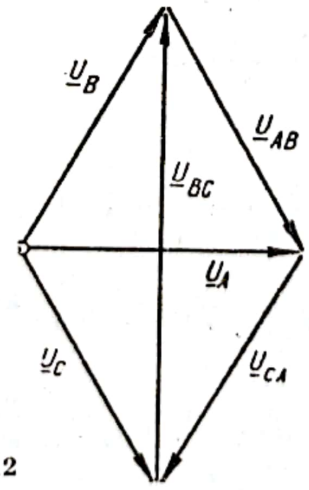


Fig. R. 13. 12

Scanned with OKEN Scanner

Găsim astfel:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB}}{Z} = \frac{127}{25} = 5{,}08 \text{ A};$$

$$I_{BC} = \frac{U_{BC}}{Z} = \frac{220}{25} = 8{,}8 \text{ A};$$

$$I_{CA} = \frac{U_{CA}}{Z} = \frac{127}{25} = 5{,}08 \text{ A}.$$

Curenții vor fi defazați în urmă față de tensiunile corespunzătoare fazelor triunghiului echivalent al sarcinii cu unghiul φ, definit de elementele receptorului:

$$\varphi = \text{arc tg} \frac{X}{R} = \text{arc tg} \frac{15}{20} = 36°53'.$$

Pe diagramă, unind capetele vectorilor curenților din faze, se găsesc vectorii curenților de linie.

Soluția II. Problema se poate trata analitic, cu ajutorul calculului complex:

$$\underline{U}_A = 127;$$

$$\underline{U}_B = 63{,}5 + \text{j } 110;$$

$$\underline{U}_C = 63{,}5 - \text{j } 110;$$

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B = 63{,}5 - \text{j } 110;$$

$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C = \text{j } 220;$$

$$\underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A = -63{,}5 - \text{j } 110.$$

Curenții de fază:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}} = \frac{63{,}5 - \text{j } 110}{20 + \text{j } 15} = -0{,}608 - \text{j } 5{,}05 = 5{,}08\, e^{-\text{j } 96°53'};$$

$$\underline{I}_{BC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}} = \frac{\text{j } 220}{20 + \text{j } 15} = 5{,}28 + \text{j } 7{,}05 = 8{,}8\, e^{\text{j } 53°07'};$$

$$\underline{I}_{CA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}} = \frac{-63{,}5 - \text{j } 110}{20 + \text{j } 15} = -4{,}67 - \text{j } 2 = 5{,}08\, e^{-\text{j } 156°53'}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Curenții de linie :

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA} = 4{,}062 - \mathrm{j}\ 3{,}05 = 5{,}5\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,33°40'};$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB} = 5{,}888 + \mathrm{j}\ 12{,}1 = 13{,}4\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,63°40'};$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC} = -9{,}85 - \mathrm{j}\ 9{,}05 = 13{,}4\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,137°40'}.$$

REZOLVĂRI ȘI INDICAȚII LA CAPITOLUL 14

14.1. 1. Curentul din linie I_{ln} se calculează cu expresia

$$I_{ln} = \frac{P_n}{\eta_n \sqrt{3}\, U_n \cos \varphi_n} = \frac{6{,}8 \cdot 10^3}{0{,}85 \cdot \sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0{,}83} = 53 \text{ A}.$$

Pentru conexiunea în stea, curentul din linie este egal cu cel de fază.
2. Schema echivalentă este cea din figura R.14.1.

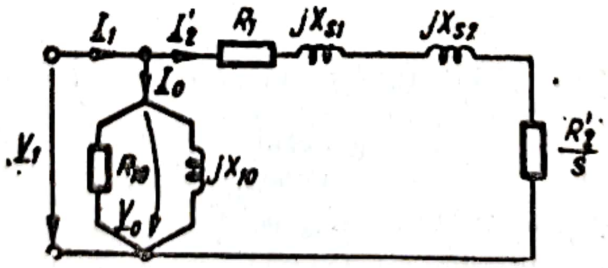


Fig. R.14.1

Pentru funcționarea în gol se poate neglija curentul rotoric (de sarcină). Pentru conexiunea în stea, curentul de mers în gol pe linie și fază are valoarea

$$I_0 = 30\% \cdot I_n = 0{,}3 \cdot 53 = 15{,}9 \text{ A}.$$

Parametrii R_{10} și X_{10} ai schemei echivalente cu elemente paralel pentru o fază, la conexiunea în stea, se calculează astfel:

$$R_{10} = \frac{U_n^2}{P_0} = \frac{220^2}{625} = 77{,}3\Omega, \quad X_{10} = \frac{U_n^2}{Q_0} = \frac{U_n^2}{\sqrt{(\sqrt{3}U_n I_0)^2 - P_0^2}} =$$

$$= \frac{U_n^2}{P_0\sqrt{3\left(\frac{U_n I_0}{P_0}\right)^2 - 1}} = \frac{R_{10}}{\sqrt{3\left(\frac{U_n I_0}{P_0}\right)^2 - 1}} = \frac{77{,}3}{9{,}63} = 8{,}04\ \Omega.$$

La funcționarea în scurtcircuit se poate neglija curentul prin ramura transversală a schemei. Tensiunea de scurtcircuit a fazei are valoarea $V_{sc} = 15\% V_n = 0{,}15 \cdot 127 = 19{,}05$ V.

Parametrii R și X_s ai schemei echivalente cu elemente serie, pentru o fază, la conexiunea în stea se calculează astfel:

$$R = \frac{P_{sc}}{3I_n^2} = \frac{870}{3 \cdot 53^2} = 0{,}103\Omega;$$

$$X_s = \frac{Q_{sc}}{3I_n^2} = \frac{\sqrt{(3V_{sc}I_n)^2 - P_{3c}^2}}{3I_n^2} = \frac{P_{sc}}{3I_n^2}\sqrt{\left(\frac{3V_{sc}I_n}{P_{sc}}\right)^2 - 1} = 0{,}103 \cdot 3{,}34 = 0{,}344\Omega.$$

14.2. I. Suma reactanțelor de dispersiune $X_s = X_{s1} + X'_{s2}$ este dată de expresia

$$X_s = \sqrt{Z_{sc}^2 - (R_1 + R'_2)^2}.$$

Rezistența rotorică raportată la stator este

$$R'_2 = R_2 k^2 = 0{,}02 \cdot 5{,}2^2 = 0{,}54\ \Omega.$$

S-a notat prin k raportul de transformare.
Rezultă:

$$R_1 + R'_2 = 0{,}46 + 0{,}54 = 1\Omega \text{ iar } X_s = \sqrt{4{,}51^2 - 1} = 4{,}4\Omega.$$

Se aproximează în general $X_{s1} \simeq X'_{s2}$ încît rezultă:

$$X_{s1} = 2{,}2\Omega \text{ iar } X_{s2} = \frac{X'_{s2}}{k^2} = \frac{2{,}2}{5{,}2^2} = 0{,}0815\ \Omega.$$

2. Curentul statoric la pornire, pe fază este

$$I_{f_1} = \frac{V_n}{Z_{sc}} = \frac{220}{4{,}51} = 48{,}8\text{ A},$$

Scanned with OKEN Scanner

iar curentul de linie

$$I_l = I_{f_1} \cdot \sqrt{3} = 84{,}5 \text{ A}.$$

Curentul rotoric pe fază rezultă

$$I_{f_2} = k \cdot I_{f_1} = 5{,}2 \cdot 48{,}8 = 254 \text{ A}.$$

Turația de sincronism a motorului este 1 000 rot/min (submultiplul turației de 3 000 rot/min imediat superioară turației motorului) și deci viteza unghiulară a cîmpului învîrtitor este

$$\Omega = \frac{\pi}{30} n = \frac{\pi}{30} 1\,000 = 104{,}5 \text{ rad/s}.$$

Cuplul motor rezultă :

$$M_p = \frac{3R_2 I_2^2}{\Omega} = \frac{3 \cdot R_2' I_2'^2}{\Omega} = \frac{3 \cdot 0{,}02 \cdot 2{,}54^2}{104{,}5} = 37 \text{ Nm}.$$

Factorul de putere se determină cu ajutorul constantelor schemei :

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z_{sc}} = \frac{1}{4{,}5} = 0{,}222.$$

3. Se obține cuplul maxim la pornire dacă alunecarea critică s_m are valoarea 1,

$$s_m = \frac{R_2' + R_p'}{X_s} = 1.$$

Rezultă :

$$R_p' = X_s - R_2' = 4{,}4 - 0{,}54 = 3{,}86\Omega$$

și deci :

$$R_p = \frac{R_p'}{k^2} = 0{,}1425 \ \Omega.$$

4. Rezistența circuitului echivalent rezultă :

$$R = R_1 + R_2' + R_p' = R_1 + X_s = 0{,}46 + 4{,}4 = 4{,}86\Omega.$$

Impedanța de scurtcircuit are valoarea :

$$Z_{sc} = \sqrt{R^2 + X_s^2} = 6{,}55\Omega,$$

și, prin urmare, curentul de pornire pe faza statorului va fi :

$$I_{f_1} = \frac{V_n}{Z_{sc}} = \frac{220}{6{,}55} = 33{,}6 \text{ A},$$

Scanned with OKEN Scanner

iar curentul pe linie

$$I_l = \sqrt{3}\, I_{f_1} = 58{,}2 \text{ A}.$$

Curentul rotoric pe fază este

$$I_{f_2} = I_{f_1} \cdot k = 33{,}6 \cdot 5{,}2 = 174{,}72 \text{ A}.$$

Cuplul motor va fi:

$$M_p = \frac{3(R_2 + R_p)I_2^2}{\Omega} = \frac{3(0{,}02 + 0{,}1425)(174{,}72)^2}{104{,}5} = 142 \text{ Nm}.$$

5. Alunecarea critică se determină cu expresia:

$$s_m = \frac{R_2'}{X_s} = \frac{0{,}54}{4{,}4} = 0{,}1227 = 12{,}27\%.$$

Cuplul maxim are valoarea

$$M_{max} \simeq \frac{3\,\frac{V_n^2}{X_s}}{2\Omega_0} = \frac{3 \cdot \frac{220^2}{4{,}4}}{2 \cdot 104{,}5} = 157 \text{ Nm}.$$

Observație. Valoarea rezultată în acest caz diferă întrucîtva de valoarea cuplului maxim, egal cu cel de pornire de la punctul anterior, datorită neglijării influenței rezistenței statorice R_1 în expresia cuplului maxim.

14.3. I. Cuplul nominal rezultă

$$M_n = \frac{P_n}{\Omega_n} = \frac{P_n}{\frac{\pi}{30} \cdot n} = \frac{7{,}5 \cdot 10^3}{\frac{\pi}{30} \cdot 720} = 100 \text{ Nm},$$

iar cuplul maxim

$$M_{max} = \lambda M_n = 2{,}4 \cdot 100 = 240 \text{ Nm}.$$

Alunecarea

$$s = \frac{n_0 - n}{n_0} = \frac{750 - 720}{750} = 0{,}04 = 4\%.$$

Pentru determinarea alunecării critice se pleacă de la ecuația cuplului funcție de alunecare:

$$M = \frac{2M_{max}}{s/s_m + s_m/s},$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se notează prin $\alpha = \frac{M}{2M_{max}}$ rezultă expresia alunecării critice sub forma

$$s_m = \frac{s}{2\alpha}\left[1 + \sqrt{1 - 4\alpha^2}\right].$$

Pentru valorile $\alpha = \frac{100}{2 \cdot 240} = 0{,}208$ și $s = 0{,}04$ se obține

$$s_m = 0{,}183.$$

2. Ecuația caracteristicii cuplu alunecare pentru valorile lui s_m și M_{max} anterioare este următoarea

$$M = \frac{480}{\frac{0{,}183}{s} + \frac{s}{0{,}183}}.$$

Rezultatele calculelor sînt trecute în tabela următoare:

s(%)	0	0,1	0,183	0,5	1
M(Nm)	0	210	240	180	85

Caracteristica $M = f(s)$ este trasată în figura R.14 3, *a*.

3. Se scrie expresia alunecării pentru cele două caracteristici cuplu-alune-

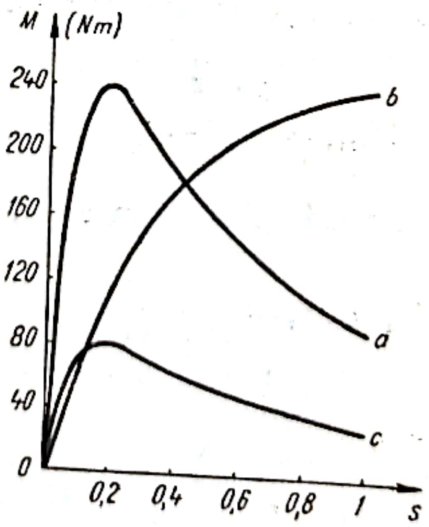


Fig. R.14.3

care la aceeași valoare a cuplului M și deci coeficientul $\alpha = \frac{M}{2M_{max}}$

$$s = \frac{s_m}{2\alpha}\left[1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha^2}\right]$$

$$s' = \frac{s'_m}{2\alpha}\left[1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha^2}\right].$$

Se observă că:

$$\frac{s'}{s} = \frac{s'_m}{s_m}.$$

În condițiile problemei date $s_m = 0{,}183$, iar $s'_m = 1$, încît avem:

$$s' = \frac{s}{0{,}183} = 5{,}46\ s.$$

Abscisele celor două curbe corespunzătoare unei aceleiași valori M sînt în raport constant.

Rezultă caracteristica cuplu-alunecare din figura R.14. 3, *b*.

4. Pentru aceleași valori de alunecare, valoarea cuplului electromagnetic este proporțională cu aceea a cuplului maxim și deci cu pătratul valorii tensiunii

$$\frac{M'}{M} = \left(\frac{V'}{V}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

Noua caracteristică se obține deci din cea dată prin micșorarea ordonatelor de trei ori, ca în figura R.14.3,*c*.

14.4. Cuplul maxim are expresia

$$M_{max} = \frac{3 \cdot \frac{V_n^2}{X_s}}{2\Omega_0}.$$

Pentru o valoare scăzută a tensiunii V vom avea, la limită,

$$M'_{max} = M_n = \frac{3}{2\Omega_0} \cdot \frac{V^2}{X_s}.$$

Se cunoaște

$$\lambda = \frac{M_{max}}{M_n} \geqslant 1{,}6,$$

Scanned with OKEN Scanner

încît rezultă

$$\frac{M_{max}}{M_n} = \left(\frac{V_n}{V}\right)^2 \geqslant 1{,}6,$$

adică

$$V \geqslant \frac{V_n}{\sqrt{1{,}6}} = 0{,}79\ V_n.$$

14.6. 1. Reactanța motorului pentru o fază la pornire este dată de expresia:

$$X_m \simeq \frac{U_m}{\sqrt{3}I_p} = \frac{U_n}{\sqrt{3}\cdot 5{,}5\cdot I_n} = \frac{1}{5{,}5}\cdot\frac{U_n}{\sqrt{3}I_n} = \frac{Z_n}{5{,}5} = 0{,}182\,Z_n = 18{,}2\%\ Z_n.$$

Impedanța nominală echivalentă are valoarea:

$$Z_n = \frac{U_n}{\sqrt{3}I_n} = \frac{\eta_n U_n^2 \cos\varphi_n}{P_n} = \frac{0{,}85\cdot 6^2\cdot 10^6\cdot 0{,}8}{120\cdot 10^3} = 20{,}5\ \Omega.$$

Rezultă $X_m = 0{,}182\cdot 20{,}5 = 3{,}7\Omega$.

2. Admițîndu-se un cuplu redus la pornire se poate micșora solicitarea rețelei și a motorului la pornire prin conectarea în serie a unui reactor (bobină cu reactanță).

Pentru cuplul $M_{rp} = 0{,}4\ M_n$ este necesară o tensiune U_p dată de relația:

$\frac{M_{rp}}{M_p} = \left(\frac{U_p}{U_n}\right)^2$. Rezultă $U_p = U_n\cdot\sqrt{\frac{M_{rp}}{M_p}} = 6\,000\sqrt{\frac{0{,}4}{1{,}45}} = 3\ 160$ V.

Curentul de pornire corespunzător va fi în acest caz:

$$I_{rp} = \frac{U_p}{\sqrt{3}X_m} = \frac{3\ 160}{\sqrt{3}3{,}7} = 494\ \text{A}.$$

Se remarcă relațiile $U_p = \alpha U_n$ și $I_{rp} = \alpha I_p$ cu $\alpha = \sqrt{\frac{M_{rp}}{M_p}}$.

Reactanța echivalentă totală (motor și reactor) rezultă astfel:

$$x_t = \frac{U_n}{\sqrt{3}I_p} = \frac{X_m}{\alpha}.$$

Prin urmare, reactanța bobinei trebuie să aibă valoarea:

$$x_r = x_t - x_m = x_m\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) = 3{,}36\Omega.$$

3. Rolul autotransformatorului este mai întîi de a reduce tensiunea aplicată motorului la valoarea $U_p = \alpha U_n = 3\ 160$ V.

Scanned with OKEN Scanner

Totodată autotransformatorul permite micșorarea curentului debitat de rețea de

$$\frac{I_{rp}}{I_t} = \frac{U_n}{U_p} = \frac{1}{\alpha} = 1{,}9 \text{ ori.}$$

Prin urmare, $I_t = \alpha I_{,p} = \alpha^2 I_p = 260$ A.

4. Dacă la tensiunea rețelei de 6 000 V motorul funcționează cu conexiune triunghi (tensiunea fazei motorului este egală cu tensiunea de linie a rețelei) pentru conexiunea stea tensiunea fazei se reduce de $\sqrt{3}$ ori, deci:

$$\alpha' = \frac{U_p}{U_n} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}578 > 0{,}526.$$

Cuplul de pornire va fi deci mai mare decît cuplul minim necesar:

$$M'_p = \left(\frac{0{,}578}{0{,}526}\right)^2 M_p = 1{,}21\ M_p.$$

Dacă rețeaua de alimentare admite curentul

$$I'_p = \frac{0{,}578}{0{,}526} \cdot I_p = 544 \text{ A},$$

se poate folosi metoda schimbării conexiunii.

REZOLVĂRI ȘI INDICAȚII LA CAPITOLUL 15

15.1. Impedanța nominală Z_n pe fază la conexiunea stea are valoarea

$$Z_n = \frac{U_n^2 \cos\varphi_n}{P_n} = \frac{380^2 \cdot 0{,}8}{30 \cdot 10^3} = 3{,}85\,\Omega.$$

Reactanța de dispersiune este, deci:

$$X_s = 0{,}1\ Z_n = 0{,}385\ \Omega.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile caracteristicii de mers în gol liniarizată și a caracteristicii de scurtcircuit trifazat sînt următoarele:

$$E_0 = k_e i_e = 52{,}6\ i_e; \quad I_{sc} = k_{sc}\, i_e = 9{,}1\ i_e.$$

Reactanța sincronă rezultă, deci:

$$X_d = \frac{E_0}{I_{sc}} = 5{,}77\ \Omega.$$

Deoarece $X_d = X_0 + X_s$, se obține pentru valoarea nesaturată a reactanței de magnetizare (reacție a indusului)

$$X_0 = X_d - X_s = 5{,}385\ \Omega.$$

Coeficientul α de echivalență al curenților statoric și rotoric se obține de la încercarea în scurtcircuit.

Pe baza schemei echivalente din figura R.15.1, *a*, rezultă relația:

$$I_{sc} = I_e \frac{X_0}{X_0 + X_s} = I_e \frac{X_0}{X_d} \text{ sau } I_e = I_{sc}\frac{X_d}{X_0} = k_{sc}\frac{X_d}{X_0} i_e = \alpha i_e.$$

Coeficientul α are deci valoarea:

$$\alpha = k_{sc}\frac{X_d}{X_0} = 9{,}1\,\frac{5{,}77}{5{,}385} = 9{,}78.$$

2. Deoarece la mersul în gol $I = 0$ se observă, din schema echivalentă (fig. R.15.1, *b*), că atunci $I_e = I_0$ și prin urmare caracteristica volt-amper (neliniară) a reactanței de magnetizare $E_0 = \mathrm{f}(I_0)$ este dată la o altă scară $\left(\text{scara coeficientului } \alpha = \frac{I_0}{i_0}\right)$, de către caracteristica de mers în gol $E_0 = \mathrm{f}(i_e)$.

3. Pentru *caracteristica în sarcină* $V = \mathrm{f}(i_e)$ la $I_n = \frac{U_n}{\sqrt{3}Z_n} = 57$ A se adaugă la diverse valori ale tensiunii V căderea de tensiune în reactanța de dispersiune, rezultînd astfel valori pentru tensiunea electromotoare $E_0 = V + \mathrm{j}X_s I_n$.

Din caracteristica de mers în gol se obține i_0 și deci $I_0 = \alpha i_0$. Se efectuează suma $I_0 + I = I_e$ și se determină $i_e = \frac{I_e}{\alpha}$, corespunzător valorii alese pentru V.

Rezultă astfel caracteristica $V = \mathrm{f}(i_e)$ la $I = 57$ A din figura R.15.1, *c*.

Funcționarea capacitivă nu este posibilă la $I = 57$ A, deoarece rezultă un curent de excitație negativ.

Pentru *caracteristica externă* $V = \mathrm{f}(I)$ la $i_e = 5$ A și deci $I_e = \alpha i_e = 9{,}78 \cdot 5 = 48{,}9$ A se iau diverse valori ale curentului I_0 (sau E_0 corespunzător pe caracteristica de mers în gol).

Scanned with OKEN Scanner

Se calculează $\underline{I} = \underline{I}_e - \underline{I}_o$ și apoi $\underline{V} = \underline{E}_o - \mathrm{j}\, X_s \underline{I}$.
Rezultă astfel caracteristicile din figura 15.1, *d*.
Caracteristica de reglaj $I = \mathrm{f}(i)$ la $V = 220$ V se determină calculînd pentru diverse valori ale curentului I mai întîi $\underline{E}_o = \underline{V} + \mathrm{j}X_s\underline{I}$.

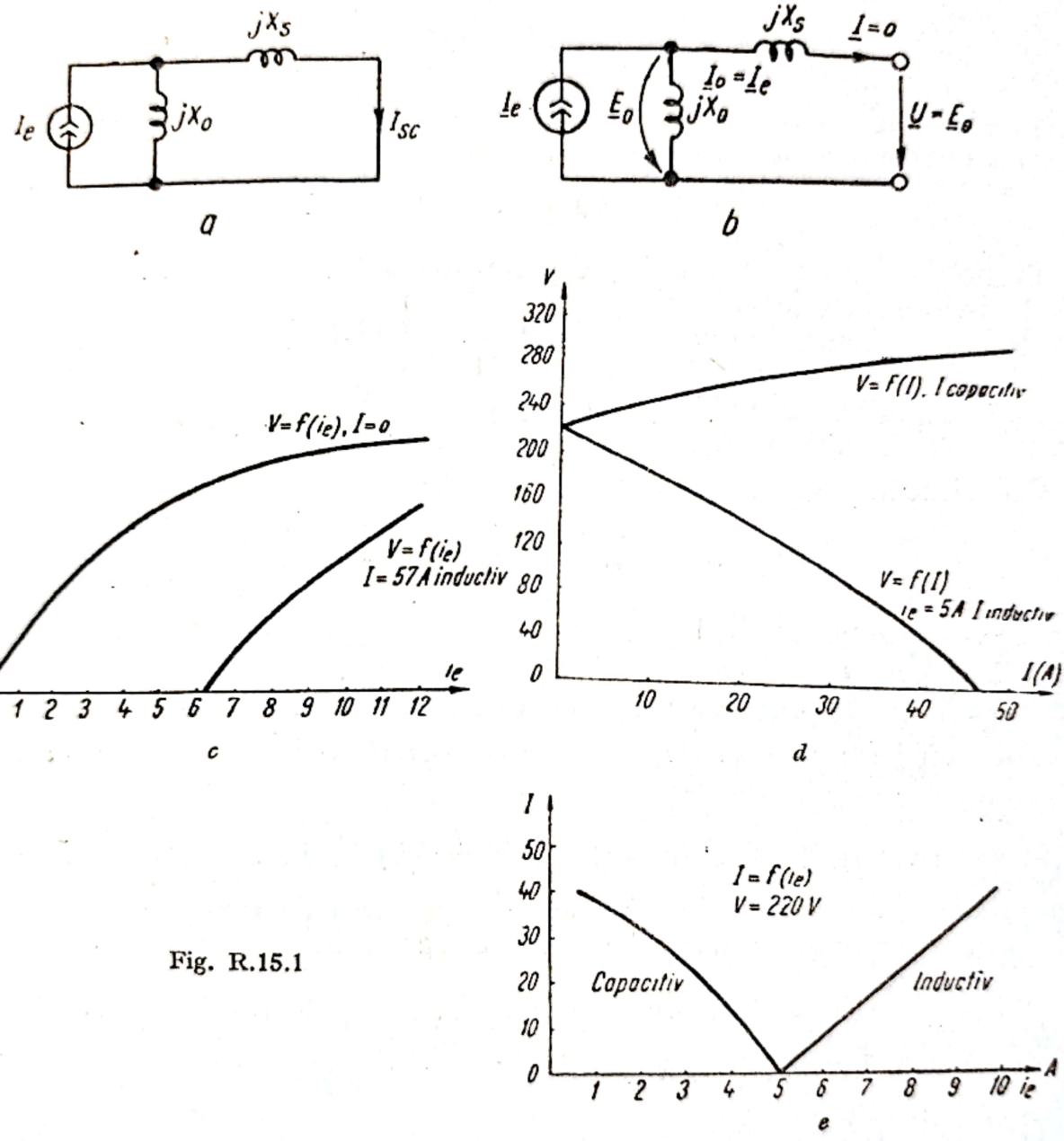


Fig. R.15.1

Din caracteristica de mers în gol rezultă I_0 și apoi

$$i_e = \frac{I_e}{\alpha} = \frac{|I + I_0|}{\alpha}.$$

În figura 15.1,*e* s-au reprezentat caracteristicile cerute.

15.2. 1. Reactanța sincronă rezultă la valoarea

$$X_d = 0{,}75 Z_n = 0{,}75 \frac{\eta_n U_n^2 \cos\varphi_n}{P_n} = 2{,}885\ \Omega.$$

Curentul nominal are valoarea

$$I_n = \frac{P_n}{\sqrt{3}\,\eta_n U_n \cos\varphi_n} = 57\ \text{A}.$$

Tensiunea electromotoare internă rezultă pe baza diagramei vectoriale din figura R.15.2 conform expresiei

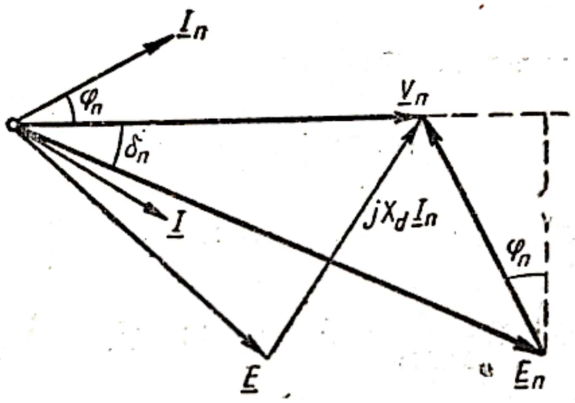


Fig. R.15.2

$$E_n = \sqrt{(V_n + X_d I_n \sin\varphi_n)^2 + (X_d I_n \cos\varphi_n)^2} = 345\ \text{V}.$$

2. Puterea maximă are valoarea

$$P_{max} = \frac{3E_n V_n}{X_d} = 79\ \text{kW}$$

și deci coeficientul de suprasarcină rezultă

$$\lambda = \frac{P_{max}}{P_n} = 2{,}63.$$

3. Pentru funcționarea inductivă rezultă

$$E = \sqrt{(V_n - X_d I_n \cdot \sin\varphi_n)^2 + (X_d I_n \cos\varphi_n)^2} = 178\ \text{V}.$$

Puterea maximă

$$P_m = \frac{3E\,V_n}{X_d} = 40{,}6\ \text{kW}$$

și deci coeficientul de suprasarcină $\lambda = 1{,}35$.

Scanned with OKEN Scanner

Puterea reactivă consumată rezultă din expresia:

$$Q = \frac{-3E\,V_n}{X_d}\cos\delta + \frac{3V_n^2}{X_d} = 3V_nI_n\sin\varphi_n = 22{,}5 \text{ kvar.}$$

4. Puterea maximă are expresia

$$P_{max} = \frac{3\,E\,V}{X_d}.$$

Pentru E dat ea depinde liniar de tensiunea V.
Pentru funcționarea inductivă rezultă:

$$V_{min} = P_n\frac{X_d}{3\,E_n} = 83{,}5\text{V},$$

iar pentru funcționarea capacitivă:

$$V_{min} = P_n\frac{X_d}{3E} = 162 \text{ V.}$$

Puterea reactivă consumată Q, pentru $\delta = \frac{\pi}{2}$ rezultă:

$$Q = 3\frac{V^2}{X_d};\quad Q_1 = 3\frac{83{,}5^2}{2{,}2885} = 9{,}2 \text{ kvar};\quad Q_2 = 3\frac{162^2}{2{,}2885} = 34{,}1 \text{ kvar.}$$

REZOLVĂRI ȘI INDICAȚII LA CAPITOLUL 16

16.1. 1. $I_n = \frac{P_n}{U_n} = \frac{1{,}44\cdot 10^3}{120} = 12$ A, $R_n = \frac{U_n}{I_n} = \frac{U_n^2}{P_n} = 10\ \Omega$.

2. $r_i = \frac{E}{I_{sc}} = \frac{130}{156} = 0{,}835\ \Omega$.

3. Puterea absorbită P_a rezultă din însumarea pierderilor de putere ΔP cu puterea utilă P_u. Pierderile de putere sînt aproximate ca pierderi constante

ΔP_0 (de mers în gol: histerezis, prin curenți turbionari, mecanice) și pierderi variabile (de mers în sarcină) datorite efectului Joule, $\Delta P_j = r_i I^2$

$$\Delta P_0 = \frac{7}{100} \cdot 1{,}44 \cdot 10^3 = 100 \text{ W},$$

$$\Delta P_j = r_i I_n^2 = 0{,}835 \cdot 12^2 = 120 \text{ W}.$$

$$P_a = P_u + \Delta P = 1\,440 + 100 + 120 = 1\,660 \text{ W}.$$

Randamentul rezultă:

$$\eta = \frac{P_n}{P_u + \Delta P} = \frac{1\,440}{1\,660} = 0{,}86.$$

Suma puterii utile și a pierderilor de putere în rezistența internă reprezintă puterea electromagnetică EI transmisă rotorului.

Într-adevăr, avem:

$$UI + r_i I^2 = (U + r_i I)I = EI = 130 \cdot 12 = 1\,560 \text{ W}.$$

Prin urmare, puterea absorbită se poate calcula adăugînd pierderile de putere de mers în gol la puterea electromagnetică transmisă rotorului.

4. Dacă se menține constant curentul de excitație (și deci tensiunea electromotoare E), puterea utilă ca funcție de rezistența de sarcină R_s va fi maximă la anularea derivatei expresiei:

$$P = R_s \cdot I^2 = R_s \left(\frac{E}{R_s + r_i}\right)^2.$$

Valoarea maximă rezultă pentru $R_s = r_i$, adică în cazul unei rezistențe de sarcină egală cu rezistența internă a mașinii.

Curentul va avea valoarea

$$I = \frac{E}{R_s + r_i} = \frac{E}{2r_i} = \frac{I_{sc}}{2} = \frac{156}{2} = 78 \text{ A},$$

adică jumătate din aceea a curentului de scurtcircuit. Tensiunea la borne rezultă

$$U = R_s \cdot I = r_i \frac{E}{2r_i} = \frac{E}{2} = \frac{130}{2} = 65 \text{ V},$$

adică jumătate din tensiunea electromotoare.

Randamentul rezultă:

$$\eta = \frac{UI}{EI + \Delta P_0} = \frac{\frac{E}{2} \cdot \frac{I_{sc}}{2}}{E\frac{I_{sc}}{2} + \Delta P_0} = \frac{0{,}5}{1 + \frac{\Delta P_0}{\frac{E \cdot I_{sc}}{2}}} = \frac{0{,}5}{1 + \frac{100}{10 \cdot 200}} \simeq 0{,}5.$$

Funcționarea în asemenea condiții este deci neeconomică (randament mic), iar pentru mașinile uzuale inacceptabilă (curentul de sarcină depășește mult curentul nominal).

5. Valoarea maximă a randamentului se obține simplu prin anularea derivatei expresiei următoare ca funcție de curent:

$$\eta = \frac{UI}{UI + r_i I^2 + \Delta P_0} = \frac{U}{U + r_i I + \frac{\Delta P_0}{I}}.$$

Rezultă condiția de egalitate a pierderilor constante cu cele variabile $\Delta P_0 = r_i I^2$.

Prin urmare:

$$R_s = \frac{U}{I} = \frac{U}{\sqrt{\frac{\Delta P_0}{r_i}}} = \frac{120}{\sqrt{\frac{100}{0{,}835}}} = \frac{120}{10{,}9} = 11\ \Omega > R_n = 10\ \Omega.$$

În general, la mașinile electrice randamentul maxim corespunde unei valor de putere mai mică decît cea nominală.

16.2. 1. Deoarece tensiunea electromotoare este proporțională cu turația $E = k\frac{\pi n}{30}\Phi$, caracteristica de mers în gol la turația 1 000 rot/min (OBC în fig. R.16.2, *a*) se determină din cea dată la 1 500 rot/min prin reducerea ordonatelor în raportul $\frac{1\,500}{1\,000} = 1{,}5$.

Tensiunea electromotoare din circuitul echivalent al generatorului este egală cu căderea de tensiune de-a lungul circuitului: $E = (R_e + r_i)i_e$. Ea este totodată o funcție neliniară a curentului de excitație dată de caracteristica de mers în gol E f(i_e). Prin urmare, valorile tensiunii electromotoare și curentului de excitație rezultă din intersecția caracteristicii de mers în gol cu dreapta $E = (32 + 0{,}1) \cdot i_e = 32{,}1\ i_e$.

Rezultă, ca în figura 16.2, *a*, punctul C de coordonate $E = 215$ V, $i_e = 7$A.

2. La funcționarea în sarcină, dependența liniară dintre tensiunea electromotoare și curentul din circuitul de excitație este determinată de ecuațiile rezultate pe baza schemei echivalente din figura R.16. 2,*b*

$$E = \left(r_i + \frac{R_s \cdot R_e}{R_e + R_s}\right) I,\quad i_e = I\frac{R_s}{R_e + R_s}.$$

Dacă eliminăm curentul I avem:

$$E = \left(R_e + r_i + \frac{r_i \cdot R_e}{R_s}\right) i_e = 33{,}27\ i_e.$$

Dreapta de pantă 33,27 V/A intersectează caracteristica de mers în gol în punctul B de coordonate $E = 208$ V, $i_e = 6{,}25$ A.

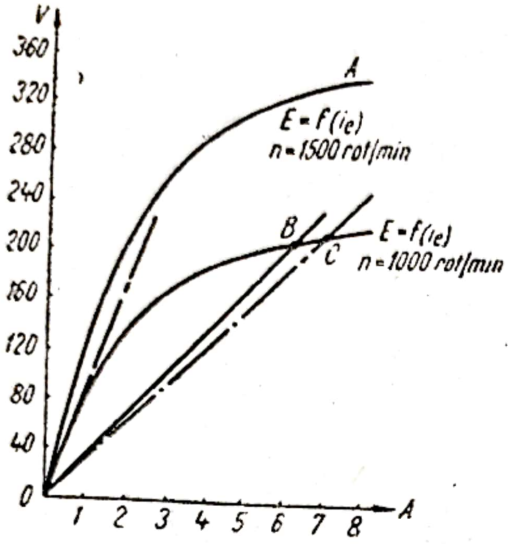


Fig. R.16.2, *a*

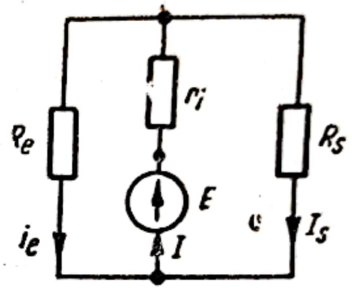


Fig. R.16.2, *b*

Rezultă apoi :

$$I = i_e \cdot \frac{R_e + R_s}{R_s} = 6{,}25 \cdot 12{,}8 = 80\,\text{A}$$

și tensiunea la borne

$$U = E - r_i I = (I - i_e)\, R_s = 200\ \text{V}.$$

3. Se observă că panta dreptei de ecuație $E = \left(R_e + r_i + \frac{r_i R_e}{R_s}\right) i_e$ crește pe măsură ce R_s scade.

Rezistența minimă R_s pentru care această dreaptă mai intersectează caracteristica de mers în gol se determină impunînd condiția ca dreapta să devină tangentă la caracteristica de mers în gol.

Grafic, pentru panta maximă a tangentei rezultă valoarea 84 V/A.

Avem, deci, $R_e + r_i + \frac{r_i R_e}{R_s} = 84\Omega.$

Pentru R_e și r_i date anterior rezultă

$$R_s = 0{,}06\Omega.$$

4. Se scrie expresia tensiunii electromotoare sub forma

$$E = r_i\,(I_s + i_e) + R_e i_e$$

sau

$$E = r_i I_s + (r_i + R_e)\, i_e.$$

Dreapta avînd această ecuație intersectează caracteristica de mers în gol în puncte dependente de valoarea curentului de sarcină I_s. Acesta va fi maxim pentru dreapta AB cu ordonata la origine OA maximă tangentă la

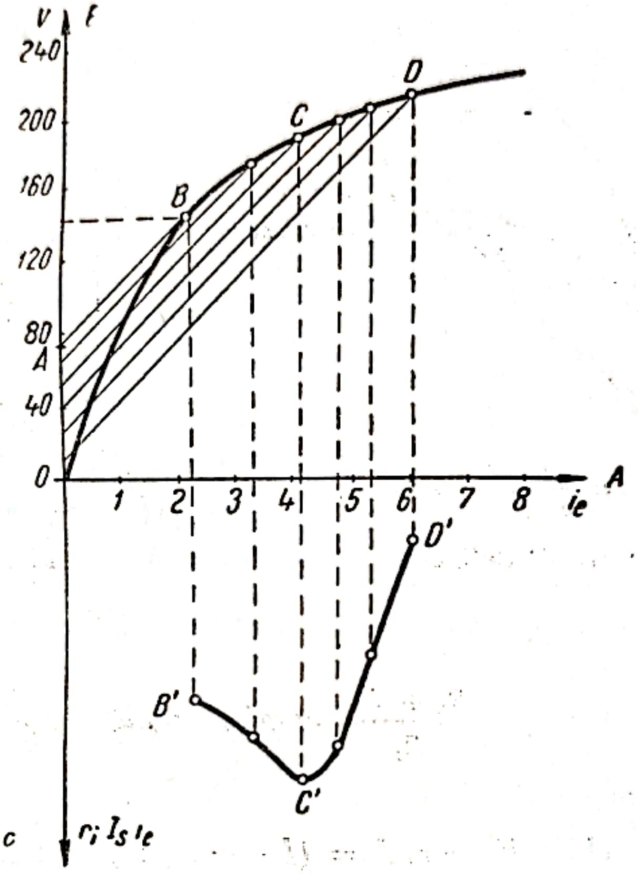


Fig. R.16.2, *c*

caracteristica de mers în gol, ca în figura R.16.2, *c*. Dreapta de pantă $r_i + r_e = 32{,}1$ tangentă la caracteristica de mers în gol determină o ordonată la origine de 72 V și un punct de intersecție B, de coordonate $E = 143$ V, $i_e = 2{,}25$ A.

Rezultă:

$$I_{sm} = \frac{72}{0{,}1} = 720 \text{ A}, \quad U = R_e i_e = 32.2{,}25 = 72 \text{ V}.$$

$$R_s = \frac{U}{I_{sm}} = \frac{72}{720} = 0{,}1\,\Omega.$$

5. Puterea utilă are expresia $P = UI_s = R_e i_e I_s$. Ea va fi deci maximă simultan cu produsul $r_i I_s i_e$.

Prin urmare, vom căuta o dreaptă $E = r_i I_s + (r_i + R_e)\, i_e$ de pantă constantă $r_i + R_e$, care intersectată cu caracteristica de mers în gol să determine un produs maxim dintre ordonata la origine $r_i I_s$ și abscisa i_e. Se trasează grafic curba $B'C'D$ a produsului $r_i I_s i_e$, funcție de i_e, ca în figura R.16.2, *c*.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă deci puterea maximă corespunzătoare punctelor C' și C pentru care :

$$i_e = 4{,}2\text{A}, E = 188\text{ V}, I_s = \frac{50}{0{,}1} = 500\text{ A}; U = E -$$

$$- r_i (I_s + i_e) = 137{,}6\text{ V}, R_s = \frac{U}{I_s} = 0{,}275\Omega.$$

16.3. Din cele două caracteristici $E = \rho i_e$ și $I_{sc} = \beta i_e$ rezultă o rezistență echivalentă internă

$$\frac{E}{I_{sc}} = \frac{\rho}{\beta} = \frac{200}{100} = 2\Omega.$$

diferită de rezistența măsurată la perii cînd mașina se află în repaus $r_i = 0{,}7\Omega$.

Diferența $\frac{\rho}{\beta} - r_i = \alpha$ are dimensiunea unei rezistențe dar este denumită coeficient de reacție a indusului. Coeficientul α este determinat în special de componenta longitudinală a reacției indusului (influențată de decalajul periilor față de axa neutră) și de starea de saturație a circuitului magnetic.

Conform schemei echivalente din figura R.16.3, *a* la funcționarea în scurt-circuit avem $E = \frac{\rho}{\beta} I_{sc} = (r_i + \alpha) \cdot I_{sc}$; pentru cazul funcționării în sarcină, la căderea de tensiune internă $(r_i + \alpha) I$ vom aduna tensiunea la borne U,

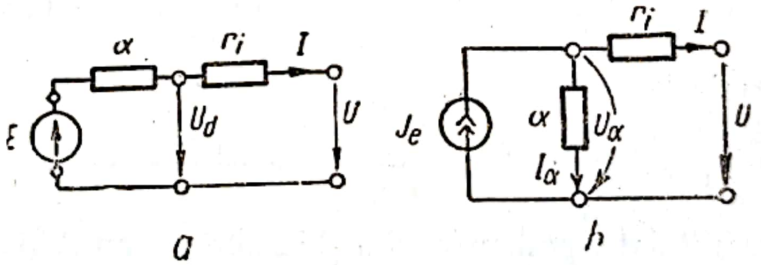


Fig. R.16.3 *a, b*

spre a obține aceeași tensiune electromotoare E, conform ecuației $E = (r_i + \alpha) I + U$.

Folosind teorema surselor echivalente se deduce schema echivalentă cu sursă de curent din figura R.16.3, *b*.

Relația de proporționalitate dintre curentul de excitație i_e și curentul echivalent al sursei de curent I_e rezultă astfel :

$$I_e = \frac{E}{\alpha} = \frac{\rho}{\alpha} i_e = k \cdot i_e.$$

Coeficientul $k = \frac{\rho}{\alpha}$ stabilește o echivalență între curenții inductor (excitație) și indus (sarcină), care ar produce același flux magnetic, indiferent de starea circuitului (saturat sau nesaturat).

Scanned with OKEN Scanner

În mod similar, curenților I_a și I le vor corespunde deci curenții de excitație echivalenți $i_a = \frac{I_a}{k}$, $i = \frac{I}{k}$ și reciproc.

La funcționarea saturată este mai sugestivă schema echivalentă cu sursă de curent (fig. R.16.3, *b*) deoarece rezistența fictivă (echivalentă) este influențată de valoarea fluxului rezultant corespunzător tensiunii $U_a = U + rI$.

În cazul datelor din problemă avem :

$$\alpha = \frac{\rho}{\beta} - r_i = 1{,}3\Omega, \quad k = \frac{\rho}{\alpha} = 65.$$

2. Pentru schema echivalentă a generatorului cu sursă de curent se pot scrie următoarele ecuații de tensiuni și curenți :

$$U_a - U = r_i I, \quad I_e - I = I_a.$$

Tensiunea U_a este proporțională cu fluxul magnetic rezultant, iar curentul I_a este proporțional cu tensiunea magnetomotoare rezultantă. Curentului I_a îi corespunde un curent de excitație $i_a = I_a \frac{\alpha}{\rho}$. Caracteristica de mers în gol $U = f(i_e)$ reprezintă totodată funcția $U_a = f(i_a)$ și la altă scară caracteristica volt-amper neliniară $U_a = f(I\alpha)$ a rezistenței fictive α.

Din raportul :

$$\frac{U_a - U}{I_e - I_a} = \frac{U_a - U}{I} = r_i = \frac{U_a - U}{i \cdot \frac{\alpha}{\rho}} = \frac{U_a - U}{\frac{\alpha}{\rho}(i_e - i_a)}.$$

rezultă expresia pantei :

$$r_i \frac{\rho}{\alpha} = \frac{U_a - U}{i_e - i_a} = \frac{U_a - U}{i},$$

cu care este înclinată ipotenuza triunghiului de sarcină ABC (fig. R.16.3, *c*). Această ipotenuză proporțională cu valoarea curentului de sarcină $I = \frac{\alpha}{\rho} \cdot i$ se folosește la construirea curbelor caracteristice de funcționare a generatorului de curent continuu. Ea unește punctele A și B de coordonate (U_a, i_a), respectiv (U, i_e) din figura R.16.3, *c*.

Pentru cazul problemei date rezultă înclinarea ipotenuzei AB,

$$r_i \frac{\rho}{\alpha} = 45{,}5V/A.$$

Caracteristica în sarcină $U = f(i_e)$ din figura R.16.3, *c* pentru curent constant de sarcină $I = 85$ A rezultă pe baza ecuațiilor

$$U = U_a - r_i \frac{\rho}{\alpha} i; \quad i_e = i_a + i.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din punctele A ale caracteristicii de mers în gol se duc segmente AB paralele și egale, care determină puncte B ale caracteristicii căutate.

Pentru *caracteristica externă* $U = f(I)$ la $i_e = 6$ A, segmentele paralele AB din figura R.16,3, *c* au punctul B situat pe ordonata de abscisă $i_e = 6$ A.

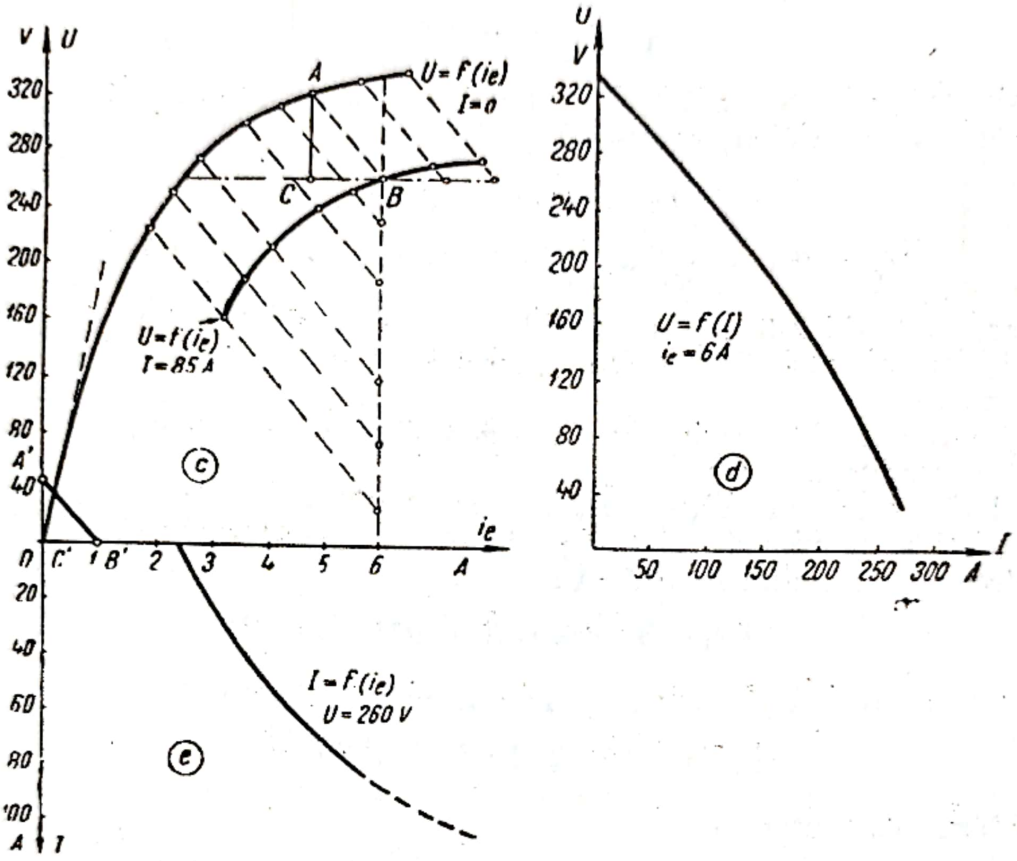


Fig. R.16.3, *c*, *d*, *e*

Lungimea segmentelor AB este proporțională cu valorile curenților I, iar punctele B determină pe ordonată valorile tensiunii U.

S-a trasat astfel caracteristica externă în figura R.16.3,*d*.

Caracteristica de reglaj $I = f(i_e)$ pentru $U = 260$ V se construiește asemănător, impunînd punctelor B situarea pe orizontala corespunzătoare valorii ordonatei $U = 260$ V (fig. R.16.3, *c*).

Diversele segmente AB proporționale cu valorile curenților I corespund valorilor curenților de excitație i_e determinați de abscisele punctelor B.

S-a trasat astfel caracteristica de reglaj în figura R.16,3, *e*.

16.4. Rezistența indusului la temperatura $\theta_2 = 80°C$ se determină cu formula:

$$r_{\theta 2}(1 + 0{,}0425 \cdot \theta_2) = r_{\theta 1}(1 + 0{,}0425\theta_1)$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$r_{\theta_2} = r_{\theta_1} \frac{235 + \theta_1}{235 + \theta_2}.$$

Pentru datele problemei rezultă:

$$r_{\theta_2} = 0{,}49\,\Omega.$$

Tensiunea necesară la mersul în gol pentru aceeași tensiune electromotoare, ca la mersul în sarcină, rezultă din ecuația:

$$U_0 = r_{20} I_0 = U - r_{80} I;$$

$$U_0 = 220 - (30 - 1) \cdot 0{,}49 + 0{,}4 \cdot 1{,}5 = 205{,}2 \text{ V}.$$

Puterea absorbită la mersul în gol este practic egală cu pierderile în fier, mecanice și în circuitul de excitație, considerate și la mersul în sarcină pierderi constante.

La funcționarea în sarcină vor interveni deci suplimentar numai pierderile Joule în circuitul indusului.

Pierderile constante sînt $\Delta P_0 = U_0 I_0 + U i_e = 307 + 220 = 527$ W.

La sarcina nominală, pierderile în indus sînt determinate de curentul prin circuitul indusului $I = 29$ A:

$$\Delta P_j = r I^2 = 0{,}49 \cdot 29^2 = 412 \text{ W}.$$

Puterea absorbită de motor la sarcina nominală este:

$$P_a = UI = 220 \cdot 30 = 6\,600 \text{ W}.$$

Pierderile de putere sînt:

$$\Delta P = \Delta P_0 + \Delta P_j = 527 + 412 = 939 \text{ W}.$$

Verificăm puterea utilă din datele problemei:

$$P_u = 6\,600 - 939 = 5\,661 \text{ W}.$$

Deoarece puterea utilă dată este de 5 560 W, mai mică decît cea rezultată din calcul, rezultă pierderile suplimentare $P_s = 5\,661 - 5\,560 = 101$ W. Pe acestea le considerăm proporționale cu pătratul curentului și deci determinăm o rezistență echivalentă de calcul a pierderilor suplimentare

$$\Delta r = \frac{101}{29^2} = 0{,}12\,\Omega.$$

Aceasta se va însuma la rezistența indusului spre a determina rezistența de calcul $r_c = 0{,}49 + 0{,}12 = 0{,}601\,\Omega$ care se va folosi ulterior în expresia randamentului.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă randamentul:

$$\eta = \frac{UI - \Delta P_0 - r_c I^2}{UI} = 1 - \frac{\Delta P_0}{UI} - \frac{r_c I}{U} = 0{,}84.$$

Pentru curent de sarcină I variabil se obține valoarea maximă la anularea derivatei $\frac{d\eta}{dI}$. Rezultă condiția $\Delta P_0 = r_c I^2$, adică pierderile variabile egale cu cele constante.

Prin urmare, randamentul maxim corespunde curentului de sarcină:

$$I = \sqrt{\frac{\Delta P_0}{r_c}} = \sqrt{\frac{527}{0{,}601}} = 29{,}6 \text{ A}.$$

În general, motoarele se proiectează astfel încît randamentul să fie maxim la o sarcină mai mică decît cea nominală.

Pentru celelalte sarcini se folosește formula:

$$\eta = 1 - \frac{\Delta P_0}{U} \cdot \frac{1}{I} - \frac{r_c}{U} I = 1 - \frac{2{,}4}{I} - 2{,}73 \cdot 10^{-3} I.$$

Rezultă:

$$\eta^3/_4 = 0{,}831; \quad \eta^1/_2 = 0{,}796; \quad \eta^1/_4 = 0{,}651.$$

16.6. 1. Rezistența nominală a motorului se definește astfel:

$$R_n = \frac{U_n}{I_n - i_{en}} = \frac{220}{50} = 4{,}4\Omega.$$

Rezistența indusului este deci $r_i = 0{,}05 \cdot 4{,}4 = 0{,}22\Omega$.

Tensiunea electromotoare rezultă din ecuația:

$$E_n = U_n - r(I_n - i_{en}) = 220 - 0{,}22 \cdot 50 = 209\text{V}.$$

2. Cuplul nominal util:

$$M_{nu} = \frac{P_n}{\Omega_n} = \frac{9{,}6 \cdot 10^3}{\frac{\pi}{30} \cdot 500} = 183\text{Nm} = 18 \text{ kgm}.$$

3. Cuplul electromagnetic (transmis rotorului) corespunde puterii electrice $P_e = EI$:

$$M_{en} = \frac{E_n (I_n - i_{en})}{\Omega_n} = \frac{209 \cdot 50}{\frac{\pi}{30} 500} = 200 \text{ Nm}.$$

Diferența dintre cuplul electromagnetic și cel util (la arbore) reprezintă aproximativ cuplul de mers în gol:

$$M_0 = M_{en} - M_{nu} = 17 \text{ Nm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4. Ecuația caracteristicii cuplu-turație rezultă prin eliminarea curentului I din ecuațiile :

$$U = E + r_i I = k\Omega\Phi + r_i I;$$
$$M_e = k\Phi I.$$

Se obține :

$$M_e = k\Phi \frac{U - k\Phi\Omega}{r_i} = k\Phi \frac{U}{r_i} - (k\Phi)^2 \cdot \frac{\Omega}{r_i}$$

sau

$$\Omega = \frac{U}{k\Phi} - M_e \frac{r_i}{(k\Phi)^2}.$$

Dacă se pune în evidență alunecarea $s = \frac{\Omega_0 - \Omega}{\Omega_0}$, unde $\Omega_0 = \frac{U}{k\Phi}$ este viteza de mers în gol ideal (pentru $M_e = 0$) rezultă expresiile :

$$s = \frac{M_e}{U(k\Phi)} r_i \text{ sau } M_e = s(k\Phi) \frac{U}{r_i}.$$

Pentru valorile nominale rezultă :

$$k\Phi_n = \frac{E_n}{\Omega_n} = \frac{209}{\frac{\pi}{30} 500} = 4 \text{ Vs/rad.}$$

5. Ecuația cuplu-viteză unghiulară este următoarea :

$$M_e = 18{,}2\ U - 72{,}8\ \Omega.$$

La tensiunea nominală avem :

$$M_e = 4\,000 - 72{,}8\ \Omega; \quad \Omega = 55 - 0{,}01375\ M_e$$

sau

$$n = \frac{30}{\pi} \Omega = 525 - 0{,}1315\ M_e.$$

Pentru Φ variabil (parametru) ecuația caracteristicii mecanice se scrie sub forma :

$$n = \frac{2\,100}{k\Phi} - 2{,}1 \frac{M_e}{(k\Phi)^2}.$$

Pentru r_i variabil (parametru) ecuația se scrie sub forma :

$$n = 525 - 5{,}96\ r_i M_e.$$

Scanned with OKEN Scanner

Caracteristicile cerute se reprezintă ca în figura R.16.5 *a*, *b*, *c*.

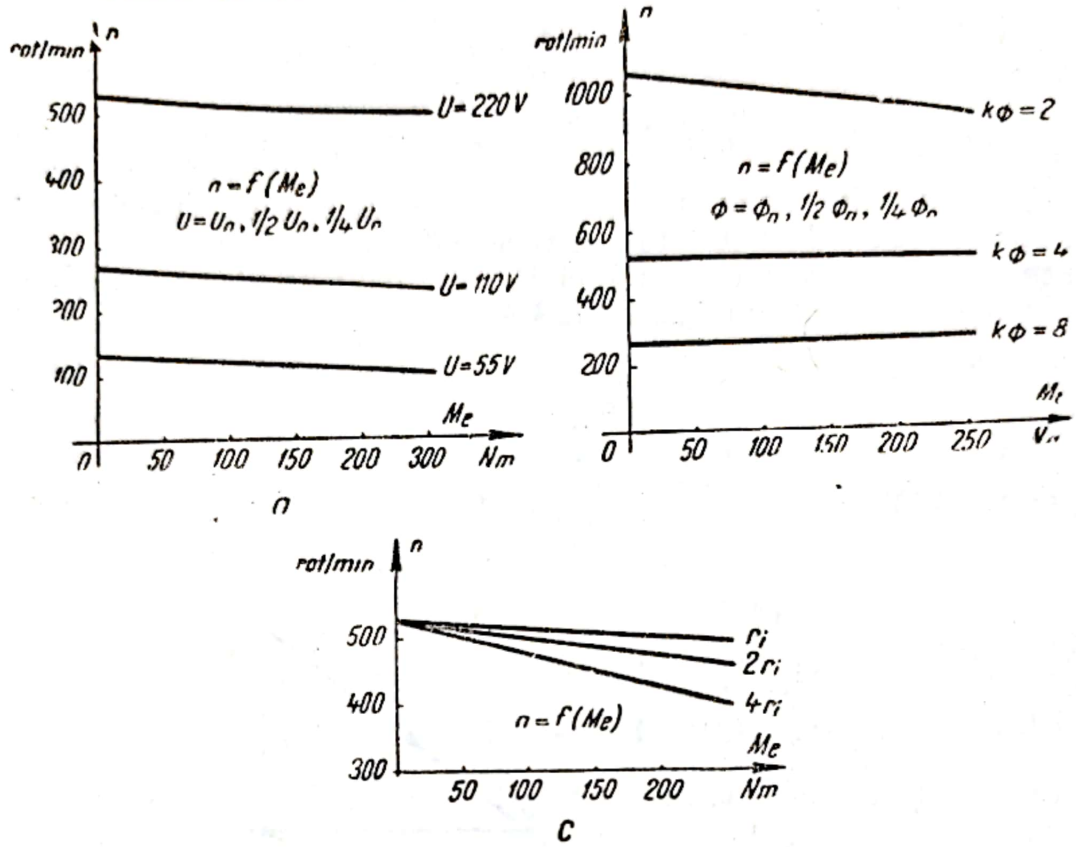


Fig. R. 16.6, *a*, *b*, *c*

6. Pentru valoarea cuplului electromagnetic egală cu cea de mers în gol (v. punctul 3) $M_{e_0} = 17$ Nm, rezultă $n_0 = 525 - 0{,}1315 \cdot 17 = 522{,}76$ rot/min.

16.7. Rezistența indusului are valoarea $r_i = \frac{5}{100} \cdot \frac{U_n}{I_n - i_{en}} =$ $= 0{,}22\ \Omega$. Curentul maxim admisibil în timpul pornirii este $I_{max} = 2{,}5\, I_n =$ $= 128$ A, iar cel minim $I_{min} = 1{,}15\ I_n = 58{,}6$ A.

Reostatul trebuie dimensionat astfel încît în timpul procesului tranzitoriu de pornire curentul să varieze între cele două limite, stabilindu-se în cele din urmă la valoarea curentului de sarcină. Pentru aceasta se folosește ecuația caracteristicii viteză-cuplu :

$$\Omega = \frac{U}{k\Phi} - M_e \frac{r_i}{(k\Phi)^2}.$$

Alunecarea $s = \frac{\Omega_0 - \Omega}{\Omega_0}$, unde $\Omega_0 = \frac{U}{k\Phi}$ este viteza de mers în gol ideal (pentru $M_e = 0$), are expresia :

$$s = \frac{M_e}{U\,(k\Phi)}\, r_i.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $M_e = k\Phi I$, expresia alunecării devine :

$$s = \frac{r_i}{U} \cdot I.$$

În planul (s, I) se trasează drepte $s = f(I)$ de ecuația $s = \frac{r_i}{U} I$, care permit urmărirea întregului proces necesară dimensionării diverselor trepte caracterizate prin valoarea totală a rezistenței R_i din circuit.

Cea mai mare valoare a rezistenței $R_i = R_0$ corespunde alunecării $s_0 = 1$ (turație nulă) și curentului $I_{max} = 128$ A.

Rezultă :

$$R_0 = \frac{s_0 \cdot U}{I_{max}} = 1{,}72\ \Omega.$$

În figura R.16.7 se poate observa dependența liniară a alunecării s de

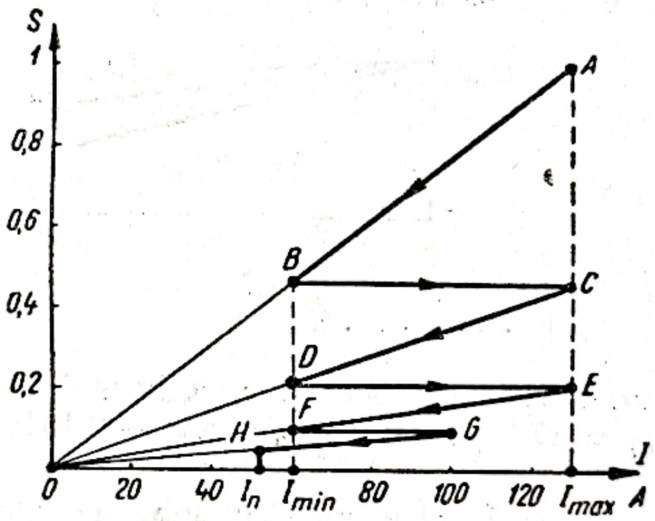


Fig. R.16.7

curentul I (dreapta OA), pînă cînd valoarea curentului devine $I_{min} = 58{,}6$ A (punctul B), iar alunecarea are valoarea :

$$s_1 = \frac{I_{min} \cdot R_0}{U} = \frac{I_{min}}{I_{max}} s_0 = 0{,}46.$$

Atunci este necesară schimbarea rezistenței reostatului încît

$$R_1 = s_1 \cdot \frac{U}{I_{max}} = s_1 R_0 = 0{,}79\ \Omega.$$

Dependența $s = f(I)$ se urmărește pe dreapta OC pînă cînd :

$$s = s_2 = \frac{I_{min} \cdot R_1}{U} = \frac{I_{min}}{I_{max}} s_1 = \left(\frac{I_{min}}{I_{max}}\right)^2 s_0 = 0{,}21.$$

Noua valoare a rezistenței va fi:

$$R_2 = s_2 \frac{U}{I_{max}} = s_2 R_0 = 0{,}36\ \Omega.$$

Se remarcă ușor schimbarea în progresie geometrică a rezistenței din circuit, conform expresiei:

$$R_i = R_0 \left(\frac{I_{min}}{I_{max}}\right)^i.$$

Deci,

$$R_3 = R_0 \left(\frac{I_{min}}{I_{max}}\right)^3 = 1{,}72 \cdot 0{,}096 = 0{,}165\ \Omega < r_i = 0{,}22\ \Omega.$$

Prin urmare, procesul schimbării reostatului se oprește la treapta a doua (la treapta a treia rezistența circuitului ar trebui să fie mai mică decît rezistența indusului mașinii, ceea ce este imposibil).

Valorile rezistențelor reostatului vor fi, deci:

$$R_{p0} = R_0 - r_i = 1{,}72 - 0{,}22 = 1{,}5\ \ \Omega;$$
$$R_{p1} = R_1 - r_i = 0{,}79 - 0{,}22 = 0{,}57\ \ \Omega;$$
$$R_{p2} = R_2 - r_i = 0{,}36 - 0{,}22 = 0{,}14\ \ \Omega.$$

În momentul scoaterii din circuit a reostatului (punctul F) alunecarea are valoarea:

$$s_3 = s_2 \frac{I_{min}}{I_{max}} = 0{,}097.$$

Curentul maxim va fi:

$$I_m = s_3 \frac{U}{r_i} = 0{,}097 \frac{220}{0{,}22} = 97\ \text{A(punctul G)}.$$

Procesul se stabilizează în punctul H, cînd curentul are valoarea $I_n = 51$ A, iar alunecarea $s_n = \frac{I_n}{U} r_i = 0{,}051$.

16.8. Ecuația cuplu-viteză a motorului de curent continuu se scrie sub forma:

$$M_e = \frac{U}{R_i}(K\Phi) - \Omega \frac{(k\Phi)^2}{R_i}.$$

Ecuația mișcării rotorului este:

$$J \frac{d\Omega}{dt} + M_r = M_e.$$

Scanned with OKEN Scanner

S-a notat prin M_r cuplul rezistent, $M_r = 200$ Nm.

Eliminînd M_e între cele două ecuații anterioare rezultă ecuația generală a mișcării în regim tranzitoriu:

$$J \frac{R_i}{(k\Phi)^2} \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \frac{U}{(k\Phi)} - M_r \frac{R_i}{(k\Phi)^2}.$$

Mărimea $T_i = J \frac{R_i}{(k\Phi)^2}$ este denumită constanta electromecanică de timp a motorului.

Pentru prima valoare a rezistenței reostatului de pornire, $R_i = R_0 = 1{,}72\ \Omega$, rezultă $T_0 = 4{,}65 \frac{1{,}72}{16} = 0{,}5$ s.

$$\frac{U}{k\Phi} = \frac{220}{4} = 55; \quad M_r \frac{R_0}{(k\Phi)^2} = 200 \cdot \frac{1{,}72}{16} = 21{,}5.$$

Prin urmare, ecuația diferențială a mișcării este următoarea:

$$0{,}5 \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = 33{,}5.$$

Soluția acestei ecuații este $\Omega = 33{,}5 \left(1\text{-}e^{-\frac{t}{0{,}5}}\right)$.

Comutarea rezistenței reostatului se va face cînd curentul $I = I_{min} = 58{,}6$ A (v. problema 16.6), adică la valoarea vitezei:

$$\Omega = \frac{U - R_0 I_{min}}{k\Phi} = 29{,}8 \text{ rad/s}.$$

Rezultă:

$$t_1 = 0{,}5 \ln \frac{33{,}5}{33{,}5 - 29{,}8} = 1{,}1.$$

Pentru prima treaptă a reostatului, la $R_1 = 0{,}79$ avem:

$$T_1 = T_0 \frac{R_1}{R_0} = 0{,}225 \text{ s}, \quad M_r \frac{R_1}{(k\Phi)^2} = 9{,}9.$$

Ecuația diferențială a mișcării este următoarea:

$$0{,}225 \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = 55 - 9{,}9 = 45{,}1.$$

Soluția acesteia, cu condiția inițială $\Omega_1 = 29{,}8$ rad/s, este:

$$\Omega = 29{,}8 + (45{,}1 - 29{,}8)\left(1\text{-}e^{-t/0{,}235}\right) = 29{,}8 + 25{,}3\left(1\text{-}e^{-t/0{,}235}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Comutarea ulterioară va avea loc la:

$$\Omega_2 = \frac{U - R_1 I_{min}}{k\Phi} = 43{,}4 \text{ rad/s}$$

pentru timpul:

$$\Delta t_2 = 0{,}235\ I_n \frac{43{,}4 - 29{,}8 - 25{,}3}{25{,}3} = 0{,}174 \text{ s}$$

și deci

$$t_2 = t_1 + \Delta t_2 = 1{,}274 \text{ s.}$$

Pentru treapta a doua a reostatului la $R_2 = 0{,}36\ \Omega$ avem:

$$T_2 = T_0 \frac{R_2}{R_0} = 0{,}103 \text{ s}, \quad M_n \frac{R_2}{(k\Phi)^2} = 4{,}5.$$

Soluția ecuației diferențiale:

$$0{,}105 \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = 55 - 4{,}5 = 51{,}5,$$

cu condiția inițială $\Omega_2 = 43{,}4$ este:

$$\Omega = 43{,}4 + (51{,}5 - 43{,}4)\left(1\text{-e}^{-t/0{,}103}\right) = 43{,}4 + 8{,}1\left(1\text{-e}^{-t/0{,}103}\right)$$

Scurtcircuitarea reostatului de pornire va avea loc la

$$\Omega_3 = \frac{U - R_2 I_{min}}{(k\Phi)} = 49{,}6,$$

pentru timpul

$$\Delta t_3 = 0{,}23 \ln \frac{8{,}1}{8{,}1 - 6{,}2} = 0{,}153 \text{ s}$$

și deci:

$$t_3 = t_2 + \Delta t_3 = 1{,}427 \text{ s.}$$

Urmează regimul tranzitoriu cu constanta de timp

$$T_3 = T_0 \frac{r_i}{R_0} = 0{,}063 \text{ s},$$

de la viteza inițială 49,6 rad/s la cea finală de 52,3 rad/s, conform ecuației:

$$0{,}063 \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = 52{,}3.$$

Rezultă $\Omega = 49{,}6 + (52{,}3 - 49{,}6)\left(1\text{-e}^{-t/0{,}0623}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

Valoarea $\Omega = 52{,}3$ se realizează teoretic într-un timp infinit.
Reprezentarea grafică a procesului tranzitoriu de variație a vitezei unghiu-

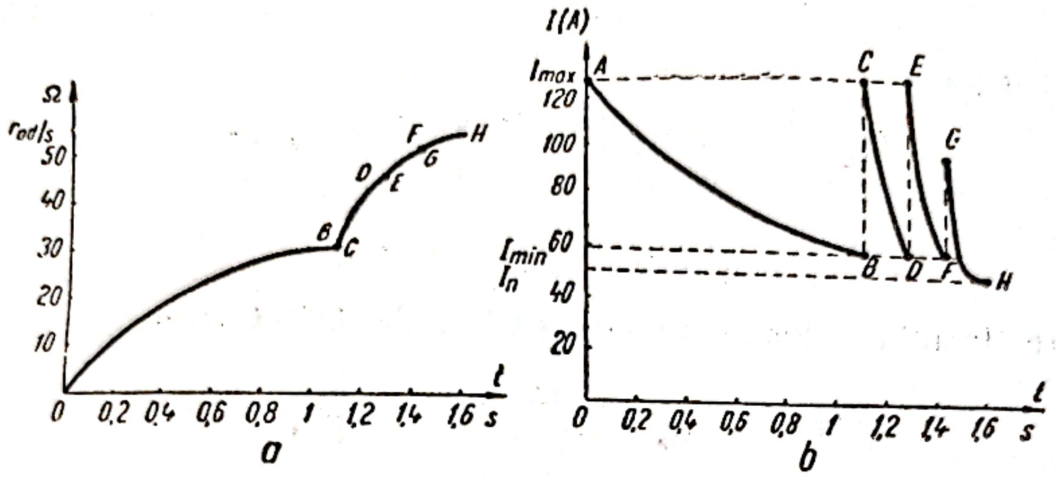


Fig. R.16.8, *a*, *b*

lare este redată în figura R.16. 8 *a*, iar în figura R. 16.8 *b* se reprezintă procesul tranzitoriu de variație a curentului :

$$I = \frac{U}{R_i} - \frac{\Omega}{\Omega_0}\,\frac{U}{R_i}.$$

REZOLVĂRI ȘI INDICAȚII LA CAPITOLUL 17

17.2. Densitatea de curent produsă de o mișcare ordonată a electronilor cu viteza medie $\bar{v}_E$ este :

$$\bar{J} = -n\,e_0\,\bar{v}_E.$$

De aici rezultă

$$v_E = \frac{I}{ne_0S} = 0{,}0785 \text{ mm/s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

17.3. Pentru a fi emis un electron trebuie să aibă energia cinetică egală cel puțin cu lucrul de extracție:

$$\frac{mv^2}{2} = e_0 \varphi,$$

de unde

$$v = \sqrt{\frac{2e_0\varphi}{m}} = 1\,280 \text{ km/s}.$$

17.5. Logaritmînd și derivînd relația Richardson-Dushman (17.1 *b*) se obține pentru o variație finită mică:

$$\frac{\Delta J_e}{J_e} = \left(2 + \frac{e_0\varphi}{kT}\right)\frac{\Delta T}{T}.$$

17.6. Pentru un curent $I_A = 110$ mA prin diodă, se găsește pe caracteristică o tensiune $U_A = 12$ V și utilizînd ecuația (17.2 *b*) rezultă $E_A = 23$ V.

17.7. Puterea debitată de sursă este $P_E = E_A \cdot I_A = 2{,}53$ W, iar puterile disipate în rezistență și în diodă sînt: $P_R = R_A I_A^2 = 1{,}21$ W și respectiv $P_A = U_A I_A = 1{,}32$ W.

17.8. Punctul de funcționare se determină grafic pe caracteristici, intersectînd reprezentările ecuațiilor (17.2 *a*) și (17.2 *b*), cum se indică în breviar. Coordonatele punctului de funcționare precizează curentul și tensiunea diodei. Tensiunea maximă a sursei de alimentare se găsește ținînd seamă că dreapta de sarcină se deplasează paralel cu ea însăși dacă se schimbă E_A fără a se modifica R_A.

17.10. Secțiunile diodei fiind legate în paralel, curentul debitat de sursă este dublul curentului printr-o secțiune a diodei.

17.13. Se utilizează relația de definiție (17.2 *d*).

17.16. Se utilizează schema echivalentă a diodei din figura B.17.4 *a*, în care $R_i \simeq 80\ \Omega$ pentru dioda UY21. Tensiunea la bornele rezistenței de sarcină este:

$$u = \frac{R_s}{R_i + R_T + R_s} e,$$

iar valoarea ei medie, conform relației (17.7):

$$U_0 = \frac{R_s}{R_i + R_T + R_s} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot E = 93{,}5 \text{ V}.$$

Scanned with OKEN Scanner

17.17. Utilizînd relația (17.8) rezultă valoarea eficace a tensiunii electromotoare din secundar:

$$E_s = \frac{R_i + R_S}{R_S} U = \frac{R_i + R_S}{R_S} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} U_0 = 295 \text{ V}$$

și de aici raportul de transformare al transformatorului $n = 2{,}45$.
Pentru dubla diodă 6 Ц 5C s-a calculat $R_i \simeq 160\ \Omega$ (v. problema 17.13).

17.18. Rezistența în conducție a diodei se neglijează față de rezistența de sarcină $R_S = 1\ \text{k}\Omega$.

17.20. Pentru calculul variațiilor mici de tensiune tubul stabilizator se poate înlocui cu rezistența sa dinamică. Variația tensiunii la ieșire va fi:

$$\Delta U_2 = \frac{R_d}{R + R_d} \Delta U_1 \simeq 0{,}48 \text{ V}.$$

17.22. Se intersectează dreapta de sarcină $U_A = E_A - R_A I_A$ cu caracteristica triodei corespunzătoare tensiunii de grilă $U_G = -8$ V pentru cazul *a* și respectiv $U_G = 0$ V pentru cazul *b*. Se găsesc astfel punctele M și N din figura 17.22 *a*.

17.23. Dreapta de sarcină intersectează axa absciselor în punctul E_A, iar axa ordonatelor în punctul $\frac{E_A}{R_A}$.

17.25. Cînd pe grilă se aplică o tensiune sinusoidală de amplitudine $U_{g\,max}$, aceasta se însumează cu tensiunea de polarizare U_G. Ca urmare, punctul de funcționare se deplasează de-a lungul dreptei de sarcină de la caracteristica corespunzătoare tensiunii de grilă $u_{G\,min} = U_G - U_{g\,max} = -10$ V, la cea corespunzătoare tensiunii $u_{G\,max} = U_G + U_{g\,max} = -6$ V. În figura 17.22 *a* punctul de funcționare oscilează între M' și M''. Amplitudinea tensiunii sinusoidale din anod este:

$$U_{a_{max}} = u_A(M) - u_A(M') = u_A(M'') - u_A(M) \simeq 30 \text{ V},$$

iar amplificarea montajului, conform relației (17.10 *g*), este:

$$A = \frac{U_{a\,max}}{U_{g\,max}} \simeq 15.$$

17.26. Se utilizează relațiile de definiție (17.10 *a*) și (17.10 *c*).

Scanned with OKEN Scanner

17.27. Schema echivalentă este cea din figura B17.14 *a* din breviar, iar amplificarea se calculează cu relația (17.10 *h*). Se va observa concordanța cu rezultatul problemei 17.25.

17.28. Ecuațiile de funcționare în curent continuu ale triodei sînt :

$$E_A = U_A + (R_A + R_C)\, I_A;$$
$$U_G = -R_C I_A.$$

Din a doua ecuație se obține $R_C = 2{,}5\ \text{k}\Omega$, iar din prima $R_A = 122\ \text{k}\Omega$. Rezistența de grilă se alege de obicei $R_G = 1\ \text{M}\Omega$.

Condensatoarele se aleg astfel ca reactanța lor să fie neglijabilă față de rezistențele cu care sînt în paralel sau în serie :

$$C_C \geqslant \frac{10}{\omega R_c} = 0{,}64\ \mu\text{F}.$$

Se alege :

$$C_C = 1\ \mu F.$$

Similar :

$$C_A = C_G \geqslant \frac{10}{\omega R_G} = 1{,}6\ \text{nF}$$

și se ia

$$C_A = C_G = 2\text{nF}.$$

Amplificarea calculată, cu relația (17.10 *h*), este :

$$\underline{A} = -\frac{\mu R_A}{R_A + R_i} = -58.$$

Semnul minus arată că tensiunea anodică și tensiunea de grilă sînt în antifază.

17.29. Schema echivalentă este cea din figura R.17.29; rezistența R_C nu mai este scurtcircuitată și, ca urmare, intervine și în curent alternativ.

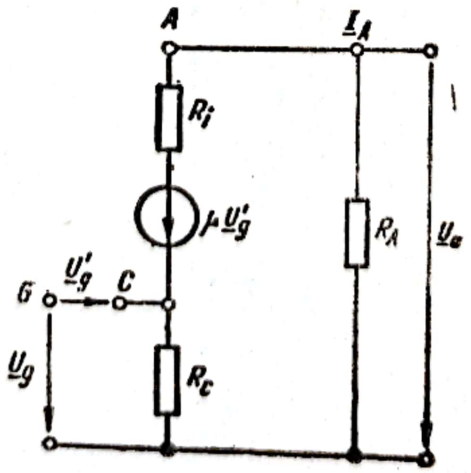


Fig. R.17.29

Tensiunea alternativă aplicată efectiv între grilă și catod este în acest caz :

$$\underline{U}'_g = \underline{U}_g - R_C \underline{I}_a.$$

Tensiunea la ieșirea circuitului este tensiunea $\underline{U}'_g$ amplificată :

$$\underline{U}_a = -R_A \underline{I}_a = R_A \frac{-\mu \underline{U}'_g}{R_i + R_A + R_C} \simeq \frac{-\mu R_A}{R_i + R_A} \underline{U}'_g = \underline{A} \underline{U}'_g,$$

unde $\underline{A}$ este amplitudinea circuitului cînd R_C nu intervine. De aici rezultă :

$$\underline{U}'_g = \underline{U}_g + \frac{R_C}{R_A} \underline{U}_a \text{ și } \underline{U}'_g = \frac{\underline{U}_a}{\underline{A}},$$

de unde amplificarea montajului în urma reacției este :

$$\underline{A}' = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_g} = \frac{\underline{A}}{1 + \frac{R_C}{R_A} \underline{A}} = \frac{\underline{A}}{1 - \beta \underline{A}}$$

$\beta = -\frac{R_C}{R_A} = -0{,}02$ este *reacția negativă* datorită rezistenței R_C.

În problema 17.28 s-a găsit $\underline{A} = 58$ și, calculînd, găsim $\underline{A}' = 27$.

17.30. Tensiunea de ieșire este $\underline{U}_c = R_C \underline{I}_c$; tensiunea efectiv aplicată între grilă și catod este $\underline{U}'_g = \underline{U}_g - R_C \underline{I}_c$, iar amplificarea $\underline{A} = \frac{\underline{U}_c}{\underline{U}_g}$.

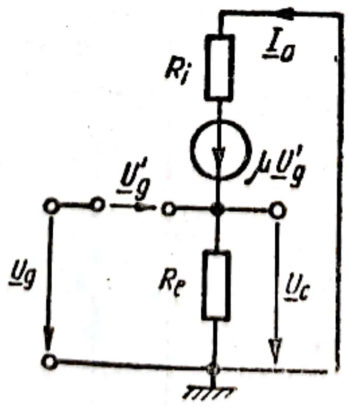


Fig. R.17.30

17.31. Curentul prin circuit trece după aprinderea tiratronului, ca urmare a sosirii impulsului de comandă, pînă la stingerea aces-

Scanned with OKEN Scanner

tuia, datorită inversării tensiunii anodice (v. fig. R.17.31). Valoarea medie a curentului anodic, pentru $\tau < \frac{T}{2}$, va fi :

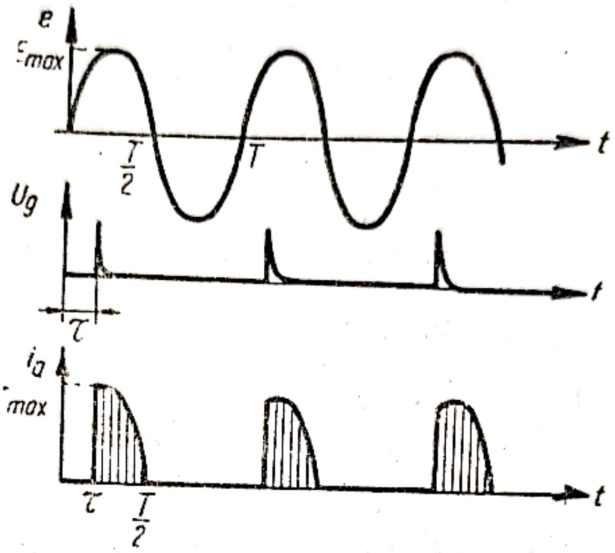


Fig. R.17.31

$$I_{a0} = \frac{1}{T}\int_0^T i_a \, dt = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} I_{a\,max} \sin \omega t \, dt = \frac{1}{2\pi} I_{a\,max} [1 + \cos \omega\tau] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{E_{a\,max}}{R_s} [1 + \cos \omega\tau].$$

Pentru $\tau > \frac{T}{2}$, $I_{a0} = 0$.

17.32. Punctului de funcționare M îi corespund $U_A = 124$ V; $I_A = 7{,}7$ mA; $U_G = -2$ V; $U_E = 120$ V; $I_E = 2{,}5$ mA; $U_S = 0$.
Rezistența din catod este, conform relațiilor (17.13 *c*) și (17.13 *e*), următoarea :

$$R_C = \frac{-U_G}{I_A + I_E} = 196\ \Omega \simeq 200\ \Omega.$$

Rezistența anodică se calculează din relațiile (17.13 *b*) și (17.13 *c*)

$$R_A = \frac{E_A - U_A + U_G}{I_A} = 9{,}7\ \text{k}\Omega \simeq 10\ \text{k}\Omega.$$

Rezistența de polarizare a ecranului se obține din relația (17.13 *d*)

$$R_E = \frac{E_A - U_E + U_C}{I_E} = 31{,}2\ \text{k}\Omega \simeq 33\ \text{k}\Omega.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rotunjind valorile calculate se aleg cele mai apropiate valori standard. Condensatoarele se aleg ca în cazul triodei, astfel ca reactanța lor să fie de cel puțin zece ori mai mică decît rezistența cu care se compară.

Rezultă, similar: $C_C \geqslant 80$ μF; $C_E \geqslant 4{,}8$ μF; $C_A = C_G \geqslant 16$ nF.

Se aleg valorile $C_C = 100$ μF; $C_E = 6$ μF; $C_A = C_G = 20$ nF.

17.33. Vezi problema 17.25.

17.34. Se utilizează relațiile de definiție (17.10 *a*) și (17.10 *b*).

17.35. Vezi problema 17.32.

17.36. Puterea utilă se consideră puterea de curent alternativ disipată în rezistența anodică.

17.37. Inductivitatea nu contează în curent continuu, astfel încît rezistența anodică fiind nulă, dreapta de sarcină este verticală.

17.38. Pentru schema echivalentă din figura R.17.38 se pot scrie ecuațiile:

$$\underline{I}_a = S\underline{U}_g$$

$$\underline{U}_a = -j\omega L\underline{I}_a = \omega L\underline{I}_a e^{-j\frac{\pi}{2}},$$

de unde:

$$\Delta i_A = i_a = SU_{g\,max} \sin \omega t = I_{a\,max} \sin \omega t;$$

$$\Delta u_A = u_a = \omega LSU_{g\,max} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -U_{a\,max} \cos \omega t.$$

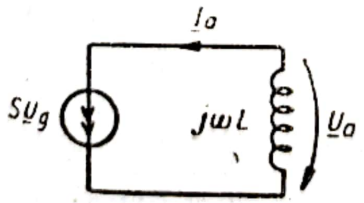


Fig. R.17.38

Locul geometric va fi elipsa din figura 17. 37 *a*, de ecuație:

$$\left(\frac{i_a}{I_{a\,max}}\right)^2 + \left(\frac{u_a}{U_{a\,max}}\right)^2 = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

și semiaxe :

$$I_{a\,max} = 0{,}9 \text{ mA și } U_{a\,max} = 90 \text{ V}.$$

17.39. Se utilizează metoda expusă în paragraful 17.14 din breviar.

17.40. Se înlocuiește transistorul cu schema sa echivalentă din figura B.17.23 din breviar și se obține schema din figura R.17.40.

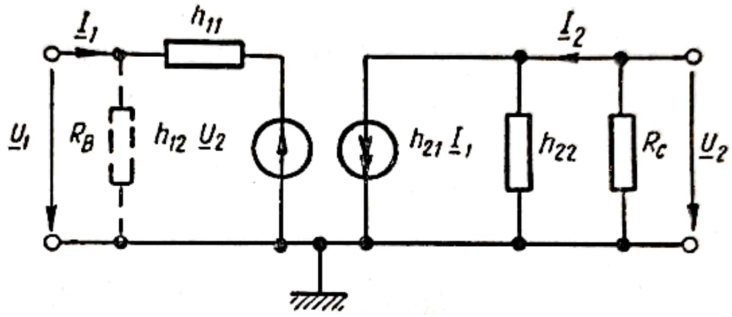


Fig. R.17.40

17.41. Se consideră aplicată la intrarea circuitului echivalent din figura R.17.40 o tensiune Δu_1 și se calculează Δu_2, Δi_2 și Δi_1. Se găsesc apoi :

$$A_U = \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1},\quad A_i = \frac{\Delta i_2}{\Delta i_1} \text{ și } Z_{intr} = \frac{\Delta u_1}{\Delta i_1}.$$

17.42. Vezi figura R.17.42.

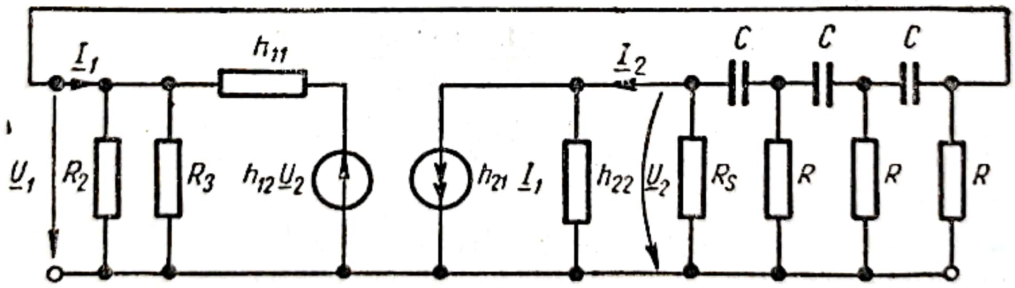


Fig. R.17.42

17.43. Dreapta de sarcină a circuitului este AB din figura 17.22 *a*. Curentul anodic fiind 4,4 mA, rezultă o tensiune de grilă $U_G = -4$ V. Căderea de tensiune pe rezistența R_G trebuie să fie $E_G - U_G = 4$ V.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă că prin rezistența $R_3 = 1$ MΩ și prin tubul fotoelectronic curentul trebuie să fie 4 μA. Pe caracteristicile din figura 17.43 *a* se găsește, corespunzător, $\Phi = 0{,}20$ lm.

REZOLVĂRI ȘI INDICAȚII LA CAPITOLUL 18

18.2. Din datele problemei rezultă:

$$s_{OL} = 9 \text{ mm}^2;$$

$$s_{Al} = 70 - 9 = 61 \text{ mm}^2.$$

Se calculează separat cele două rezistențe:

$$R_{OL} = \rho_{OL}\frac{l}{s_{OL}} = 188\,\frac{50}{9} = 1\,044 \ \Omega;$$

$$R_{Al} = 31{,}2\,\frac{50}{61} = 25{,}6 \ \Omega.$$

Rezistența echivalentă a conductorului:

$$R = \frac{R_{OL}\,R_{Al}}{R_{OL} + R_{Al}} = \frac{1\,044 \cdot 25{,}6}{1\,055 + 25{,}6} = 25 \ \Omega.$$

Deci rezistența electrică a unui conductor de OLAl este determinată de partea din Al. Părții de oțel îi revine rezistența la solicitările mecanice.

18.5. Curentul absorbit de lămpi:

$$I = \frac{nP_1}{U} = \frac{8 \cdot 100}{220} = 3{,}64 \text{ A}.$$

Căderea de tensiune după (18.3b) este:

$$U = \frac{2 \cdot l \cdot I}{\gamma \cdot s},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\gamma = 53$ m/Ω mm² pentru cupru. Rezultă secțiunea:

$$s = \frac{2 \cdot l \cdot I}{\gamma \cdot \Delta U} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 3 \cdot 3{,}64}{53 \cdot 5} = 0{,}55 \text{ mm}^2.$$

Secțiunea se va lua însă 1 mm², valoare minimă pentru instalațiile interioare.

Pentru siguranțele fuzibile, din scara valorilor indicate în 18.4 se alege primul curent superior:

$$I_f = 6 \text{ A}.$$

18.7. Se aplică relația (18.3 *b*):

$$\Delta U = \frac{2(I_1 l_1 + I_2 l_2)}{\gamma \cdot s},$$

unde $\gamma = 53$ m/Ω mm², pentru cupru.

Rezultă:

$$s = \frac{2(I_1 l_1 + I_2 l_2)}{\gamma \cdot \Delta U} = \frac{2(18{\cdot}2 \cdot 100 + 36{,}4 \cdot 100)}{53 \cdot 10} = 34{,}4 \text{ mm}^2,$$

unde

$$\Delta U = 220 - 210 = 10 \text{ V};$$

$$l_1 = 100 \text{ m};$$

$$l_2 = 200 \text{ m};$$

$$I_1 = \frac{P_1}{U} = \frac{4\,000}{220} = 18{,}2 \text{ A};$$

$$I_2 = \frac{P_2}{U} = \frac{8\,000}{220} = 36{,}4 \text{ A}.$$

Se va folosi conductor Cu 35.

18.9. În primul caz, după (18.3 *b*) secțiunea va fi:

$$s = \frac{2(l_1 I_1 + l_2 I_2)}{\gamma \cdot \Delta U} = \frac{2(40 \cdot 20 + 60 \cdot 10)}{53 \cdot 3{,}3} = 16 \text{ mm}^2,$$

secțiune care este normalizată (v. anexa 10).

Cînd secțiunea conductoarelor variază, trebuie aflat modul de distribuție a căderii de tensiune admisibile ΔU pe cele două tronsoane ale liniei. Presupunem pe prima porțiune de lungime l_1 o cădere de tensiune ΔU_1, iar pe a doua porțiune de lungime $l_2' = l_2 - l_1$ o cădere de tensiune $\Delta U_2 = \Delta U - \Delta U_1$.

Scanned with OKEN Scanner

Secțiunile conductoarelor din cele două tronsoane vor fi date de relațiile :

$$s_1 = \frac{2(I_1 + I_2)l_1}{\gamma \cdot \Delta U_1}; \qquad (a)$$

$$s_2 = \frac{2I_2 \cdot l_2'}{\gamma(\Delta U - \Delta U_1)}. \qquad (b)$$

Volumul conductoarelor care corespund acestor secțiuni este :

$$V = 2l_1 s_1 + 2l_2' s_2 = \frac{4(I_1 + I_2)l_1^2}{\gamma \Delta U_1} + \frac{4I_2 l_2'^2}{\gamma(\Delta U - \Delta U_1)}.$$

Pentru găsirea minimului se anulează derivata :

$$\frac{dV}{d(\Delta U_1)} = -\frac{4(I_1 + I_2)l_1^2}{\gamma \Delta U_1^2} + \frac{4I_2 l_2'^2}{\gamma(\Delta U - \Delta U_1)^2} = 0,$$

care se poate scrie :

$$-\frac{s_1^2}{I_1 + I_2} = -\frac{s_2^2}{I_2} = 0 \qquad \frac{s_1}{s_2} = \sqrt{\frac{I_1 + I_2}{I_2}}. \qquad (c)$$

Se înlocuiesc valorile numerice în (a), (b), (c) și se obține un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute :

$$s_1 = \frac{2 \cdot 30 \cdot 40}{53 \cdot \Delta U_1}; \quad s_2 = \frac{2 \cdot 10 \cdot 20}{53\,(3{,}3 - \Delta U_1)}; \quad \frac{s_1}{s_2} = \sqrt{\frac{30}{10}} = \sqrt{3}.$$

Se obține :

$$\Delta U_1 = 2{,}56 \text{ V}; \quad \Delta U_2 = 0{,}74 \text{ V};$$

$$s_1 = 17{,}7 \text{ mm}^2; \quad s_2 = 10{,}2 \text{ mm}^2.$$

Se pot folosi secțiunile de 16 și 10 mm², căderea de tensiune fiind cu puțin peste cea admisibilă $\Delta U = 3{,}55$ V.

18.11. În problema dată, avînd sarcini pur rezistive, calculul se face ca și în curent continuu. Tensiunea pe fază este :

$$U_1 = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127 \text{ V}.$$

Curentul pe fază este :

$$I_1 = \frac{\frac{n}{3} P_l}{U_1} = \frac{\frac{60}{3} \cdot 100}{127} = 15{,}75 \text{ A}.$$

Siguranțele fuzibile (după 18.4) se aleg cu un curent nominal $I_f = 20$ A.

Scanned with OKEN Scanner

Secțiunea conductorului de cupru este:

$$s = \frac{2 \cdot l \cdot I_1}{\gamma \cdot \Delta U} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 15{,}75}{53 \cdot 0{,}03 \cdot 127} = 7{,}8 \text{ mm}^2.$$

Se ia Cu 10.

În cazul conectării în triunghi:

$$I_{12} = \frac{\frac{n}{3} P_e}{U_{12}} = \frac{\frac{60}{3} \cdot 100}{220} = 9{,}1 \text{ A}.$$

Lipsind firul neutru, tensiunea pe fază este diminuată de circulația curentului $I_1 = \sqrt{3}\, I_{12} = 15{,}75$ A pe un singur conductor:

$$s' = \frac{l \cdot I_1}{\gamma \cdot \Delta U} = \frac{s}{2} = 3{,}9 \text{ mm}^2.$$

Se ia Cu 4.

18.12. Din anexa 10 pentru OL-Al 70 și pentru $d_m = 1\,500$ mm se găsește:

$$r_0 = 0{,}444 \ \Omega/\text{km} \quad x_0 = 0{,}364 \ \Omega/\text{km}.$$

Rezultă rezistența și reactanța liniei:

$$R = r_0 \cdot l = 0{,}444 \cdot 8 = 3{,}552 \ \Omega.$$
$$x = r_0 \cdot l = 0{,}364 \cdot 8 = 2{,}812 \ \Omega.$$

Consumatorul este caracterizat prin:

$$P = 2\,000 \text{ kW}; \ \cos \varphi = 0{,}8$$
$$Q = P \operatorname{tg} \varphi = 2\,000 \cdot 0{,}75 = 1\,500 \text{ kvar}.$$

Puterea care se transportă pe fază:

$$P_1 = 667 \text{ kW}; \ Q_1 = 500 \text{ kvar}.$$

Pe faza 1 vom avea căderea de tensiune, după relațiile (18.3 *e*):

$$\Delta U_1 = \frac{R P_1 + X Q_1}{U_1} = \frac{3{,}55 \cdot 667 + 2{,}8 \cdot 500}{5{,}78} = 660 \text{ V};$$

$$\delta U_1 = \frac{X P_1 - R Q_1}{U_1} = \frac{2{,}8 \cdot 667 - 3{,}55 \cdot 500}{5{,}78} = 26 \text{ V},$$

deoarece $U_1 = \frac{10}{3} = 5{,}78$ kV.

Scanned with OKEN Scanner

Între faze :

$$U_{12} = \sqrt{3}\, U_1 = \sqrt{3} \cdot 660 = 1\,140 \text{ V};$$

$$\delta U_{12} = \sqrt{3}\, \delta U_1 = \sqrt{3} \cdot 26 = 40 \text{ V}.$$

Se observă că, practic, putem neglija căderea de tensiune transversală δU. În acest fel, tensiunea la barele consumatorului va fi :

$$U_1 = 5\,780 - 660 = 5\,120 \text{ V pe fază};$$

$$U_{12} = 10\,000 - 1\,140 = 8\,860 \text{ V pe fază}.$$

Acest rezultat duce la concluzia, aplicată în practică, a necesității unei tensiuni sporite la stațiile de transformare ale consumatorilor, pe partea de joasă tensiune. În cazul dat, această tensiune ar fi de 11 kV.

18.13. Se ia în considerație căderea de tensiune longitudinală, calculînd-o separat pe cele două porțiuni, avînd în vedere caracteristicile diferite ale celor două tronsoane de linie și tranzitul de putere.

Se obține :

$$\Delta U_1 = 1\,970 \text{ V}; \quad \Delta U_2 = 2\,880 \text{ V între faze.}$$

$$\Delta U = 1\,970 + 2\,810 = 4\,780 \text{ V}.$$

Deci, la al doilea consumator :

$$U = 35\,000 - 4\,780 = 30\,230 \text{ V} = 30{,}23 \text{ kV}.$$

18.14. Se pot scrie relațiile :

$$I_A + I_B = I_1 + I_2; \qquad (a)$$

$$\Delta U_A = \frac{I_A \cdot l_1}{s \cdot \gamma} = \frac{I_B (l_2 + l_3) - I_2 l_2}{s \cdot \gamma}, \qquad (b)$$

care constituie un sistem de ecuații în I_A și I_B.

Rezultă :

$$I_A = \frac{I_1 (l_2 + l_3) + I_2 l_3}{L} = \frac{20 \cdot 70 + 30 \cdot 40}{90} \simeq 23 \text{ A};$$

$$I_B = \frac{I_1 l_1 + I_2 (l_1 + l_2)}{L} = \frac{20 \cdot 20 + 30 \cdot 50}{90} \simeq 21 \text{ A}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se calculează apoi :

$$s' = \frac{I_A \cdot l_1}{\gamma \cdot \Delta U} = \frac{29 \cdot 20}{53 \cdot 4} = 2{,}73 \text{ mm}^2,$$

$$s'' = \frac{I_3 \cdot l_3}{\gamma \cdot \Delta U} = \frac{21 \cdot 40}{53 \cdot 4} = 3{,}96 \text{ mm}^2.$$

Se alege conductorul Cu 4.

18.15. Cu ajutorul relației :

$$I_{n_k} = \frac{P_{nk}}{\sqrt{3}\, U_n \cos \varphi_k}$$

se găsesc curenții nominali ai motoarelor :

$$I_{n_1} = 3{,}8 \text{ A}; \; I_{n_2} = 3{,}56 \text{ A}; \; I_{n_3} = 4{,}75 \text{ A};$$

$$I_{n_4} = 6{,}1 \text{ A}; \; I_{n_5} = 7.16,$$

și, respectiv, curenții de pornire :

$$I_{p_1} = 11{,}4 \text{ A}; \; I_{p_2} = 10{,}68 \text{ A}; \; I_{p_3} = 13{,}1 \text{ A};$$

$$I_{p_4} = 24{,}4 \text{ A}; \; I_{p_5} = 18 \text{ A},$$

ținînd seamă de relația (18.4 *a*)

$$I_f \geqslant \frac{I_p}{2{,}5},$$

rezultă curenții siguranțelor fuzibile (normalizați) :

$$I_{f_1} = 6 \text{ A}; \; I_{f_2} = 6 \text{ A}; \; I_{f_3} = 6 \text{ A}; \; I_{f_4} = 10 \text{ A}; \; I_{f_5} = 10 \text{ A}.$$

Pentru linia de alimentare, după (18.4 *c*), se obține :

$$I_{p\,max} = 0{,}5\,(3{,}8 + 3{,}56 + 4{,}75 + 7{,}16) + 24{,}4 = 33{,}04 \text{ A},$$

alegîndu-se o siguranță fuzibilă cu $I_f = 15$ A.

18.16. Din anexa 10 găsim, pentru conductor de Cu 35 :

$$r_0 = 0{,}54 \; \Omega/\text{km}.$$

Rezistența liniei va fi :

$$R = r_0 \cdot l = 0{,}54 \cdot 8 = 4{,}32 \; \Omega.$$

Curentul pe fază :

$$I = \frac{P}{\sqrt{3}\, U \cos \varphi} = \frac{1\,500}{\sqrt{3} \cdot 10 \cdot 0{,}8} = 107 \text{ A}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pierderile de energie anuale:

$$\Delta W_{Cu} = 3 R I^2 \tau = 3 \cdot 4{,}32 \cdot 107^2 \cdot 5\,000 = 735\,000 \text{ kWh}.$$

Analog găsim:

$$\Delta W_{OL-AL} = 606\,000 \text{ kWh}.$$

Se observă că:

$$\frac{\Delta W_1}{\Delta W_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{r_{01}}{r_{02}}.$$

REZOLVĂRI ȘI INDICAȚII LA CAPITOLUL 19

19.1. Randamentul referitor la curent se află făcînd raportul dintre greutatea metalului depus și greutatea teoretică a metalului care trebuie să se depună. $\eta = 0{,}95$.

19.3. Deoarece băile sînt parcurse de același curent, în același interval de timp, folosind relația (19.2 *a*) se poate scrie:

$$\frac{M_1 n_1}{A_1} = \frac{M_2 n_2}{A_2} = \frac{M_3 n_3}{A_3} = \frac{M_4 n_4}{A_4},$$

în care:

$$n_1 = 1;\ A_1 = 108;\ M_1 = 5{,}59 \text{ g};$$
$$n_2 = 2;\ A_2 = 207;$$
$$n_3 = 2; \qquad M_3 = 1{,}52 \text{ g};$$
$$n_4 = 2; \qquad M_4 = 1{,}64 \text{ g}.$$

Va rezulta:

$$M_2 = 5{,}36 \text{ g};$$
$$A_3 = 58{,}7;\ \text{deci este nichel}$$
$$A_4 = 63{,}5;\ \text{deci este cupru}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Curentul din circuit se exprimă:

$$I = \frac{M_1 n_1}{A_1 K_F t} = \frac{5{,}59 \cdot 96\,500}{108 \cdot t} = \frac{5000}{t} \; A,$$

t fiind timpul în care au loc depunerile.

19.6. Energia consumată este

$$W = Q \cdot E$$

unde: Q este cantitatea de electricitate corespunzătoare; E — tensiunea pe celulă

$$W = 12{,}45 \cdot 10^9 \text{ j} = 3\,460 \text{ kWh}.$$

Puterea instalației:

$$P = \frac{W}{24} = 144 \text{ kW}.$$

19.7. Procesul de electroliză a clorurii de potasiu este:

— procesul primar:

$KCl \rightarrow K^+ + Cl^-$;
$2Cl^- - 2e = Cl_2$ (la anod, clorul se dizolvă în electrolit);
$2K^+ + 2e = 2K$ (la catod);
$2K + 2H_2O = 2KOH + H_2$;

— procesul secundar (la anod);

$Cl_2 + H_2O \rightarrow HClO + Cl$;
$Cl_2 + 2KOH \rightarrow HClO + KCl + H_2O$;
$HClO + KOH \rightarrow KClO + H_2O$;
$KClO \rightarrow K^+ + ClO^-$;

$$\frac{6ClO^- + 3H_2O - 6e \rightarrow 2HClO_3 + 4HCl + 3O}{HClO_3 + KOH \rightarrow KClO_3 + H_2O}.$$

Se vede că se consumă teoretic șase sarcini electrice de echivalent pentru 1 mol de $KClO_3$, deci echivalentul $KClO_3$ va fi $\frac{A'}{6}$, A' fiind greutatea moleculară. Ținînd seamă de randament, se calculează cantitatea de electricitate necesară pentru obținerea a 10 kg $KClO_3$

$$Q = \frac{M \cdot n}{K_F \cdot A' \cdot \eta} = \frac{96\,500 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 6}{122{,}6 \cdot 0{,}92} = 51{,}4 \cdot 10^6 \text{ c}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înmulțind această valoare cu tensiunea pe celulă, se obține consumul de energie electrică pentru 10 kg $KClO_3$;

$$W' = 51{,}4 \cdot 10^6 \cdot 4 = 205{,}6 \cdot 10^6 \text{j};$$

$$W' = \frac{205{,}6 \cdot 10^6}{3{,}6 \cdot 10^6} = 57 \text{ kWh}.$$

Consumul zilnic de energie într-o instalație cu o putere instalată de 100 kW este:

$$W = 100 \cdot 24 = 2\,400 \text{ kWh}.$$

Productivitatea corespunzătoare este:

$$G = \frac{W}{W'} \cdot 10 = \frac{2\,400}{57} \cdot 10 = 422 \text{ kg/zi}.$$

19.8. Concentrația ionilor de cupru la electrodul de cupru și a ionilor de zinc la electrodul de zinc este:

$$c_{Cu^{++}} = 0{,}3 \cdot \frac{200}{159{,}6} = 0{,}376 \text{ ioni/l};$$

$$c_{Zn^{++}} = 0{,}2 \cdot \frac{100}{161{,}5} = 0{,}124 \text{ ioni/l}.$$

Cu relația (19.3 b), la temperatura de 25°C ($T = 273 + 25 = 298$), pentru $n_0 = 2$, se găsește:

$$E_{Cu} = + 0{,}340 + \frac{0{,}058}{2} \lg 0{,}376 = + 0{,}328 \text{ V};$$

$$E_{Zn} = - 0{,}760 + \frac{0{,}058}{2} \lg 0{,}124 = - 0{,}783 \text{ V}.$$

Tensiunea electromotoare a pilei va fi:

$$E = E_{Cu} - E_{Zn} = 1{,}111 \text{ V}.$$

19.9. Procesul care are loc la electroliza $CaCl_2$ și căldurile de formare sînt date de ecuațiile:

$$CaCl_2 = Ca + Cl_2 - 208\,400;$$

$$\frac{Ca + 2H_2O = Ca(OH)_2 + H_2O - 268\,380 + 238\,000}{CaCl_2 + 2H_2O = Ca(OH)_2 + Cl_2 + H_2O - 107\,160}.$$

Scanned with OKEN Scanner

De aici rezultă că potențialul de descompunere a $CaCl_2$ după relația (19.3 *a*) va fi:

$$E = \frac{Q}{23{,}04\ n_0} = \frac{107{,}160}{23{,}04 \cdot 2} = 2{,}32\ \text{V (la 20°C)},$$

unde: $Q = 107{,}16$ kcal/mol — cantitatea de căldură necesară pentru electroliza unui mol de $CaCl_2$.

19.11. Reacțiile de descărcare sînt:

a) la electrodul pozitiv:

$$PbO_2 + 2H^+ + H_2SO_4 + 2e^- = PbSO_4 + 2H_2O;$$

b) la electrodul negativ:

$$Pb + SO_4^{--} - 2e^- = PbSO_4.$$

Reacția totală va fi:

$$PbO_2 + Pb + 2H_2SO_4 \underset{\text{încărcare}}{\overset{\text{descărcare}}{\rightleftharpoons}} 2PbSO_4 + 2H_2O.$$

Potențialul electrodului pozitiv față de electrolit, dat de reacția procesului de oxidare-reducere a plumbului, după relația (19.3 *a*) la $T = 297°K$, va fi:

$$E_{(+)} = E_0 + \frac{0{,}058}{2} \lg \frac{c_{Pb^{++++}}}{c_{Pb^{++}}}$$

unde $E_0 = +\ 1{,}69$ V potențialul normal al acestui proces.

Potențialul electrodului negativ este determinat de ionizarea plumbului:

$$E_{(-)} = E_0' + \frac{0{,}058}{2} \lg c_{Pb^{++}},$$

unde $E_0' = -\ 0{,}126$ V este potențialul normal al acestui proces.

Deci valoarea tensiunii electromotoare E va fi:

$$E = E_{(+)} - E_{(-)} = +\ 1{,}816 + 0{,}029 \lg \frac{c_{Pb^{++++}}}{c^2_{Pb^{++}}}$$

sau, după înlocuiri:

$$E = 2{,}012\ \text{V}.$$

19.12. Curentul de descărcare:

$$I_d = \frac{C}{t_d} = \frac{100}{10} = 10\ \text{A},$$

unde C este capacitatea acumulatorului.

Scanned with OKEN Scanner

Randamentul în cantitate de electricitate :

$$\eta_{Ah} = \frac{I_d \cdot t_d}{I_i \cdot t_i} = \frac{10 \cdot 10}{25 \cdot 5} = 0{,}8.$$

Din relația (19.7 *b*) se găsește tensiunea de încărcare :

$$U_i = U_d \frac{\eta_{Ah}}{\eta_{Wh}} = 2 \frac{0{,}8}{0{,}73} = 2{,}19 \text{ V}.$$

19.14. Potențialul de difuziune este neglijabil datorită punții de sare. Forța electromotoare E va fi :

$$E = E_{cal} - E_H,$$

unde (la 25°C) :

$$E_H = E_0 + 0{,}058 \lg a_{H^+}.$$

Înlocuind în prima relație rezultă :

$$pH = - \lg a_{H^+} = \frac{E - E_{cal}}{0{,}058}.$$

Din anexa 11 $E_{cal} = 0{,}250$.
Făcînd înlocuirile se găsește :

$$pH = \frac{0{,}84 - 0{,}25}{0{,}059} = 10.$$

Din anexa 12 rezultă că este o soluție bazică.

Scanned with OKEN Scanner

ANEXE

Scanned with OKEN Scanner

RĂSPUNSURI

Capitolul 1

1.1. $q_1 = \sqrt{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{F_{12} F_{31}}{F_{23}}} \cdot \frac{d_{12} d_{31}}{d_{23}}$;

$q_2 = \sqrt{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{F_{23} F_{12}}{F_{31}}} \cdot \frac{d_{23} d_{12}}{d_{31}}$;

$q_3 = \sqrt{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{F_{31} F_{23}}{F_{12}}} \cdot \frac{d_{31} d_{23}}{d_{12}}$,

1.2. $k = \frac{F_1}{F_2} = 4{,}35 \cdot 10^5$.

1.3. $L = 1{,}41 \cdot 10^{-3}$ Joule.

1.4. $\varepsilon_{r\,\text{ulei}} = 5{,}15$.

1.5. $m = 0.032$ kg.

1.6. *a)* $E_{12} = 5 \cdot 10^4$ V/m; $E_{21} = 2{,}85 \cdot 10^4$ V/m.

b) $\bar{E} = \bar{E}_{12} - \bar{E}_{21} = 11{,}4 \cdot 10^4\, \bar{r}^0_{12}$ V/m.

1.7. $F_A = 4{,}24 \cdot 10^{-4}$ N; $F_B = 4{,}24 \cdot 10^{-4}$ N;

$F_a = 5{,}6 \cdot 10^{-4}$ N.

$E = 12{,}5 \cdot 10^{-2}$ V/m.

1.8. $\bar{E} = 800\,(\bar{i} + \bar{j} - 2\,\bar{k})$; $E = 1960$ V/cm.

1.9. $U = 1{,}272 \cdot 10^6$ V; $L = 5{,}66$ Joule.

Scanned with OKEN Scanner

1.10. Cercul de rază $\frac{d}{2\sqrt{3}}$, cu centrul în mijlocul segmentului care unește cele două puncte în care se află corpurile și situat într-un plan perpendicular pe acest segment.

1.11. $E = 333$ V/m; $V = 346$ V.

1.12. $U_{AB} = \frac{3}{2} a^2$.

1.13. $U = 0{,}72$ V; $l = 6{,}66$ m.

1.14. $U = 0$.

1.15. *a)* $U_{AB} = -42$ V; $U_{BC} = 46$ V; $U_{AC} = 4$ V.

b) $F_A = 0{,}066$ dyne; $F_B = 0{,}33$ dyne; $F_c = 0{,}2$ dyne.

1.16. Rezultatul este dat în figura R. 1.16.

1.17. $E = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 d} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2 + a^2}}$.

1.18. $E = \frac{\rho_l}{\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 R}$.

1.19. $E = \frac{\rho_l}{2\pi a \varepsilon_0}$.

1.20. $\bar{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\bar{n}$; $E = 9 \cdot 10^3$ V/m.

1.21. $r < a$, $E_i = 0$; $V_i = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} a = 54$ V; $D_i = 0$.

$r > a$, $E_e = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} = 2{,}7 \cdot \frac{1}{r^2}$ V/m,

$V_e = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = 2{,}7 \cdot \frac{1}{r}$ V;

$D_e = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{3 \cdot 10^{-10}}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2}$ C/m^2.

Scanned with OKEN Scanner

1.22. $r_i < a$, $E_i = 0$; $r_e > a$, $E_e = \frac{a \rho_s}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_e} =$

$= 113 \frac{a}{r_e}$ V/m.

1.23. $r_i < a$, $\bar{E}_i = \frac{r_i \rho_v}{2 \varepsilon_i} \bar{r}_0$; $\bar{D}_i = \frac{r_i \rho_v}{2} \bar{r}_0$;

$r_e > a$, $\bar{E}_e = \frac{a^2 \rho_v}{2 r_e \varepsilon_e} \bar{r}_0$; $\bar{D}_e \frac{a^2 \rho_v}{2 r_e} \bar{r}_0$;

— pe suprafața interioară a cilindrului $\bar{E} = \frac{a \rho_v}{2 \varepsilon_i} \bar{r}_0$;

— pe suprafața exterioară a cilindrului $\bar{E} = \frac{a \rho_v}{2 \varepsilon_e} \bar{r}_0$.

1.24. $\rho_v = \frac{3 \varepsilon_0 E}{d} = \frac{10^{-5}}{24}$ C/m^3.

1.25. $\rho_{v2} = -\frac{1}{2} \rho_{v1}$.

1.26. $U = \frac{h^2}{4 \varepsilon} \rho_{v1}$, unde h este distanța de la punctul considerat pe sferă pînă la planul perpendicular pe axa cilindrului și care trece prin centrul sferei;

$$\Delta U_{max} = \frac{a^2 \rho_{v1}}{4} = 34 \text{ V}.$$

1.27. *a)* $\bar{C}_1 = \frac{\bar{p}_2 \times \bar{p}_1}{4 \pi \varepsilon d^3}$, $\bar{C}_2 = \frac{2 \bar{p}_2 \times \bar{p}_1}{4 \pi \varepsilon d^3}$;

b) $\bar{F}_1 = \frac{3 p_1 \bar{p}_2}{4 \pi \varepsilon d^4}$, $\bar{F}_2 = -\frac{3 p_1 \bar{p}_2}{4 \pi \varepsilon d^4}$.

c) Notînd $\bar{p}_1 = p_1 \bar{i}$ și $\bar{p}_2 = p_2 \bar{j}$ rezultă:

$$\bar{E} = \frac{1}{16 \varepsilon a^3} [-(p_1 + 3 \sqrt{3} p_2) \bar{i} + (5 p_2 + 3 \sqrt{3} p_1) \bar{j}],$$

$$E = \frac{1}{16 \varepsilon a^3} \sqrt{28 p_1^2 + 32 p_2^2 + 36 \sqrt{3} p_1 p_2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

1.28. $R_{min} = \frac{V}{E\,d} = 1{,}66$ cm.

1.29. $\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2$, $\frac{V_2}{V_1} = \frac{R_1}{R_2}$.

1.30. Rezultă $\oint \bar{E}\,d\bar{r} = 2\pi a^2 \neq 0$, cîmpul nu derivă dintr-un potențial scalar și deci nu poate fi un cîmp electrostatic.

1.31. $\bar{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^{-r/a} \cdot \left(1 + \frac{r}{a}\right)\bar{r}}{r^3}$;

$\bar{D} = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{e^{-r/a} \cdot \left(1 + \frac{r}{a}\right)\bar{r}}{r^3}$; $V = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{a^2 r}$.

1.32. $C = 11{,}8$ pF; *b*) $C = 23{,}6$ pF; *c*) $C = 20{,}2$ pF.

1.33. *a*) $U_{max} = 9$ kV; *b*) $U_{max} =$
$= 90$ kV; *d*) $U_{max} = 15$ kV.

1.34. $\frac{C}{l} = 1{,}66 \cdot 10^{-4} \frac{\mu F}{m}$.

1.35. $C = 12$ pF.

1.36. $U = 2{,}3$ kV.

1.37. — serie $C_s = \frac{24}{7}$ μF;
— paralel $C_p = 32\,\mu F$;
— mixt $C = 14$ μF; $C = \frac{84}{5}$ μF; $C = \frac{15}{2}$ μF;
$C = 6$ μF.

1.38. $C_{echiv} = \frac{10}{6}$ μF; $U_1 = 100$ V; $U_2 = \frac{40}{3}$ V;
$U_3 = 20$ V; $U_4 = U_5 = \frac{20}{3}$ V; $q_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ C;
$q_2 = 8 \cdot 10^{-5}$ C; $q_3 = 12 \cdot 10^{-5}$ C; $q_4 = \frac{8}{3} 10^{-5}$ C;
$q_5 = \frac{16}{3} \cdot 10^{-5}$ C.

Scanned with OKEN Scanner

1.39. $U \cong 9\,800$ V.

1.40. $U = 1\,400$ V.

1.41. $U = 50$ V.

1.42. $Q_1 = 10^{-3}$C; $Q_{ED} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ C; $Q_2 = 10^{-3}$ C;
$U_1 = 166$ V; $U_{AB} \cong 87{,}5$ V; $U_{EP} \cong 20{,}83$ V;
$U_{PD} \cong 20{,}83$ V; $U_{DL} = U_{LF} = 25$ V.

1.43. $U = 38$ V; $W_1 = 41{,}5 \cdot 10^{-7}$ Joule;
$W_2 = 36{,}1 \cdot 10^{-7}$ Joule.

1.44. $U_n = \left[1 - \left(\frac{C^2}{C_1 + C^2}\right)^n\right] U$; $q_1 = C_1 U_n$; $q_2 = C_2 U_n$;

$W_1 = \frac{1}{2} C_1 U_n^2$; $W_2 = \frac{1}{2} C_2 U_n^2$; $U_n \simeq 3{,}97$ V.

1.45. $W_1 = 2{,}14 \cdot 10^{-2}$ Joule; $W_2 = 5{,}8 \cdot 10^{-3}$ Joule;
$W_3 = 9{,}5 \cdot 10^{-2}$ Joule; $U_1 = -207$ V;
$U_2 = 76$ V; $U_3 = 251$ V.

1.46. $F = 1{,}44 \cdot 10^{-5}$ N.

1.47. $C = 7 \cdot 10^{-36}$ F.

1.48. *a, b)* $x = d \cdot \frac{V_A - V_B}{V_A - V_C}$; $F_x = 0$.

1.49. $F = \frac{\varepsilon_0 h U^2}{2d}$.

1.50. $F = 5 \cdot 10^{-5}$ N.

1.51. *a)* $\Delta W = \frac{Q^2 d}{2 \varepsilon_0 A}$; $\Delta F = -\frac{Q^2}{2 \varepsilon_0 A}$.

b) $\Delta W = -\frac{\varepsilon_0 A U^2}{4d}$; $\Delta F = \frac{\varepsilon_0 A U^2}{4 d^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 2.

2.1. $D = 2$ mm.

2.2. $\rho_{Al} = 0{,}028\,\Omega\text{mm}^2/\text{m}$.

2.3. $\frac{C_{cu}}{C_{AL}} = \frac{c_{cu}}{c_{AL}} \cdot \frac{\gamma_{cu}}{\gamma_{AL}} \cdot \frac{\rho_{cu}}{\rho_{AL}}$.

2.4. $S = \sqrt{\frac{\rho G}{\gamma R}}$; $\quad l = \sqrt{\frac{GR}{\gamma\rho}}$.

2.5. $n = 640$ spire.

2.6. $\frac{R_{20}}{R_{84}} \cdot 100 = 125{,}6\%$.

2.7. $\theta = 2\,620°$.

2.8. $d \simeq 0{,}13$ mm.

2.9. $\alpha = 0{,}00356$.

2.10 $R = 63{,}5\,\Omega$.

2.11. *a*) $l = 274$ m; α) $-2{,}14\%$; β) $5{,}39\%$; γ) $6{,}2\%$; δ) $3{,}4\%$.

2.12. $U_1 = 1{,}2$ V; $P_1 = 0{,}12$W; $U_2 = 1{,}8$ V; $P_2 = 0{,}18$ W.

2.13. *a*) $D = 11{,}8$ mm; $j = 0{,}183$ A/mm^2.
b) $D = 9{,}5$ mm; $j = 0{,}268$ A/mm^2.

2.14. $R = 4{,}4\,\Omega$; $R = 5{,}5\,\Omega$; $R = 7{,}33\,\Omega$; $R = 3\,\Omega$; $R = 2{,}66\ \Omega$; $R = 1{,}66\,\Omega$.

2.15. $R_{AB} = 1{,}82\,\Omega$; $R_{AC} = 2{,}7\,\Omega$; $R_{BC} = 3\,\Omega$; $R_{AD} = 1{,}4\,\Omega$.

Scanned with OKEN Scanner

2.16. $R_e = \frac{5}{6} R = 10\Omega$.

2.17. $I_1 = 10$ A; $U_1 = 40$ V; $P_1 = 400$ W;
$I_2 = 6{,}67$ A; $U_2 = 60$ V; $P_2 = 400$ W;
$I_3 = 3{,}33$ A; $U_3 = 10$ V; $P_3 = 33{,}3$ W;
$I_4 = 3{,}33$ A; $U_4 = 23{,}31$ V; $P_4 = 77{,}8$ W;
$I_5 = 1{,}11$ A; $U_5 = 26{,}6$ V; $P_5 = 27$ W;
$I_6 = 2{,}22$ A; $U_6 = 4{,}44$ V; $P_6 = 9{,}88$ W;
$U_7 = 17{,}76$ V; $P_7 = 39{,}5$ W;
$I_8 = 1{,}11$ A; $U_8 = U_9 = 4{,}44$ V;
$P_8 = P_9 = 4{,}9$ W.

2.18. $U = 180$ V; $I_1 = 6$ A; $P_1 = 144$ W; $I_2 = 4$ A;
$P_2 = 144$ W; $I_3 = 2$ A; $P_3 = 27$ W; $I_4 = 2$ A,
$P_4 = 28$ W; $I_5 = \frac{2}{3}$ A; $P_5 = \frac{32}{3}$ W;
$I_6 = \frac{4}{3}$ A, $P_6 = \frac{32}{9}$ W; $P_7 = \frac{128}{9}$ W;
$I_8 = I = \frac{2}{3}$ A; $P_8 = P_9 = \frac{16}{9}$ W.

2.19. *a*) $R = 80\Omega$; *b*) $R = 85{,}4\Omega$;

c) $R = \frac{U_{V2}}{I_{A2}} + \frac{U_{V1}}{I_{A1}} - \frac{U_{V2}}{I_{A1}} = 83{,}4\Omega$.

2.20. $r_3 = 5\Omega$.

2.21. $R_1 = 150$ kΩ; $R_2 = 100$kΩ.

2.22. $\frac{u}{U} = \frac{\frac{1}{R-r}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{R-r} + \frac{1}{R_s}}$.

2.23. $r = 3\,750\Omega$.

Scanned with OKEN Scanner

2.24. $I_1 \cong 3{,}2$ A; $I_2 \cong 1{,}49$ A; $I_3 \cong 2{,}05$ A; $I_4 \cong 1{,}74$ A; $I_5 \cong 1{,}13$ A; $I_6 \cong 0{,}53$ A.

2.25. $U = 1{,}947$ V; $I_1 = 0{,}27$ A; $I_2 = 0{,}51$ A; $I_3 = 0{,}78$ A.

2.26. $E_2 = 120{,}264$ V; $P = 2\,840$ W.

2.27. $I_1 = 1{,}2952$ A; $I_2 = 1{,}1048$ A; $I_3 = 0{,}1904$; $I_4 = 0{,}4952$ A; $I_5 = 0{,}3047$ A; $I_6 = 0{,}8$ A.

2.28. Metoda potențialelor nodurilor $I_1 = 18{,}8$ A; $I_2 = 31{,}9$ A; $I_3 = 53{,}7$ A; $I_4 = -21{,}8$ A; $I_5 = 13{,}1$ A.

2.29. $U_{AB} = 5$ V; $\varepsilon = 9\%$.

2.30. $R = 41$ kΩ.

2.31. *a*) $I_1 \cong 0{,}29$ A; $I_2 \cong 0{,}38$ A; $I_3 = -0{,}091$ A; $I_4 = 0{,}297$ A; $I_5 = 0{,}205$ A; *b*) $P_a = P_d - 2{,}92$ W.

2.32. *a*) $E_7 = 13$ V; $E_6 = -24$ V, $I_1 = 1$ A; $I_2 = 2$A; $I_3 = 3$A; $I_4 = 0$ A; $I_5 = 3$A; $I_6 = 1$ A; $r_1 = 16\Omega$; $r_2 = 12\Omega$. *b*) $E_1 = 58$ V; $E_2 = 34$ V; $I_1 = I_4 = 1$ A; $I_5 = I_6 = 4$ A; $I_2 = 5$ A; $I_3 = 3$ A.

2.33. $I = 5{,}6 \cdot 10^{-4}$ A sau $I = 8{,}4 \cdot 10^{-4}$ A.

2.34. $r_x = U_{2V}/I_{1A} = 100\Omega$.

2.35. $W \simeq 15$kWh.

2.36. $P = 72$ W.

2.37. $R = R_i$.

2.38. $P_{max} = 78$ W.

Scanned with OKEN Scanner

2.39. Da, pentru $R < \frac{E_1}{E_2} R_{i2} - R_{i1}$ sau $R < \frac{E_2}{E_1} R_{i1} - R_{i2}$.

2.40. $U = 22$ V; $R_i = 2{,}08 \cdot 10^{-2}\Omega$; $I = 88$ A; $Q = 504$ Ah.

2.41. *a*) $\varepsilon = 0$; *b*) $\varepsilon = 90{,}5\%$.

2.42. *a*) $I_1 = 1$A; $I_2 = I_8 = 2$A; $I_3 = -3$A; $I_4 = -1{,}8$A; $I_5 = -0{,}2$ A; $I_6 = 1{,}2$ A; $I_7 = -1{,}2$ A; $I_9 = 11{,}27$ A; $I_{10} = 9{,}27$ A; $I_{11} = 10{,}47$ A; $I_{12} = 0{,}8$ A;
c) $I_1 = 4$A; $I_2 = 8$A; $I_3 = -12$ A; $I_4 = -5$A; $I_5 = -7$A; $I_6 = -3$A; *b*) $I_1 = 2$A; $I_2 = 1$A; $I_3 = 3$A; $I_4 = 0$; $I_5 = 1$A; $I_6 = 2$A; $I_7 = 4$A; $I_8 = -5$A; $I_9 = -7$A;

2.44. $I \cong 0{,}4$ A.

2.45. $P = 30{,}5$ kW; $\eta = 97\%$, 231,1 V; 229,9 V; 227,9 V.

2.46. $R = \frac{\ln R_e/R_i}{2\pi\rho l}$.

Capitolul 3

3.1.

U	Volţi	0	6	20	31	40	48	60	65
P	Waţi	0	840	2 400	3 100	3 200	2 880	1 200	0

3.2. *a*) $P_n = 75$ W; *b*) $\varepsilon_1 = 14{,}5\%$; $\varepsilon = -16\%$: *c*) $r_s = 216\Omega$; $r_d = 360\Omega$.

Scanned with OKEN Scanner

3.3. $R = 155\Omega$; $I_l = 0{,}605$ A; $I_{1l} = 0{,}64$ A; $I_{2l} = 0{,}56$ A.

3.4. $r_{s1} = 2{,}45\Omega$; $r_{d1} = 1{,}1\Omega$; $r_{s2} = 6{,}7\Omega$; $r_{d2} = 2\Omega$.

3.5. $r_2 = 10{,}5\Omega$; $r_3 = 3{,}7\Omega$.

3.6. $u_0 = 153$ V; $u = 147$ V.

3.7. $I_1 = 7{,}8 \cdot 10^{-8}$ A; $I_2 = 31{,}2 \cdot 10^{-8}$ A.

3.8. *a*) $U_0 = 25$ V; $U_0 = 15$ V; $U_0 = -3$V;
b) $I = 36$ mA; $I = 32$mA; $I = 9$ mA;
c) $U = 212$ V.

3.9. $r_2 = 253\Omega$; $r_3 = 206\Omega$.

3.10. $u = 22$ V; $u = 18$ V.

3.11. $I_l = 500$ mA.

3.12. $\Delta P \cong 10$ W.

3.13. $P_1 = 80$ W; $P_2 = 40$ W; $P_3 = 40$ W.

3.14. $\varepsilon_1 = 28\%$, $\varepsilon_2 = 15\%$; $\varepsilon_3 = 22\%$.

3.15. $i_1 = 2{,}7$ A; $i_2 = 1{,}6$ A — regim stabil.

3.16. $I \cong 11$ A.

Capitolul 4.

4.1. *a*) $F = 4{,}8 \cdot 10^{-16}$ N; *b*) $R = 1{,}9 \cdot 10^{-5}$ m;
c) $\omega = 5{,}29 \cdot 10^{9} s^{-1}$.

4.2. *a*) $L = 2{,}36$ m; *b*) $T = 0{,}357\,\mu$s.

4.3. $B = \frac{2\pi m V \cos\alpha}{q d}$, unde s-a notat cu d distanţa de la punctul M la punctul N.

Scanned with OKEN Scanner

4.4. $B = 5$ Gs.

4.5. Alegînd un sistem de coordonate trirectangulare cu axa y orientată ca $\bar{B}$ și axa z orientată ca și $-\bar{g}$ rezultă:

$$a)\ V_x = \frac{mg}{qB}\cdot\left(1 - \cos\frac{qB}{m}t\right);\quad V_y = 0;$$

$$V_z = -\frac{mg}{qB}\cdot\sin\frac{qB}{m}\cdot t;$$

$$b)\ W = \frac{2m^3g^2}{q^2B^2}\cdot\sin^2\frac{qB}{2m}t;$$

$$c)\ x = \frac{m^2g}{q^2B^2}\left(\frac{qB}{m}t - \sin\frac{qB}{m}t\right);$$

$$z = -\frac{m^2g}{q^2B^2}\left(1 - \cos\frac{qB}{m}t\right)$$ traiectoria respectivă este o cicloidă.

4.6. $\bar{F}_{total} = \bar{F}_{mag} + \bar{F}_{gravit} = 0.$

4.7. $F = 0$; $F = 9$N; $F = 18$ N.

4.8. $|F|$ variază între zero și 25 N.

4.9. *a)* $M = 6\cdot10^{-2}$ Nm; *b)* $M = 1{,}02\cdot10^{-5}$Nm.

4.10. *a)* $\Phi = 1{,}2\cdot10^{-2}$Wb; *b)* $\Phi = 3{,}6\cdot10^{-5}$ Wb; $M = 3{,}6\cdot10^{-6}$ H.

4.11. $H = \frac{3}{2}\cdot\frac{I_m}{2\pi r}$, unde $r = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Se realizează un cîmp magnetic învîrtitor.

4.12. $H_x = \frac{i}{4\pi b}\ln\frac{4d^2 + (b+3h)^2}{4d^2 + (b-3h)^2}$; $H_y = \frac{i}{2\pi b}\cdot\left(\text{arc tg}\frac{b+3h}{2d} - \text{arctg}\frac{3h-b}{2d}\right)$,

unde h este distanța de la proiecția punctului P, pe „planul" barei, pînă la axa de simetrie a barei.

Scanned with OKEN Scanner

4.13. $H = \frac{i}{4\pi}\left(\frac{\pi}{3R} - \frac{1}{d}\right) = \frac{i}{4\pi d}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - 1\right)$.

4.14. $H = \frac{i}{2\pi r_1^2} \cdot r$ pentru $r \leqslant r_2$;

$H = \frac{i}{2\pi r}$ pentru $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$;

$H = \frac{i}{2\pi r} \cdot \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2}$ pentru $r_2 \leqslant r \leqslant r_3$; $H = 0$ pentru $r > r_3$.

4.15. $\bar{H}_{cavitate} = \frac{1}{2}\bar{J} \times \bar{c}$.

Capitolul 5

5.1. *a*) $I = 11{,}87$ A; *b*) $B_1 = 0{,}833$ Wb; $B_2 = 1{,}25$ Wb/m^2.

5.2. $I = 45{,}14$ A; $H_\delta = 99{,}5$ A/cm.

5.3. *a*) $R_m = 7{,}9 \cdot 10^6$ A/Wb; *b*) $F_M = 158$ A.

5.4. *b*) $F_M = 91{,}2$ A; *a*) $R_M = 6{,}7 \cdot 10^6$ A/Wb — această valoare corespunde regimului de funcționare determinat de $F_N = 91{,}2$ și se modifică o dată cu F_M; *c*) $B = 1{,}26$ Wb/m^2.

5.5. *a*) $B = 0{,}4$ Wb/m^2; $\Phi_f = 0{,}6 \cdot 10^{-4}$ Wb; $L = 18$mH; *b*) $\Phi_f = 0{,}549 \cdot 10^{-4}$ Wb; $L = 16{,}5$mH.

5.6. *a*) $H_a = 154\,000$ A/m; $H_{f_e} = 308$ A/m; $B = 0{,}193$ Wb/m^2; $\Phi_f = 0{,}29 \cdot 10^{-4}$ Wb; $L = 8{,}7$ mH; *b*) $\Phi_f = 0{,}264 \cdot 10^{-4}$ Wb; $L = 7{,}92$ mH.

5.7. *a*) $H = 6{,}4$ A/m; $B = 1{,}04$ Wb/m^2; $\Phi = 1{,}56 \cdot 10^{-4}$ Wb; $L = 46{,}8$ mH; *b*) $B = 0{,}307$ Wb/m^2; $\Phi = 0{,}46 \cdot 10^{-4}$ Wb; $L = 13{,}8$ mH.

5.8. $F_M = 650$ A.

5.9. $F_M = 2\,040$ A.

Scanned with OKEN Scanner

5.10. $B = 1{,}17 \text{Wb/m}^2$.

5.11. $B_1 = 1{,}655 \text{Wb/m}^2$; $B_2 = 0{,}612 \text{ Wb/m}^2$
$B = 1{,}14 \text{ Wb/m}^2$.

5.12. *b)* $\Phi t_1 = 200(3{,}75 \cdot 10^{-3} - 4{,}58 \cdot 10^{-3}) =$
$= -0{,}165$ Wb; $\Phi t_2 = 220(6{,}15 \cdot 10^{-3} -$
$- 2{,}79 \cdot 10^{-3}) = 0{,}414$ Wb; *c)* $L_1 = 0{,}125$ H;
$L_2 = 0{,}15$ H; d) $L_{12} = 0{,}102$ H.

5.13. *a)* $B_\delta = 1{,}75$ Wb/m^2; *b)* $U_{M,AB} = 14{,}7$ A;
$U_{M,CD} = 1\,560$ A; $U_{M,EF} = U_{M,AB}$.

5.14. $2F_M = 7\,750$ A.

5.15. $B = 0{,}64 \text{ Wb/m}^2$; $B_x = 0{,}8 \text{Wb/m}^2$.

Capitolul 6

6.1. $2{,}91 \cdot 10^{-5}$ cal.

6.2. *a)* $i = \frac{e}{R} = 8\pi \cos\left(2\pi\, 50\, t + \frac{\pi}{2}\right) A$. *b)* $v_1 = v_2 = v_4 =$
$= \frac{e}{2}$; $v_3 = 0$.

6.3. *a)* $P = \frac{\pi\omega^2 B_m^2 (a_1 - a_2)^2 (a_1 + a_2)}{4R_0}$;

$u = \pi\omega B_m\, a_1 a_2 \cos\omega t$;

$i = \frac{\omega B_m}{2R_0}(a_1 - a_2)\cos\omega t$;

b) $P = \frac{\pi\omega^2 B_m^2}{4R_0}(a_1^3 + a_2^3)$;

$i_1 = \frac{\omega B_m a_1}{2R_0}\cos\omega t$;

$i_2 = \frac{\omega B_m a_2}{2R_0}\cos\omega t$.

6.4. $U_{v_1} = 0{,}336$ V; $U_{v_2} = 0{,}302$ V; $U_{v_3} = 0{,}336$
(valori eficace).

Scanned with OKEN Scanner

6.5. $U_{max} = 159{,}75$ V.

6.6. *a)* $W_{m,\,max} = 0{,}259$ J; *b)* $W_{m,\,max} = 0{,}249$ J;
c) $W_{m,\,max} = 0{,}254$ J.

6.7. $\frac{U_1}{U_2} = -0{,}462.$

6.8. *a)*

$$e = \begin{cases} 2Bv^2t; \ 0 \leqslant t \leqslant \frac{a}{2v}; \\ Bav; \ \frac{a}{2v} \leqslant t \leqslant \frac{a}{v}; \quad \text{vezi fig. 6.8} \\ 3Bav - 2Bv^2t; \ \frac{a}{v} \leqslant t \leqslant \frac{2a}{v}; \\ -Bav; \ \frac{2a}{v} \leqslant t \leqslant \frac{5a}{2v}; \\ 2Bv^2t - 6Bav; \ \frac{5a}{2v} \leqslant t \leqslant \frac{3a}{v}. \end{cases}$$

b) $i = \frac{e}{R}$; *c)* $h = \frac{5a^3B^2v}{3R}$; *d)* $Q = \frac{5a^3B^2v}{3R}$ [J].

6.9.

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
u	0	Blv	Blv	$2Blv$	$2Blv$	Blv	Blv	0

6.10.

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
u	0	Blv	Blv	0	0	Blv	Blv	0

6.11.

$$\begin{cases} 0 < y < 0{,}1 \text{ m} & e = 320\,y; \\ 0{,}1 < y < 0{,}3 \text{ m} & e = 32; \\ 0{,}3 < y < 0{,}5 \text{ m} & e = 128 - 320\,y; \\ 0{,}5 < y < 0{,}7 \text{ m} & e = -32; \\ 0{,}7 < y < 0{,}8 \text{ m} & e = 320\,y - 256. \end{cases}$$

Apoi se repetă.

6.12. $v = 13{,}2$ m/s;
$F = 7{,}6 \cdot 10^{-5}$ N.

Scanned with OKEN Scanner

6.13. $W = 2{,}3 \cdot 10^{-6}$ W.

6.14. *a)* $e = \frac{B\omega R^2}{2} = 1{,}32$ V;

b) $e = \frac{B\omega r^2}{2}$; r fiind variabil.

Cu aproximație, (în urma unei dezvoltări în serie) se obține:

$$e \simeq \frac{1}{2} B\omega(R - a\cos\omega t)^2 = 131\ (0{,}1 - 0{,}02\cos 524\, t)^2.$$

6.15. *a)* $F = 0{,}333$ N; $P_t = 3{,}33$ W $= R_1 I^2$;

b) $F_1 = 0{,}326$ N; $P_t = 3{,}26$ W; $F_1 \cdot v_1 = 0{,}033$ W;
$F_2 = 0{,}316$ N; $P_t = 3{,}16$ W; $F_2 \cdot v_2 = 0{,}158$ W;
$F_3 = 0{,}300$ N; $P_t = 3$ W; $F_3 \cdot v_3 = 0{,}3$ W.

6.16. $t = 3{,}12 \cdot m_{kg} \cdot$ [s].

6.17. *a)* $v_1 = \frac{v_{10}}{2}(1 + e^{-2At})$; $A = \frac{B^2 l^2}{Rm}$;

$v_2 = \frac{v_{10}}{2}(1 - e^{-2At})$.

Pentru $t \gg \frac{1}{2A}$; $v_1 = \frac{v_{10}}{2}$; $v_2 = \frac{v_{10}}{2}$;

$W_{cin_0} = \frac{mv_{10}^2}{2}$;

$W_{cin_t} = \frac{mv_{10}^2}{4}$.

Scăderea energiei cinetice se explică prin degajarea căldurii:

$$Q = \int_0^\infty Ri^2\, dt = \frac{mv_{10}^2}{4};$$

b) $v_1 = \frac{v_{10}}{2}\left[e^{-K_1 t} + e^{(-2A - K_1)t}\right]$;

$v_2 = \frac{v_{10}}{2}\left[e^{-k_1 t} - e^{(-2A - K_1)t}\right]$ cu $A = \frac{B^2 l^2}{Rm}$ și

$K_1 = \frac{K}{m}$.

6.18. $e = 0{,}416$ V;

$p = 503\ \omega^2 \cdot 10^{-4} \cdot \cos^2 \omega t$ W.

Scanned with OKEN Scanner

6.19. $p = 503\ \omega^2 \cdot 10^{-4} \cos^2 \omega t$ W.

6.20. $p = \frac{\sigma g}{32\pi} \frac{1}{d^2} n^2 \mu_0^2 S^2 \omega^2 I_m^2 \cos^2 \omega t$.

6.21. *a)* $E = \frac{3 m v r d}{4\pi \sqrt{(d^2+r^2)^5}}$, unde s-a notat:

d — distanța de la magnet la planul considerat pe axul magnetului;

r — distanța de la punctul considerat în plan la proiecția magnetului pe plan;

b) $j = \sigma E$;

c) $p = \frac{3 m^2 v^2 g}{64 \pi \rho} \frac{1}{d^4}$;

d) $F = \frac{3 m^2 v g}{64 \pi \rho} \frac{1}{d^4}$.

6.22. $D = 0{,}95$ m; $B = 0{,}326$ Wb/m²

6.23. $i = 4{,}65$ A; $F' = 3{,}18\, t$ pentru $\mu_{r_{OL}} = 1\,500$, $\mu_{r_{fontă}} = 370$.

6.24. $B = 0{,}05$ Wb/m².

6.25. $f = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon}$.

Capitolul 7

7.1. *a)* $\Phi = \Phi_m \cos(\omega t + \alpha)$; *b)* $e = E_m \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; *c)* $\Phi = \Phi_m \cos \omega t$; $e = E_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$; *d)* $\Phi = \Phi_m \cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right)$;

$e = E_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$; $\Phi_m = BA = 10^{-2}$ Wb;

$E_m = \omega \Phi_m = 0{,}157$ V; $\omega = \frac{2\pi n}{60} = 5\ \pi$ rad/s.

Scanned with OKEN Scanner

7.2. *a)* $e = 1{,}4 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ V; *b)* $i = 0{,}7 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ A;
c) $q = 2{,}22 \cdot 10^{-3}$ C; *d)* $P = 0{,}49$ W.

7.3. $f = 6\sqrt{2} \sin \omega t$ N/m;
$(F_{med})_T = 0$; $(F_{med})_{T/2} = 5{,}4$ N/m.

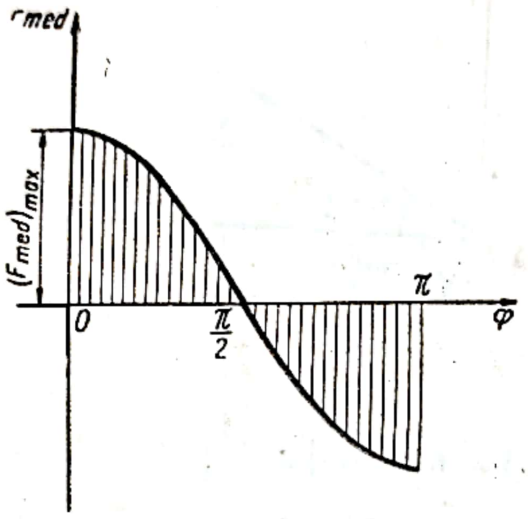


Fig. R. 7.3

7.4. $(F_{med})_T = 2 \cdot 10^{-5}$ N/m.

7.5. $F_{med} \approx 8\,000$ N/m².

7.6. *a)* $f_1 = 8$ Hz; $f_2 = 1{,}9$ Hz; $f_3 = 50$ Hz; $f_4 = 10$ Hz.
b) $\alpha_1 = 11°28'$; $\alpha_2 = -130°42'$; $\alpha_3 = 1°44'$;
$\alpha_4 = -131°16'$.

7.7. *a)* $f_1 = 50$ Hz; $f_2 = 50$ Hz; $f_3 = 16{,}66$ Hz;
$f_4 = 200$ Hz;
b) $\alpha_1 = 28°$; $\alpha_2 = 120°$; $\alpha_3 = 180°$; $\alpha_4 = -45°$.

7.8. $i = 5 \sin (\omega t - 55°10')$ A; $\omega = 314$ rad/s.

7.9. *a)* $f = 50$ Hz; *b)* $i_1 = I_1\sqrt{2}\sin \omega t$;
$i_2 = I_2\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$.

7.10. $i_2 = 3\sqrt{2} \sin\left(100\ \pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ A.

Scanned with OKEN Scanner

7.11. $e_1 = 346\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ V;

$e_2 = 200\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$ V; $e = 400\sqrt{2}\sin\omega t$ V;

$f = 50$ Hz.

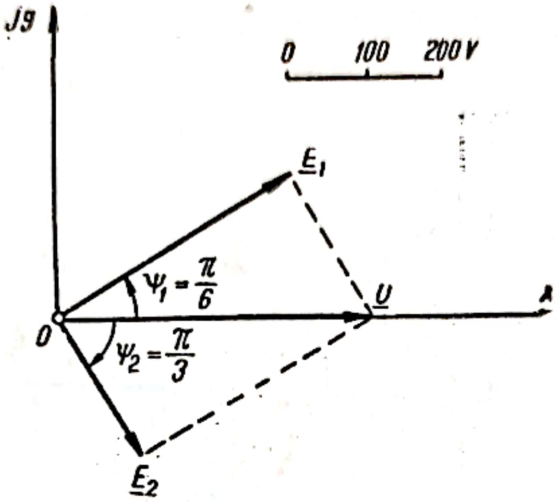


Fig. R. 7.11

7.12. $u = U\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6} + \alpha\right)$;

$i = I\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3} + \alpha\right)$;

a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; *b)* $\alpha = -\frac{\pi}{2}$; *c)* $\alpha = -\frac{\pi}{6}$; *d)* $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

7.13. $i_3 = 43{,}5\sqrt{2}\sin(\omega t + 127°)$ A.

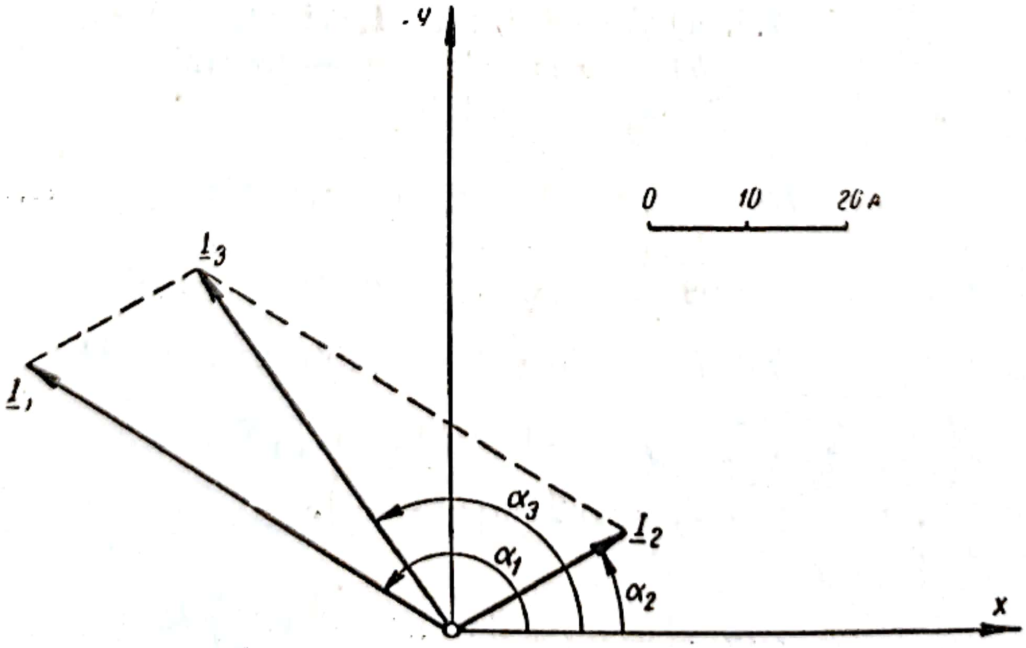


Fig. R.7.13

Scanned with OKEN Scanner

7.14. $i_3 = 83\sqrt{2}\sin(\omega t - 90°)$ A.

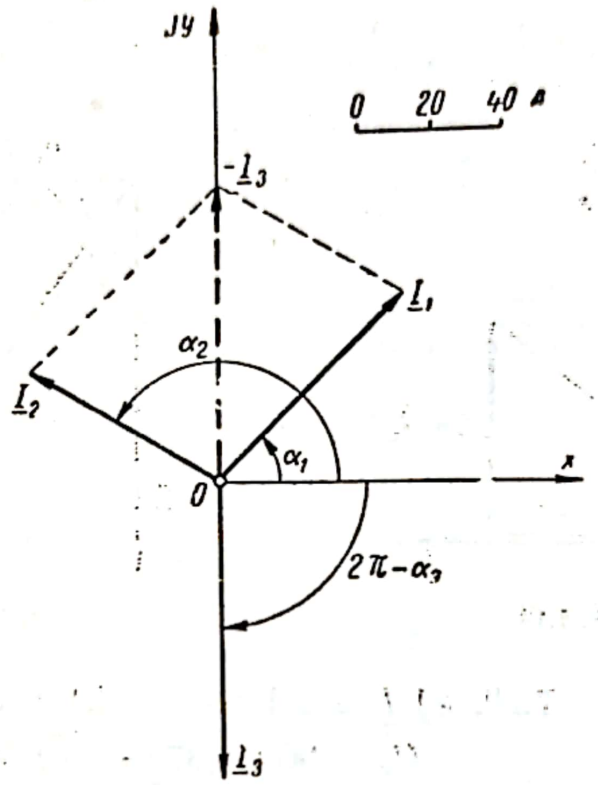


Fig. R. 7.14

7.15. $I_{max} = 5{,}64$ A; $U_{max} = 56{,}4$ V.

7.16. $I_{max} = 2{,}82$ A.

7.17. *a)* $\underline{Z} = 2{,}43\,\underline{|7°35'}$; *b)* $i = 33\sqrt{2}\sin(\omega t - 7°35')$ mA;

c) $P = 2{,}6$ mW; $Q = 0{,}36$ mVar;

$S = 2{,}65$ mVA; *d)* $\cos\varphi = 0{,}98$.

7.18. *a)* $\underline{I} = 22\,\underline{|-37°}$ A; *b)* $\underline{U_R} = 176\,\underline{|-37°}$ V;

c) $\underline{U_L} = 132\,\underline{|53°}$ V; *d)* $P = 3\,872$ W;

$Q = 2\,904$ var; $S = 4\,840$ VA;

e) $\cos\varphi = 0{,}8$ (ind).

Scanned with OKEN Scanner

7.19. *a)* $R = 10$; $L = 90$ mH.

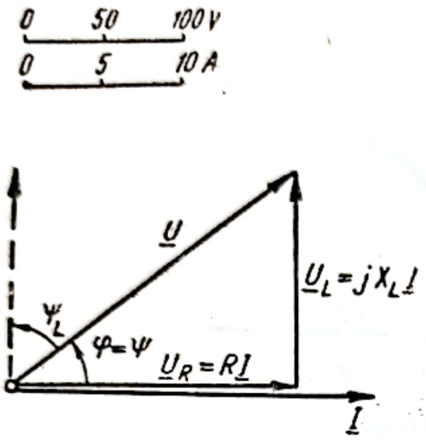


Fig. R. 7.19

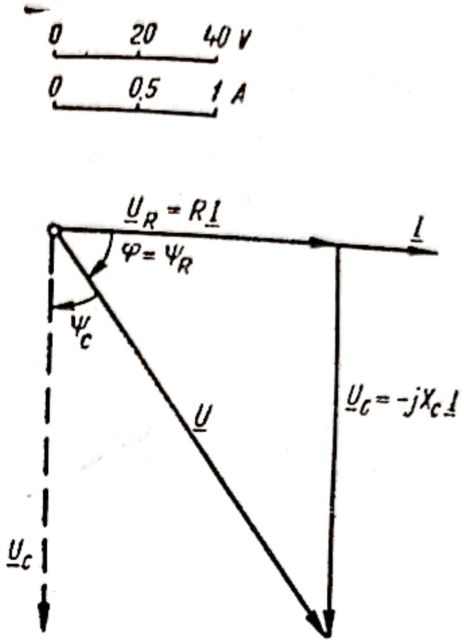


Fig. R. 7.20

7.20. *a)* $\underline{I} = 2{,}4\ \underline{|53°}$ A; *b)* $\underline{U}_R = 72\ \underline{|53°}$ V;
$\underline{U}_c = 96\ \underline{|-37°}$ V; *c)* V. fig. R. 7.20;
d) $P = 172{,}8$ W; $Q = -230{,}4$ var; $S = 288$ VA;
e) $\cos\varphi = 0{,}6$ (cap).

7.21. $R_s = 0{,}24\ \Omega$; $C_s \approx 16\ \mu F$; $R_p = 160\ k\Omega$;
$C_p \simeq 16\ \mu$F.

7.22. *a)* $\underline{Z} = R = 4{,}9$; *b)* $\underline{Z} = jX_L \approx j\,11$; $L = 35$ mH;
c) $\underline{Z} = -jX_C \approx -j\,11$; $C = 290\ \mu$F;
d) $\underline{Z} = 2{,}8 + j\,5{,}3$; $L = 17{,}2$ mH;
e) $\underline{Z} = 2{,}8 - j\,5{,}3$; $C = 600\ \mu$F.

7.23. $R_s = \dfrac{(\omega L_p)^2}{R_p^2 + (\omega L_p)^2} R_p$; $R_p = \left[1 + \left(\dfrac{\omega L_s}{R_s}\right)^2\right] R_s$;

$L_s = \dfrac{R_p^2}{R_p^2 + (\omega L_p)^2} L_p$; $L_p = \left[1 + \left(\dfrac{R_s}{\omega L_s}\right)^2\right] L_s$;

$L_s \approx L_p$ cînd $\dfrac{R_s}{L_s} \ll \omega \ll \dfrac{R_p}{L_p}$.

Scanned with OKEN Scanner

7.24. $R_s = \dfrac{1}{1 + (\omega C_p R_p)^2} R_p$; $R_p = \left[1 + \dfrac{1}{(\omega C_s R_s)^2}\right] R_s$;

$C_s = \left[1 + \dfrac{1}{(\omega C_p R_p)^2}\right] C_p$; $C_p = \left[\dfrac{1}{1 + (\omega C_s R_s)^2}\right] C_s$;

$C_s \approx C_p$ cînd $\dfrac{1}{R_p C_p} \ll \omega \ll \dfrac{1}{R_s C_s}$.

7.25. *a)* $\underline{I}_R = 4$ A; $\underline{I}_L = 3\,\underline{|-90°}$ A; $\underline{I} = 5\,\underline{|-37°}$ A;

c) $P = 480$ W; $Q = 360$ var; $S = 600$ VA;

d) $\cos\varphi = 0{,}8$; *e)* $\dfrac{\Delta I}{I} = -1{,}8\%$.

7.26. *a)* $\underline{I}_R = 6$ A; $\underline{I}_c = 8\,\underline{|90°}$ A; $\underline{I} = 10\,\underline{|53°}$ A;

c) $P = 2880$ W; $Q = -3840$ var; $S = 4800$ VA.

d) $\cos\varphi = 0{,}6$; *e)* $\dfrac{\Delta I}{I} = 3{,}2\%$.

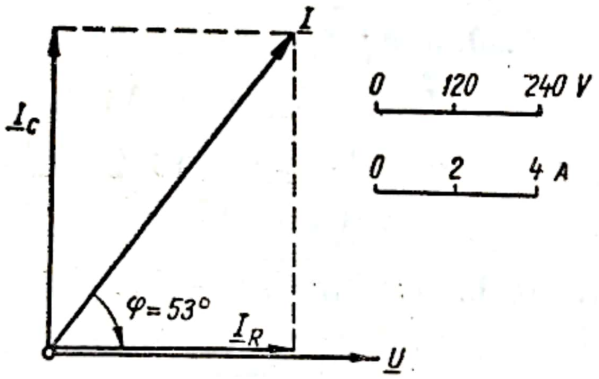


Fig. R. 7.26

7.27. *a)* $\underline{I}_R = 5{,}5$ A; $\underline{I}_L = 14\,\underline{|-72°}$ A;

$\underline{I} = 16{,}5\,\underline{|-53°}$ A;

c) $P = 2\,180$ W; $Q = 2\,940$ var; $S = 3630$ VA;

d) $\cos\varphi = 0{,}6$; *e)* $\dfrac{\Delta R}{R} = -45\%$.

7.28. *a)* $\underline{I} = 4\,\underline{|-53°10'}$ A; *b)* $\underline{U}_R = 120\,\underline{|-53°10'}$ V;

$\underline{U}_L = 240\,\underline{|36°50'}$ V; $\underline{U}_c = 80\,\underline{|-143°10'}$ V;

Scanned with OKEN Scanner

c) V. fig. R. 7.28; *d)* $P = 480$ W; $Q = 640$ var; $S = 800$ VA; *e)* $\cos \varphi = 0{,}6$.

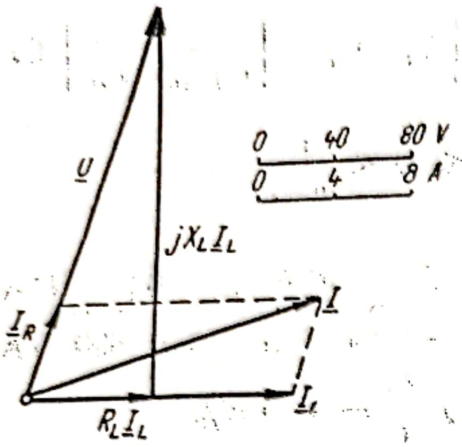


Fig. R. 7.28

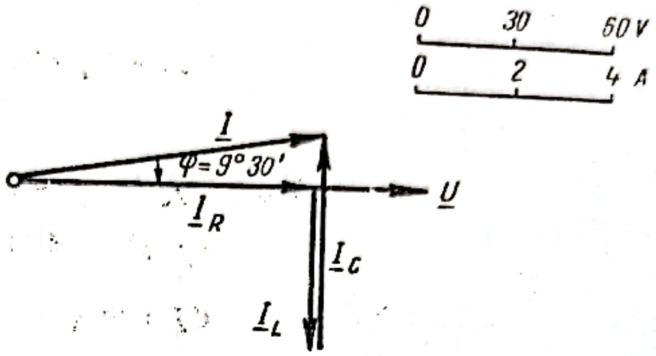


Fig. R. 7.29

7.29. *a)* $\underline{I}_R = 6$ A; $\underline{I}_L = 3\,|\underline{-90°}$ A; $\underline{I}_c = 4\,|\underline{90°}$ A; $\underline{I} = 6{,}1\,|\underline{9°30'}$ A; *b)* V. fig. R. 7.29; *c)* P = 720 W; $Q = -120$ var; $S = 732$ VA; *d)* $\cos \varphi = 0{,}985$.

7.30. a. *a)* $\underline{Z}_{11'} = 40 + \mathrm{j}\,33$; *b)* $\underline{I}_R = 1{,}92\,|\underline{-40°}$ A; $\underline{I}_L = 3{,}2\,|\underline{-40°}$ A; $\underline{I}_c = 1{,}28\,|\underline{140°}$ A; *d)* $P = 148$ W; $Q = 123$ var; $S = 192$ VA; *e)* $\cos \varphi = 0{,}78$.

b. *a)* $\underline{Z}_{11'} = 8 - \mathrm{j}\,34$; *b)* $\underline{I}_R = 1{,}28\,|\underline{130°}$ A; $\underline{I}_L = 2{,}55\,|\underline{40°}$ A; $\underline{I}_c = 2{,}86\,|\underline{16°45'}$ A; *d)* $P = 65{,}5$ W; $Q = -279$ var; $S = 286$ VA; *e)* $\cos \varphi = 0{,}23$.

c. *a)* $\underline{Z}_{11'} = 24{,}4 + \mathrm{j}\,0{,}49$; *b)* $\underline{I}_R = 3{,}2\,|\underline{-40°}$ A; $\underline{I}_L = 4{,}1\,|\underline{-1°8'}$ A; $\underline{I}_c = 2{,}55\,|\underline{50°}$ A; *d)* $P = 410$ W; $Q = 8{,}2$ var; $S = 410$ VA; *e)* $\cos \varphi \approx 0{,}9992$.

7.31. $\omega L = \dfrac{1}{\omega C}$.

Scanned with OKEN Scanner

7.32. *a)* $\underline{Z}_{11'} = 4 - 2j = 4{,}46\ \underline{|-26°34'}$;
b) $\underline{I}_L = 20\ \underline{|-36°50'}$ A; $\underline{I}_c = 40\ \underline{|53°10'}$ A;
$\underline{U}_{mn} = 0$; *c)* V. fig. R. 7.32; *d)* $P = 8000$ W;
$Q = -4000$ var; $S = 8950$ VA;
e) $\cos\varphi = 0{,}895$; *f)* $\underline{Z}_{mn} = 5{,}4\ \underline{|26°30'}\ \Omega$.

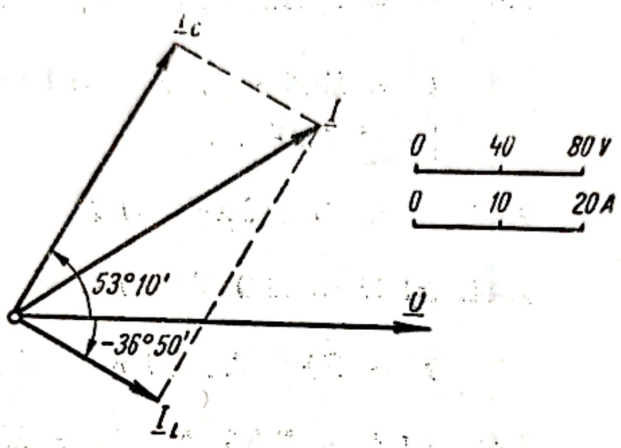


Fig. R. 7.32

7.33. *a)* $\underline{Z}_{11'} = 5{,}95\ \underline{|-14°35'}$; *b)* $\underline{I}_1 = 37\ \underline{|14°35'}$ A;
$\underline{I}_2 = 14{,}2\ \underline{|-35°39'}$ A; $\underline{I}_3 = 30\ \underline{|35°55'}$ A;
$\underline{U}_{pq} = 180\ \underline{|-54°5'}$ V; $\underline{U}_{mn} = 87\ \underline{|144°}$ V;
d) $P = 7900$ W; $Q = -2100$ var;
e) $\cos\varphi = 0{,}967$; *f)* $\underline{Z}_{mn} = 0{,}438 - j\ 0{,}62$.

7.34. *a)* $\underline{Z}_{11'} = 47{,}6\ \underline{|-62°}$; *b)* $\underline{I}_1 = 5{,}33\ \underline{|90°}$ A;
$\underline{I}_2 = 6{,}6\ \underline{|126°}$ A; $\underline{I}_3 = 4\ \underline{|0°}$ A; $\underline{U} = 254\ \underline{|28°10'}$ V;
d) $P = 640$ W; $Q = 1200$ var; $S = 1360$ VA;
e) $\cos\varphi = 0{,}47$; *f)* $\underline{Z}_{13} = 27\ \underline{|50°}$.

7.35. *a)* $\underline{Z}_{11'} = 14{,}3\ \underline{|-24°50'}$; *b)* $\underline{I}_1 = 7\ \underline{|24°50'}$ A;
$\underline{I}'_1 = 4{,}7\ \underline{|51°30'}$ A; $\underline{I}_2 = 3{,}5\ \underline{|-12°}$ A;
$\underline{I}'_2 = 2{,}2\ \underline{|6°20'}$ A; $\underline{I}_3 = 1{,}56\ \underline{|-38°30'}$ A;
d) $\cos\varphi = 0{,}91$.

7.36. *a)* $\underline{Z}_{11'} = \infty$; *b)* $\underline{I}_1 = 0$; $\underline{I}_2 = 10\ \underline{|90°}$ A;
$\underline{I}_3 = 10\ \underline{|-90°}$ A; $\underline{I}_4 = 0$; $\underline{I}_5 = 10\ \underline{|-90°}$ A.

7.37. $\underline{Z}_s = \dfrac{\underline{Z}_1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{\underline{Z}_1^2}{4} + \underline{Z}_1\underline{Z}_2}$.

Scanned with OKEN Scanner

7.38. $\underline{Z}_3 = 8\,\underline{|-53°}$.

7.39. $\underline{U} = 7\,\underline{Z}\underline{I}_5$.

7.40. $R = 4\Omega$; $\underline{I}_1 = 25\,\underline{|10°}$ A; $\underline{I}_2 = 25\,\underline{|-53°10'}$ A.

7.41. $R = 2{,}5\Omega$; $\underline{I}_1 = 40\,\underline{|0°}$ A; $\underline{I}_2 = 40\,\underline{|-53°}$ A.

7.42. $C = 13{,}4\ \mu F$; $\underline{I} = 6{,}1\,\underline{|-33°40'}$ A; $\underline{I}' = 5{,}6\,\underline{|-25°50'}$ A.

7.43. *a)* $C \approx 262\,\mu F$; *b)* $P_r = 410$ W; $P_r' = 285$ W.

7.44. *a)* $U = 259$ V; *b)* $C = 560\,\mu F$; *c)* $I = 75{,}9$ A; $I' = 50{,}6$ A; *d)* $\eta = 93{,}6\%$; $\eta' = 97\ \%$.

7.45. *a)* $I_1 = 7{,}56$ A; $I_2 = 25{,}9$ A; $I_3 = 29{,}9$ A; $I_4 = 56{,}8$ A; $I = 120$ A; *b)* $\cos\varphi = 0{,}76$; *c)* $C = 492\ \mu F$; *d)* $I' = 101$ A.

7.46. *a)* $f_0 = 50$ Hz; *b)* $I_0 = 12$ A; $U_{R_0} = 120$ V; $U_{L_0} = U_{C_0} = 2\,400$ V; *c)* $\frac{\Delta I}{I_0} = -54{,}6\ \%$; $\frac{\Delta U_R}{U_0} = -54{,}6\ \%$; $\frac{\Delta U_L}{U_{L_0}} = -52{,}3\ \%$; $\frac{\Delta U_C}{U_{C_0}} = -52{,}5\ \%$.

7.47. *a)* $C_0 = 63{,}7\ \mu F$; *b)* $I_0 = 20$ A; $U_{R_0} = 100$ V; $U_{L_0} = U_{C_0} = 1\,000$ V; *c)* $\frac{\Delta I}{I_0} = -9{,}75\ \%$; $\frac{\Delta U_R}{U_{R_0}} = -9{,}75\ \%$; $\frac{\Delta U_L}{U_{L_0}} = -9{,}75\ \%$; $\frac{\Delta U_C}{U_{C_0}} = -14{,}05\ \%$.

7.48. *a)* $f_0 = 80$ Hz; *b)* $I = 0{,}125$ mA; $I_L \approx 50$ mA; $I_C \approx 50$ mA.

7.49. *a)* $C_0 = 1\ \mu F$; *b)* $I = 0{,}0313$ mA; $I_L = 0{,}025$ A; $I_C \approx 0{,}025$ A.

Scanned with OKEN Scanner

7.50. *a)* $f_0 = 259$ Hz; *b)* $I = 9{,}43$ A; $I_L = 6{,}5$ A; $I_c = 4{,}75$ A.

7.51. *a)* $U = 200$ V; *b)* $C = 318\,\mu$F; $L = 31{,}8$ mH; *c)* $\underline{I}_1 = 7{,}07\,\underline{|-45°}$ A; $\underline{I}_2 = 7{,}07\,\underline{|45°}$ A.

7.52. *a)* $\omega_1 = 0{,}615\,\omega_0$; $\omega_2 = 1{,}41\,\omega_0$; $\omega_3 = 1{,}63\,\omega_0$; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; *b)* $\omega_1 = 0{,}615\,\omega_0$; $\omega_2 = 0{,}707\,\omega_0$; $\omega_3 = 1{,}63\,\omega_0$; *c)* $\omega_1 = 0{,}615\,\omega_0$; $\omega_2 = 0{,}707\,\omega_0$; $\omega_3 = 1{,}63\,\omega_0$; $\omega_4 = 1{,}85\,\omega_0$.

7.53. *b)* $I_1 = 4{,}55$ A; $I_2 = 1{,}1$A; V. fig. R. 7.53; *c)* $P \approx 82$ W; $Q = 433$ var.

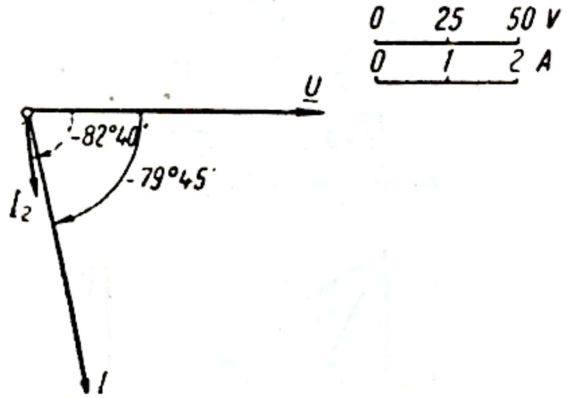


Fig. R. 7.53

7.54. *a)* $\underline{Z} = 89{,}1\,\underline{|47°40'}$; *b)* $\underline{I} = 2{,}25\,\underline{|-47°40'}$ A; *c)* $\cos\varphi = 0{,}674$; *d)* $C = 0{,}227\,\mu$F; *e)* $\underline{Z} = 71\,\underline{|32°20'}$; $\underline{I} = 2{,}82\,\underline{|-32°20'}$ A; $\cos\varphi = 0{,}845$.

7.55. *a)* $\underline{Z} = 11{,}8\,\underline{|7°12'}$; *b)* $\underline{I}_1 = 13\,\underline{|-15°}$ A; $\underline{I}_2 = 10\,\underline{|2°50'}$ A; $\underline{I}_3 = 22{,}5\,\underline{|-7°10'}$ A; *d)* $\cos\varphi = 0{,}986$; *e)* $C = 21{,}9\ \mu$F.

7.56. *a)* $\underline{Z} = 58\,\underline{|90°}$; *b)* $\underline{I}_1 = 4{,}1\,\underline{|-94°}$ A; $\underline{I}_2 = 0{,}42\,\underline{|43°}$ A; $\underline{I}_3 = 3{,}8\,\underline{|-90°}$ A.

7.57. $I_1 = 1{,}87$ A; $I_2 = 1{,}1$ A; $U = 10{,}8$ V.

7.58. $\underline{I}_1 = 0{,}37\,\underline{|-155°20'}$ A; $\underline{I}_2 = 0{,}335\,\underline{|134°45'}$ A; $\underline{I}_c = 0{,}5\,\underline{|171°40'}$ A; $\underline{I}'_1 = 0{,}28\,\underline{|-55°45'}$ A; $\underline{I}'_2 = 0{,}31\,\underline{|-147°30'}$ A.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 8

8.1. $\underline{U}_{1N} = 100\,|0°$ V; $\underline{U}_{2N} = 44{,}7\,|-116°30'$ V; $\underline{U}_{3N} = 80\,|90°$ V; $\underline{U}_{12} = 126{,}5\,|18°\,25'$ V; $\underline{U}_{23} = 120{,}9\,|-99°27'$ V; $\underline{U}_{31} = 124\,|141°20'$ V.

8.2. $\underline{U}_{1N} = 100\,|-18°25'$ V; $\underline{U}_{2N} = 44{,}7\,|-134°55'$ V; $\underline{U}_{3N} = 80\,|71°35'$ V; $\underline{U}_{12} = 126{,}5\,|0°$ V; $\underline{U}_{23} = 120{,}9\,|-117°52'$ V; $\underline{U}_{31} = 124\,|122°55'$ V.

8.3. *a)* $\underline{U}_{AB} = E\sqrt{3}\,|-30°$; $\underline{U}_{BC} = E\sqrt{3}\,|90°$; $\underline{U}_{CA} = E\sqrt{3}\,|-150°$;

b) $\underline{U}_{AB} = E\sqrt{3}\,|150°$; $\underline{U}_{BC} = E\sqrt{3}\,|-90°$; $\underline{U}_{CA} = E\sqrt{3}\,|30°$;

c) $\underline{U}_{AB} = E\,|-120°$; $\underline{U}_{BC} = 2E$; $\underline{U}_{CA} = E\sqrt{3}\,|150°$;

d) $\underline{U}_{AB} = E\,|-60°$; $\underline{U}_{BC} = E\sqrt{3}\,|90°$; $\underline{U}_{CA} = E\,|-120°$.

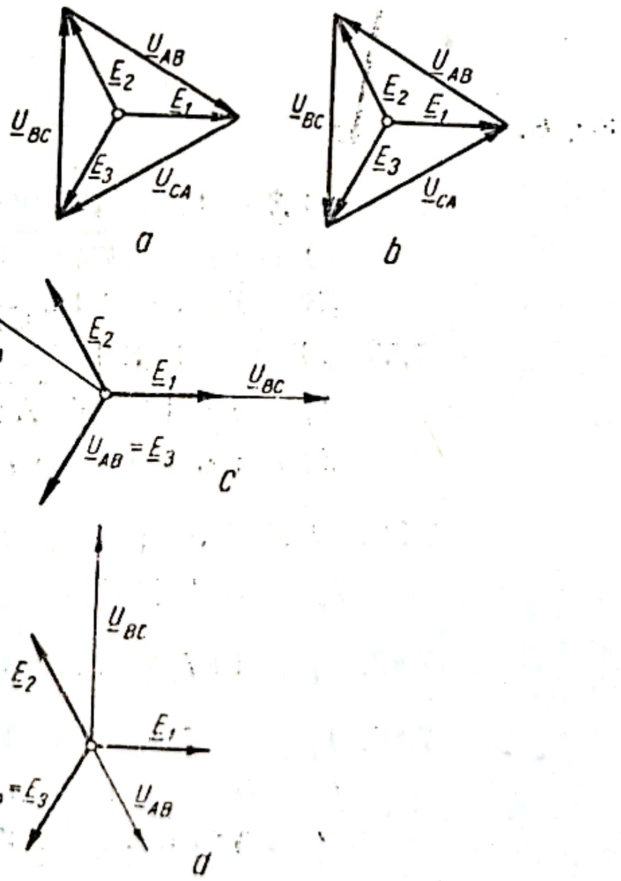


Fig. R. 8.3

8.4. $\underline{I}_1 = 10\,\underline{|30°}$ A; $\underline{I}_2 = 10\,\underline{|-90°}$ A; $\underline{I}_3 = 10\,\underline{|-210°}$ A; sistem trifazat simetric și de succesiune directă.

8.5. $\underline{U}_{12} = 173\,\underline{|90°}$ V; $\underline{U}_{23} = 173\,\underline{|-30°}$ V; $\underline{U}_{31} = 173\,\underline{|-150°}$ V.

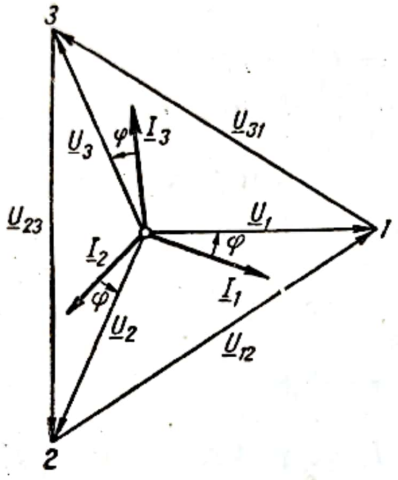


Fig. R. 8.5

8.6. Conexiune în stea.

8.7. $R = 10\Omega$; $X = 0$.

8.8. *a)* $\underline{I}_1 = 24\,\underline{|-36°50'}$ A; $\underline{I}_2 = 24\,\underline{|-156°50'}$ A; $\underline{I}_3 = 24\,\underline{|83°\,10'}$ A cu $\underline{U}_1$ origine pe fază;

b) caz particular al figurii B.8.7.;

c) $P = 6\,912$ W; $Q = 5\,184$ var; $S = 8\,640$ VA;

d) Fig. R. 8.8 (pag. 297).

8.9. $C = 127$ μF.

8.10. *a)* $\underline{I}_{12} = 41{,}6\,\underline{|-36°50'}$ A; $\underline{I}_{23} = 41{,}6\,\underline{|-156°50'}$ A; $\underline{I}_{31} = 41{,}6\,\underline{|\,83°\,10'}$ A; $\underline{I}_1 = 72\,\underline{|-76°50'}$ A; $\underline{I}_2 = 72\,\underline{|173°10'}$ A; $\underline{I}_3 = 72\,\underline{|53°10'}$ A cu $\underline{U}_{12}$ origine de fază;

c) $P = 20\,736$ W; $Q = 15\,552$ var; $S = 25\,920$ VA.

Scanned with OKEN Scanner

8.11. $U_l' = 171$ V; $\cos\varphi' = 0{,}756$; V. fig. R. 8.11.

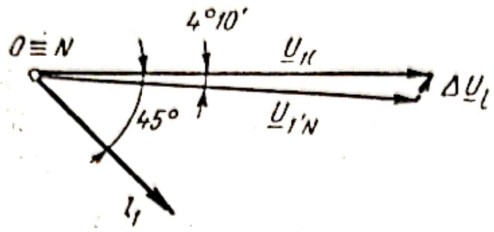


Fig. R. 8.11

8.12. $I_f = 18{,}55$ A; $I = 32{,}1$ A; $P = 10\,368$ W; $Q = 5\,184$ var; V. fig. R. 8.12 (pag. 297).

8.13. $I_f = I_l = 10{,}7$ A; $P = 3456$ W; $Q = 1\,728$ var; V. fig. R. 8.12 (pag. 297).

8.14. $\underline{Z}_Y = 18\,|\underline{36°50'}$; $\underline{Z}_\Delta = 48\,|\underline{36°50'}$.

8.15. $C_Y = 37{,}8$ μF; $C_\Delta = 12{,}6$ μF.

8.16. *b)* $I_l = 36{,}3$ A; *c)* $I_l' = I_l'' = 18{,}3$ A; $I_f' = I_f'' = 10{,}6$ A;
e) $P = 11$kW; $Q = 7{,}05$ kvar; $S = 13{,}05$ kVA.

8.17. $S = 22{,}7$ kVA; $\cos\varphi = 0{,}99$.

8.18. *a)* $I_l' = 34{,}7$ A; $I_l'' = 85$ A; *b)* $I_l = 120$ A;
d) $P = 31{,}8$ kW; $Q = 29{,}3$ kvar; $S = 43{,}2$ kVA;

8.19. $\underline{I}_R = 17{,}3\,|\underline{-30°}$ A.

8.20. $U_{l0} \approx 21{,}3$ V/km, $P_{l0} \approx 1{,}57$ kW/km.

8.21. $U_l \approx 440$ V.

8.22. $P = \mathrm{Re}\,[\underline{V}_1\underline{I}_1^* + \underline{V}_2\underline{I}_2^* + \underline{V}_3\underline{I}_3^*] =$
$= \mathrm{Re}\,[(\underline{V}_1 - \underline{V}_3)\,\underline{I}_1^*] + \mathrm{Re}\,[(\underline{V}_2 - \underline{V}_3)\,\underline{I}_2^*] =$
$= P_1 + P_2$ pentru $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$.

8.23. $\cos\varphi = \left|\dfrac{P_1 + P_2}{2\sqrt{P_1^2 - P_1P_2 + P_2^2}}\right|$.

Scanned with OKEN Scanner

8.24. $P_2 = 1\,410$ W; $\cos\varphi = 0{,}963$.

8.25. Receptor capacitiv.

8.26. $30° \leqslant \varphi \leqslant 60°$ inductiv.

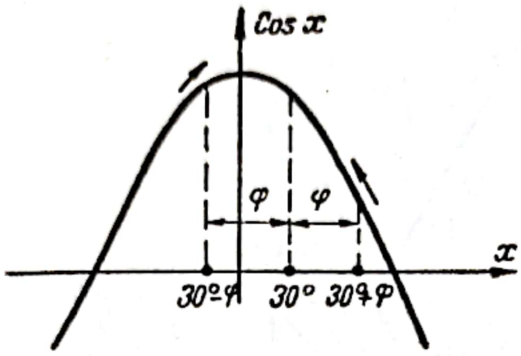


Fig. R. 8.26

8.27. $\cos\varphi = \left| \dfrac{2P_1 - P_2}{2\sqrt{P_1^2 - P_1P_2 + P_2^2}} \right|$.

8.28. $P = \mathrm{Re}\,[\underline{V}_1\underline{I}_1^* + \underline{V}_2\underline{I}_2^* + \underline{V}_3\underline{I}_3^*] = 3\,\mathrm{Re}\,[\underline{V}_1\underline{I}_1^*] = 3P_1$ cînd $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$ și $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ formează sisteme trifazate simetrice.

8.29. *a)* $\underline{I}_{12} = 1{,}92\,\underline{|0°}$ A; $\underline{I}_{23} = 1{,}44\,\underline{|-120°}$ A; $\underline{I}_{31} = 0{,}96\,\underline{|120°}$ A cu $\underline{U}_{12}$ origine de fază

b) $\underline{I}_1 = 2{,}54\,\underline{|-19°6'}$ A; $\underline{I}_2 = 2{,}92\,\underline{|-154°40'}$ A; $\underline{I}_3 = 2{,}09\,\underline{|83°25'}$ A.

8.30. *a)* $\underline{I}_{12} = 20\,\underline{|0°}$ A; $\underline{I}_{23} = 10\,\underline{|-90°}$ A; $\underline{I}_{31} = 10\,\underline{|90°}$ A; $\underline{U}_{12}$ origine de fază;
$\underline{I}_1 = 22{,}4\,\underline{|-26°30'}$ A; $\underline{I}_2 = 22{,}4\,\underline{|-153°30'}$ A; $\underline{I}_3 = 20\,\underline{|90°}$ A; $P = 7\,460$ W; $Q = 0$; $S = 7\,460$ VA. V. fig. R. 8.30 *a* (pag. 300).

b) $\underline{I}_{12} = 20\,\underline{|0°}$ A; $\underline{I}_{23} = 10\,\underline{|150°}$ A; $\underline{I}_{31} = 10\,\underline{|-150°}$ A; $\underline{I}_1 = 29\,\underline{|9°54'}$ A; $\underline{I}_2 = 29\,\underline{|170°6'}$ A; $\underline{I}_3 = 10\,\underline{|-90°}$ A; $P = 7\,460$ W; $Q = 0$; $S = 7\,460$ VA. V. fig. R. 8.30 *b* (pag. 300).

8.31. *a)* $\underline{I}_1 = 24\,\underline{|0°}$ A; $\underline{I}_2 = 24\,\underline{|-83°10'}$ A; $\underline{I}_3 = 24\,\underline{|83°10'}$ A; $\underline{I}_N \approx 29{,}7\,\underline{|0°}$ A; *b)* $P = 7\,490$ W; $Q = 0$; *c)* V. fig. R. 8.31 (pag. 301).

Scanned with OKEN Scanner

8.32. *a)* $\underline{I}_1 = 12{,}6\,|\underline{0°}\,\text{A}$; $\underline{I}_2 = 31{,}2\,|\underline{-101°30'}\,\text{A}$; $\underline{I}_3 = 31{,}2\,|\underline{101°30'}\,\text{A}$; *b)* $P = 8\,560\,\text{W}$; $Q = 0\,\text{var}$; *c)* V. fig. R. 8.32.

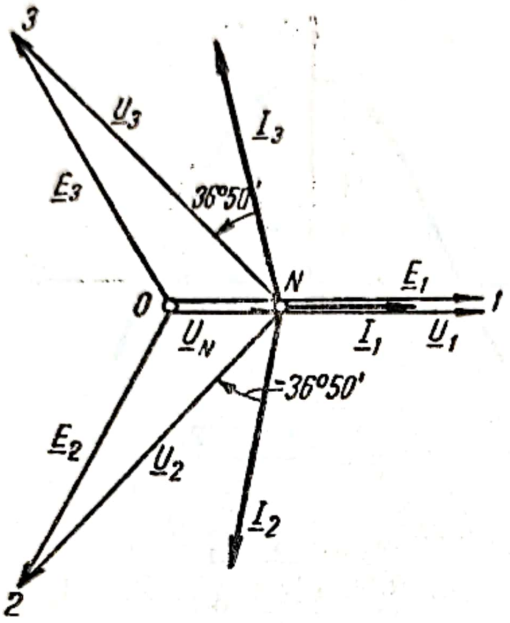


Fig. R. 8.32

8.33. *a)* $\underline{I}_1 = 24\,|\underline{0°}\,\text{A}$; $\underline{I}_2 = 24\,|\underline{156°50'}\,\text{A}$; $\underline{I}_3 = 24\,|\underline{-156°50'}\,\text{A}$; $\underline{I}_N \approx -20\,\text{A}$; *b)* $P = 7\,490\,\text{W}$; $Q = 0\,\text{var}$.

8.34. Succesiunea directă 1, 2, 3.

8.35. Succesiunea inversă 3, 2, 1.

8.36. *a)* $\underline{U}_{N0} = 71{,}8\,|\underline{47°10'}\,\text{V}$; *b)* $\underline{I}_1 = 42{,}2\,|\underline{-62°5'}\,\text{A}$; $\underline{I}_2 = 58\,|\underline{-176°20'}\,\text{A}$; $\underline{I}_3 = 41{,}9\,|\underline{102°20'}\,\text{A}$; *c)* $\underline{U}_{10} = 173\,|\underline{-22°}\,\text{V}$; $\underline{U}_{20} = 173\,|\underline{-107°10'}\,\text{V}$; $\underline{U}_{30} = 190\,|\underline{109°50'}\,\text{V}$; $\underline{U}_{12} = 279\,|\underline{36°20'}\,\text{V}$; $\underline{U}_{23} = 344\,|\underline{-87°45'}\,\text{V}$; $\underline{U}_{31} = 306\,|\underline{-144°}\,\text{V}$; *d)* $\underline{U}_{1'N} = 76\,|\underline{-28°15'}\,\text{V}$; $\underline{U}_{2'N} = 145\,|\underline{-123°10'}\,\text{V}$; $\underline{U}_{3'N} = 112{,}7\,|\underline{124°10'}\,\text{V}$; $\underline{U}_{1'2'} = 169\,|\underline{30°15'}\,\text{V}$; $\underline{U}_{2'3'} = 214\,|\underline{-94°15'}\,\text{V}$; $\underline{U}_{3'1'} = 183\,|\underline{135°10'}\,\text{V}$; *e)* $\underline{U}_{11'} = 59{,}7\,|\underline{-17°5'}\,\text{V}$; $\underline{U}_{22'} = 82\,|\underline{-131°20'}\,\text{V}$; $\underline{U}_{33'} = 59{,}3\,|\underline{147°20'}\,\text{V}$; *g)* $P = 22{,}5\,\text{kW}$; $Q = 24\,\text{kvar}$; $S = 32{,}9\,\text{kVA}$.

Scanned with OKEN Scanner

8.37. *a)* $\underline{I}_1 = 20{,}8\,|180°$ A; $\underline{I}_2 = 40{,}2\,|-75°$ A; $\underline{I}_3 = 40{,}2\,|75°$ A; $P = 4\,320$ W; $Q = 0$; V. fig. R. 8.37 *a*; *b)* $\underline{I}_1 = 20{,}8\,|0°$ A; $\underline{I}_2 = 10{,}7\,|167°$ A; $\underline{I}_3 = 10{,}7\,|-167°$ A; $P = 4\,320$ W; $Q = 0$; V. fig. R.8.37 *b* (pag. 303).

8.38. $U_V = U_{NM} = 416$ V.

8.39. $\underline{I}_{12} = 38\,|90°$ A; $\underline{I}_{23} = 38\,|-30°$ A; $\underline{I}_1 = 38\,|90°$ A; $\underline{I}_2 = 65{,}9\,|-60°$ A; $\underline{I}_3 = 38\,|150°$ A cu $\underline{U}_{12}$ origine de fază.

8.40. Locul geometric este arcul de cerc din figura **R.** 8.40.

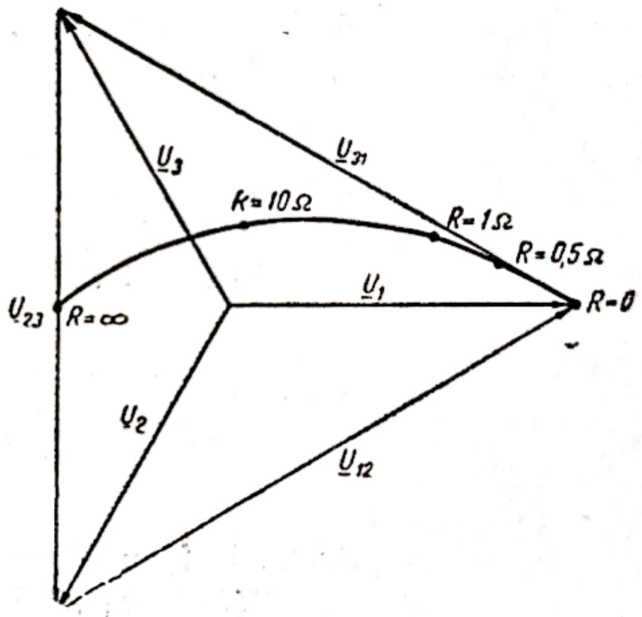


Fig. R.8.40

8.41. $\underline{I}_{12} = 20{,}8\,|0°$ A; $\underline{I}_{23} = 20{,}8\,|-120°$ A; $\underline{I}_1 = 20{,}8\,|0°$ A; $\underline{I}_2 = 36\,|-150°$ A; $\underline{I}_3 = 20{,}8\,|60°$ A cu $\underline{U}_{12}$ origine de fază.

8.42. $\underline{I}_{12} = 16{,}7\,|-55^0$ A; $\underline{I}_{23} = 9{,}6\,|-149°40'$; $\underline{I}_1 = 16{,}7\,|-55°$ A; $\underline{I}_2 = 19{,}9\,|153°40'$ A; $\underline{I}_3 = 9{,}6\,|30°\,20'$ A cu $\underline{U}_{12}$ origine de fază.

8.43. $U_V = 12$ V.

Scanned with OKEN Scanner

8.44. $\underline{I}_1 = 40{,}5\,|\!\underline{-\,42^\circ}$ A; $\underline{I}_2 = 47{,}4\,|\!\underline{-\,144^\circ\,30'}$ A; $\underline{I}_3 = 55{,}3\,|\!\underline{81^\circ 10'}$ A; $P \approx 23{,}3$ kW; $Q \approx 16{,}3$ kvar.

8.45. *a)* $\underline{I}_{12} = 40\,|\!\underline{-\,36^\circ\,50'}$ A; $\underline{I}_{23} = 50\,|\!\underline{180^\circ}$ A; $\underline{I}_{31} = 30\,|\!\underline{53^\circ\,10'}$ A; $\underline{I}_1 = 50\,|\!\underline{-\,73^\circ 50'}$ A; $\underline{I}_2 = 86{,}1\,|\!\underline{163^\circ 42'}$ A; $\underline{I}_3 = 73\,|\!\underline{19^\circ\,25'}$ A; *c)* $P_{12} = 6{,}4$ kW; $P_{23} = 10$ kW; $P_{31} = 3{,}6$ kW; $P = 20$ kW; $Q_{12} = 4{,}8$ kvar; $Q_{23} = 7{,}5$ kvar; $Q_{31} = 2{,}7$ kvar; $Q = 15$ kvar.

8.46. Soluția este similară cu a problemei 8.45, însă se inversează indicii 2 și 3.

8.47. $\underline{I}_1 = 24{,}2\,|\!\underline{-\,32^\circ 10'}$ A; $\underline{I}_2 = 140\,|\!\underline{-\,124^\circ 10'}$ A; $\underline{I}_3 = 201{,}5\,|\!\underline{68^\circ 40'}$ A.

8.48. *a)* $\underline{I}_1 = 8\,|\!\underline{143^\circ 10'}$ A; $\underline{I}_2 = 21{,}2\,|\!\underline{-\,116^\circ}$ A; $\underline{I}_3 = 21{,}2\,|\!\underline{42^\circ 20'}$ A;
b) $P = 3\,860$ W; $Q = 2\,890$ var; $S = 4\,820$ VA.

8.49. $\underline{I}_1 = 59{,}8\,|\!\underline{-\,36^\circ 50'}$ A; $\underline{I}_2 = 37{,}4\,|\!\underline{179^\circ}$A; $\underline{I}_3 = 36\,|\!\underline{108^\circ\,25'}$ A.

8.50. *a)* $\underline{I}'_{12} = 20\,|\!\underline{-\,36^\circ 50'}$ A; $\underline{I}'_{23} = 20\,|\!\underline{83^\circ 10'}$ A; $\underline{I}'_{31} = 20\,|\!\underline{156^\circ 50'}$ A;
b) $\underline{I}_1 = 34{,}7\,|\!\underline{-\,66^\circ 50'}$ A; $\underline{I}_2 = 34{,}7\,|\!\underline{53^\circ 10'}$ A; $\underline{I}_3 = 34{,}7\,|\!\underline{126^\circ 50'}$ A;
c) $\underline{I}''_{12} = 34{,}7\,|\!\underline{-\,126^\circ 50'}$ A; $\underline{I}''_{23} = 0$; $\underline{I}''_{31} = 20\,|\!\underline{-\,23^\circ 10'}$ A.

8.51. *a)* $\underline{Z}_{12e} = 5\,\Omega$; $\underline{Z}_{23e} = 10\,\Omega$; $\underline{Z}_{31e} = 10\,\Omega$;
b) $\underline{I}_1 = 55\,|\!\underline{-\,19^\circ 5'}$ A; $\underline{I}_2 = 55\,|\!\underline{-\,160^\circ\,55'}$ A; $\underline{I}_3 = 36\,|\!\underline{90^\circ}$ A;
c) $P = 17\,280$ W; $Q = 0$; $S = 17\,280$ VA.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 9

9.1. *a)* $f(t) = A\left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin\omega t - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t - \right.$
$\left. - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\cos 2k\omega t - \ldots\right]$;

b) $f(t) = \frac{2A}{\pi}\left[1 - \frac{2}{1\cdot 3}\cos 2\omega t - \frac{2}{3\cdot 5}\cos 4\omega t - \ldots\right.$
$\left. \ldots - \frac{2}{(2k-1)(2k+1)}\cos 2k\omega t - \ldots\right]$;

c) $f(t) = \frac{4}{\pi\beta}\left[\frac{1}{1^2}\sin\beta\sin\omega t + \frac{1}{3^2}\sin 3\beta\sin 3\omega t + \ldots\right.$
$\left. \ldots + \frac{1}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)\beta\sin(2k+1)\omega t + \ldots\right]$;

d) $f(t) = \frac{8A}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sin\omega t - \frac{1}{3^2}\sin 3\omega t + \frac{1}{5^2}\sin 5\omega t - \ldots\right.$
$\left. \ldots(-1)^k\frac{1}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)\omega t + \ldots\right]$;

e) $f(t) = \frac{4A}{\pi}\left[\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \ldots\right.$
$\left. \ldots + \frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\omega t + \ldots\right]$.

9.2. *a)* $A_{med} = \frac{A}{\pi} \simeq 0{,}318\cdot A$; $A_{ef} = \frac{A}{2} = 0{,}500\cdot A$;

b) $A_{med} = \frac{2A}{\pi} \simeq 0{,}636\cdot A$; $A_{ef} = \frac{A}{\sqrt{2}} = 0{,}707\cdot A$;

c) $A_{med} = 0$, $A_{ef} = A\sqrt{1 - \frac{4\beta}{3\pi}}$;

d) $A_{med} = 0$; $A_{ef} = \frac{A}{\sqrt{3}} \simeq 0{,}517\cdot A$;

e) $A_{med} = 0$; $A_{ef} = A$.

9.3. Valorile aproximative calculate cu primele trei armonice:

a) $A_{ef} \simeq 0{,}476\cdot A$; *b)* $A_{ef} \simeq 0{,}705\cdot A$; *d)* $A_{ef} \simeq$
$\simeq 0{,}577\cdot A$; *e)* $A_{ef} \simeq 0{,}95\cdot A$.

9.4 *a)* $\delta \approx 70{,}7\%$; *b* $\delta) = 100\%$; *c)* $\delta =$
$= \sqrt{1 - \frac{72\sin^2\beta}{(3\pi - 4\beta)^2\beta^2}}\cdot 100\%$; *d)* $\delta \approx 11{,}4\%$;
e) $\delta \approx 43{,}5\%$.

Scanned with OKEN Scanner

9.5. *a)* $i = |\sin\omega t|$ A; *b)* $I_0 = \frac{2}{\pi}$ A $\approx 0{,}637$ A;
$I = \frac{1}{\sqrt{2}}$ A $\approx 0{,}707$ A; *c)* $F_I = 1{,}11$; $\gamma_I = 0{,}48$.

9.6. $X_c = 104{,}5\ \Omega$.

9.7. $X_c = 73\ \Omega$.

9.8. *a)* $P = 0$; $Q = 103{,}2$ var; $S = 105{,}5$ VA;
$D = 2{,}15$ vad;
b) $P = 0$; $Q = 132$ var; $S = 150{,}7$ VA;
$D = 71{,}3$ vad.

9.9. $f = 100$ Hz.

9.10. $I = 1{,}12$ A; $P = 12{,}5$ W; $Q = -14{,}8$ var;
$S = 35{,}4$ VA; $D = 29{,}6$ vad.

9.11. $i = 6\sqrt{2}\sin\omega t + 0{,}5\sqrt{2}\sin(3\omega t - 30°) + 1{,}5\sqrt{2}\sin(5\omega t - 135°)$A;
$i_L = 5{,}36\sqrt{2}\sin(\omega t - 26°34') + 0{,}277\sqrt{2}\sin(3\omega t - 86°20') + 0{,}557\sqrt{2}\sin(5\omega t + 156°50')$ A;
$i_c = 2{,}68\sqrt{2}\sin(\omega t + 63°25') + 0{,}416\sqrt{2}\sin(3\omega t + 3°43') + 1{,}39\sqrt{2}\sin(5\omega t - 113°10')$ A.

9.12. $U_A = 112$ V; $\delta_{U_A} = 44{,}7\%$;
a) și *d)* $u_B = 70{,}7\sqrt{2}\sin(\omega t - 45°) + 15{,}6\sqrt{2}\sin(3\omega t - 116°35')$ V; $U_B = 73{,}7$ V; $\delta_{U_B} = 21{,}2\%$
b), *c)* și *e)* $u_B = 70{,}7\sqrt{2}\sin(\omega t + 45°) + 47\sqrt{2}\sin(3\omega t - 26°35')$ V; $U_B = 84{,}9$ V; $\delta_{U_B} = 55{,}4\%$.

9.13. *a)* $u_B = 24{,}2\sqrt{2}\sin(\omega t + 76°) + 50\sqrt{2}\sin(3\omega t - 45°)$ V; $U_B = 55{,}5$ V; $\delta_{U_B} = 90\%$;
b) $u_B = 96{,}8\sqrt{2}\sin(\omega t - 14°)$ V; $U_B = 96{,}8$ V; $\delta_{U_B} = 0$;
c) $u_B = 87\sqrt{2}\sin(\omega t - 29°20')$ V; $U_B = 87$ V; $\delta_{U_B} = 0$;
d) $u_B = 49\sqrt{2}\sin(\omega t + 60°40') + 50\sqrt{2}\sin(3\omega t - 45°)$ V; $U_B = 70$ V; $\delta_{U_B} = 71{,}4\%$.

Scanned with OKEN Scanner

9.14. *a)* $i = 0{,}637 + 0{,}134\sqrt{2}\sin(2\omega t - 90° - 76°) + 0{,}014\sqrt{2}\sin(4\omega t - 98° - 86°25') + 0{,}004\sqrt{2}\sin(6\omega t - 90° - 88°24')$ A;

b) $I_0 = 0{,}637$ A; $I_{ef} = 0{,}65$ A; *c)* $F_I = 1{,}02$; $\gamma_I = 0{,}2$.

9.15. *a)* $U_v = U_{ef} = 125$ V; $I_{A_1} = I_{efL} = 14{,}6$ A; $I_{A_2} = I_{efC} = 11{,}8$ A; $I_A = I_{ef} = 16{,}5$ A;
b) $U_v = U_{med} = 18$ V; $I_{A_1} = I_{medL} = 3$A; $I_{A_2} = I_{medC} = 0$; $I_A = I_{med} = 3$ A; *c)* $P = 1\,280$ W;
d) $D = 1\,420$ vad.

9.16. *a)* $I' = \frac{1}{2} I_{ef} = 0{,}500\, I_{ef}$; *b)* $I' = I_{ef}$; *c)*

$I' = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi - \beta}{\sqrt{1 - \frac{4\beta}{3\pi}}} I_{ef}$; *d)* $I' = \frac{\pi\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} I_{ef} \approx$

$\approx 0{,}962\, I_{ef}$;

e) $I' = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} I_{ef} \approx 1{,}12\, I_{ef}$.

9.17. $R_4 = \frac{R_1 R_2}{R_3}$; $C_4 = \frac{L_3}{R_1 R_2}$ legate în paralel.

9.18. $A_1 = 100$; $A_2 = 50$; $A_3 = 30$.

9.19. *a)* $U_1\sqrt{2} = 100$ V; $U_3\sqrt{2} = 50$ V; $I_1\sqrt{2} = 7{,}1$A; $I_3\sqrt{2} = 1{,}6$ A; *b)* $U = 79$ V; $I = 5{,}2$ A; *c)* $\delta_U = 44{,}5\%$; $\delta_I = 21{,}8\%$; *d)* $Z_1 = 14{,}1\Omega$; $R_1 = 10\Omega$; $X_1 \approx 10\ \Omega$; $Z_3 = 31{,}3\Omega$; $R_3 = 10\Omega$; $X_3 \approx 30\ \Omega$; *e)* $P = 270$ W; $Q = 290$ var; $S = 411$ VA; $D = 114$ vad.

9.20. *a)* $u_{12} = 220\sqrt{3}\sqrt{2}\sin(\omega t + 30°) + 40\sqrt{3}\sqrt{2}\sin(5\omega t - 75°) + 20\sqrt{3}\sqrt{2}\sin(7\omega t + 20°)$V; *b)* $U_f \approx 242$ V; $U_l = 389$ V; *c)* $I \approx 22{,}5$ A; $I_N = 13{,}7$ A; *d)* $I \approx 22$ A; $U_N = 90$ V; *e)* $P = 12\,150$ W; $Q = 10\,000$ var; $S = 16\,350$ VA; $D = 4\,500$ vad.

Scanned with OKEN Scanner

9.21. $i_f = 8{,}95\ \sqrt{2}\sin(3\omega t - 63°20')$ A;
$u_f = 220\sqrt{2}\ \sin \omega t$ V.

9.22. $E_1 = 120$ V; $E_3 = 50$ V.

Capitolul 10

10.1. *a)* $i = \frac{E}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_1+R_2}{L_1+L_2}t}\right) = 0{,}5\ (1 - e^{-500\,t})$ A;

b) $i_1 = \frac{E}{R_1} + \left[i(\theta) - \frac{E}{R_1}\right] e^{-\frac{R_1}{L_1}(t-\theta)} = 0{,}75 - 0{,}318\, e^{-1000(t-\theta)}$ A.

$i_2 = i(\theta) e^{-\frac{R_2}{L_2}(t-\theta)} = 0{,}432\ e^{-250(t-\theta)}$ A pentru $t \geqslant \theta = 4$ ms;

c) v. fig. R.10. 1.

10.2. $i_1 = i_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} + \left[\frac{L_1}{L_1 + L_2} \cdot \frac{E}{R_1} - \frac{E}{R_1 + R_2}\right] e^{-\frac{R_1+R_2}{L_1+L_2}t} = 0{,}5 - 0{,}25\, e^{-500\,t}$ A.

10.3. $C = 33{,}4\ \mu$F.

10.4. $u_V\ (0_+) = -500$ V.

10.5. $\tau = 2$ ms; $R = 1\,000\ \Omega$; $C = 2\,\mu$F.

10.6. $R_L = 16{,}7\Omega$; $R = 150\ \Omega$; $U = 10$ V.

10.7. $t_a \simeq 0{,}15$ s.

10.8. $\Delta W = \frac{q^2}{2C}\left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)$; $\tau = RC$.

10.9. $W_m = 12{,}5\ (1 - e^{-0{,}5t})^2$ J.

Scanned with OKEN Scanner

10.10. $i = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{R_2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \gamma - \varphi) -$

$$- \frac{U\sqrt{2}\sin(\gamma-\varphi)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-\frac{R}{L}t} ; \varphi = \text{arc tg}\frac{\omega L}{R}.$$

10.11. $i = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \sin(\omega t + \gamma - \varphi) -$

$$- \frac{U\sqrt{2}\cos(\gamma-\varphi)}{\omega CR\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} e^{-\frac{t}{RC}} ; \varphi = \text{arc tg}\frac{-1}{\omega CR}.$$

10.12. Regim aperiodic:

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}; \quad i = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t +$$

$$+\gamma - \varphi) + \frac{\Omega_0}{\Omega'} \frac{U\sqrt{2}e^{-\delta t}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \left[\sin(\gamma -\right.$$

$$\left. -\varphi)\,\text{sh}\,(\Omega' t - \alpha') - \frac{\Omega_0}{\omega}\cos(\gamma - \varphi)\,\text{sh}\,\Omega' t\right].$$

Regim oscilant:

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}; \quad i = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t +$$

$$+\gamma - \varphi) + \frac{\Omega_0}{\Omega'} \cdot \frac{U\sqrt{2}\,e^{-\delta t}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \left[\sin(\gamma -\right.$$

$$\left. -\varphi)\sin(\Omega t - \alpha) - \frac{\Omega_0}{\omega}\cos(\gamma - \varphi)\sin\Omega t\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Regim aperiodic critic:

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}; \quad i = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t + \gamma - \varphi) + \frac{U\sqrt{2}\, e^{-\delta t}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \left\{\left[1 - \frac{\Omega_0}{\omega} \operatorname{ctg}(\gamma - \varphi)\right]\omega t - 1\right\};$$

$$\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \delta = \frac{R}{2L}; \quad \Omega' = \sqrt{\delta^2 - \Omega_0^2};$$

$$\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2}; \quad \operatorname{tg}\alpha' = \frac{\Omega'}{\delta}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Omega}{\delta};$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

10.13.

$$i = \begin{cases} \dfrac{U\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \gamma - \varphi) - \\ \quad - \dfrac{U\sqrt{2}\sin(\gamma - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-\frac{R}{L}t}; & 0 \leqslant t < \dfrac{T}{2} \\ - \dfrac{U\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\gamma - \varphi)\left(1 + \right. \\ \quad \left. + e^{-\frac{R}{L}\cdot\frac{T}{2}}\right) e^{-\frac{R}{L}t}; & t \geqslant \dfrac{T}{2}. \end{cases}$$

10.14.

$$i = \begin{cases} \dfrac{U\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \sin(\omega t + \gamma - \varphi) - \\ \quad - \dfrac{U\sqrt{2}\sin(\gamma + \varphi)}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} e^{-\frac{t}{RC}}; & 0 \leqslant t < \dfrac{T}{2} \\ - \dfrac{U\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \sin(\gamma - \varphi) \times \\ \quad \times \left(1 + e^{-\frac{1}{RC}\cdot\frac{T}{2}}\right) e^{-\frac{t}{RC}}; & t > \dfrac{T}{2}. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

10.15. $i(t) = u(0)i_0(t) + \int_0^t u'(t-\tau)i_0(\tau)d\tau;$

$$i(t) = u(t)i_0(0) + \int_0^t u(\tau)i_0'(t-\tau)\,d\tau.$$

10.16. $i_0(t) = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$; $u(t) = U\sqrt{2}\sin\omega t.$

Se regăsește soluția problemei 10.10.

10.17. Vezi soluția problemei 10.13.

10.18. $i_R = \frac{U_0}{2R-\alpha L}\left[e^{-\alpha t} - e^{-\frac{2R}{L}t}\right] =$

$$= 2e^{-100t} - 2e^{-400t}\ \text{A};$$

$$i_L = \frac{U_0}{2\alpha L} - \frac{U_0}{2R-\alpha L}\left[\frac{R}{\alpha L}e^{-\alpha t} - \frac{1}{2}e^{-\frac{2R}{L}t}\right] =$$

$$= 3 - 4e^{-100t} + e^{-400t}\ \text{A}.$$

$$i = \frac{U_0}{2\alpha L} - \frac{U_0}{2R-\alpha L}\left[\frac{R-\alpha L}{\alpha L}e^{-\alpha t} + \frac{1}{2}e^{-\frac{2R}{L}t}\right] =$$

$$= 3 - 2e^{-100t} - e^{-400t}\ \text{A}.$$

10.19. $i_R = \frac{U_0}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2C_2}\cdot\frac{e^{-at}}{b}\operatorname{sh} bt;$

$$i_c = \frac{U_0}{R_1}\,\frac{e^{-at}}{b}(b\operatorname{ch} bt - a\operatorname{sh} bt);$$

$$i = \frac{U_0}{R_1}\cdot\frac{e^{-at}}{b}\left[b\operatorname{ch} bt - \left(a - \frac{1}{R_2C_2}\right)\operatorname{sh} bt\right].$$

unde: $a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_1C_2} + \frac{1}{R_2C_2}\right)$ și

$$b^2 = \frac{1}{R_1C_1R_2C_2}.$$

10.20. $i(t) = \frac{1}{R}u(t).$

Scanned with OKEN Scanner

10.21. *a)* $u_B = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = 100\left(1 - e^{-10^4 t}\right)$ V;

b) $u_B = U_0\, e^{-\frac{t}{RC}} = 100\, e^{-10^4 t}$ V;

c) $u_B = U_0\, e^{-\frac{R}{L}t} = 100\, e^{-10^4 t}$ V;

d) $u_B = U_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = 100\left(1 - e^{-10^4 t}\right)$ V;

e) $u_B = \frac{M}{L} U_0\, e^{-\frac{R}{L}t} = 50\, e^{-10^4 t}$ V.

10.22. *a)* $u_B = \begin{cases} U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right); \\ \quad t \in (0, T_i) \cup (2T_i, 3T_i) \cup \ldots \\ U_0\left(1 - e^{-\frac{T_i}{RC}}\right) e^{-\frac{t}{RC}} = U_B\, e^{-\frac{t}{RC}}; \\ \quad t \in (T_i, 2T_i) \cup (3T_i, 4T_i) \cup \ldots \end{cases}$

b) $u_B = \begin{cases} U_0\, e^{-\frac{t}{RC}}; \ t \in (0, T_i) \cup (2T_i, 3T_i) \cup \ldots \\ -U_0\left(1 - e^{-\frac{T_i}{RC}}\right) e^{-\frac{t}{RC}} = -U_B\, e^{-\frac{t}{RC}}; \\ \quad t \in (T_i, 2T_i) \cup (3T_i, 4T_i) \cup \ldots \end{cases}$

c) $u_B = \begin{cases} U_0\, e^{-\frac{R}{L}t}; \ t \in (0, T_i) \cup (2T_i, 3T_i) \cup \ldots \\ -U_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}T_i}\right) e^{-\frac{Rt}{L}} = -U_B\, e^{-\frac{Rt}{L}}; \\ \quad t \in (T_i, 2T_i) \cup (3T_i, 4T_i) \cup \ldots \end{cases}$

Scanned with OKEN Scanner

$$d)\ u_B = \begin{cases} U_0\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right); \\ \qquad t \in (0,\ T_i)\cup(2T_i,\ 3T_i)\cup\ldots \\ U_0\left(1-e^{-\frac{R}{L}T_i}\right)e^{-\frac{R}{L}t} = U_B\, e^{-\frac{R}{L}t}; \\ \qquad t \in (T_i,\ 2T_i)\ \cup(3T_i,\ 4T_i)\cup\ldots \end{cases}$$

$$e)\ u_B = \begin{cases} \frac{M}{L}U_0\, e^{-\frac{R}{L}t}; \\ \qquad t\in(0,\ T_i)\cup(2T_i,\ 3T_i)\cup\ldots \\ -\frac{M}{L}\left(1-e^{-\frac{R}{L}T_i}\right)e^{-\frac{R}{L}t} = -\frac{M}{L}U_B\, e^{-\frac{R}{L}t}; \\ \qquad t\in(T_i,\ 2T_i)\cup(3T_i,\ 4T_i)\cup\ldots \end{cases}$$

$U_0 = 100$ V, $RC = \frac{L}{R} = 10$s, $U_{B_1} = 100$ V;

$U_{B_2} = 63{,}2$ V; $U_{B_3} = 9{,}5$ V; $\frac{M}{L} = 0{,}5$.

10.23. $u_{C_1} = E\left[\frac{R_1}{R_1+R_2} + \left(\frac{C_2}{C_1+C_2} - \frac{R_1}{R_1+R_2}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\right] = 4 + 4\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ V;

$u_{C_2} = E\left[\frac{R_2}{R_1+R_2} + \left(\frac{C_1}{C_1+C_2} - \frac{R_2}{R_1+R_2}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\right] = 8 - 4\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ V;

$\tau = (C_1+C_2)\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = 2$ ms.

10.24. *a)* $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}\cdot\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} = 1{,}36\ \Omega$;

$k = -\frac{1}{\pi}\ln\frac{U_{C\max}-U_0}{U_0}$;

b) $t_{max} = \pi\sqrt{LC}\sqrt{1+k^2} = 1{,}02\cdot10^{-4}$s.

Scanned with OKEN Scanner

10.25. $u_c = E\left(-1 + 2e^{-\frac{t}{RC}}\right)$; $i_c = -\frac{2E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$.

10.26. $u_c = U\sqrt{2}\sin\varphi\, e^{-\frac{t}{RC}} = 94{,}4\, e^{-100t}$ V;

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\omega CR}.$$

10.27. $i_1 = I_l\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi) + I_l\sqrt{2}\sin\varphi\, e^{-\frac{R}{L}t} =$

$= 6{,}45\sqrt{2}\sin(\omega t - 57°30') + 7{,}69\, e^{-200t}$ A;

$i_2 = I_l\sqrt{2}\sin(\omega t - 120° - \varphi) +$

$+ I_l\sqrt{2}\sin(\varphi + 120°)\, e^{-\frac{R}{L}t} =$

$= 6{,}45\sqrt{2}\sin(\omega t - 177°30') + 0{,}39\, e^{-250t}$ A;

$i_3 = I_l\sqrt{2}\sin(\omega t + 120° - \varphi) +$

$+ I_l\sqrt{2}\sin(\varphi - 120°)\, e^{-\frac{R}{L}t} =$

$= 6{,}45\sqrt{2}\sin(\omega t + 62°30') - 8{,}05\, e^{-200t}$ A.

10.28. $i = 0$.

10.29. $i = 0$.

10.30. $u_s = 6\left(1 - e^{-250t}\right)$ V.

10.31. $$i = \begin{cases} 0{,}2 - 0{,}169\, e^{-t}\text{ A}; & kT \leqslant t < kT + \frac{T}{2}; \\ 0{,}616\, e^{-1{,}5t}\text{ A}; & kT + \frac{T}{2} \leqslant t < (k+1)T; \\ t \text{ în ms}; & k \gg 1; \end{cases}$$

$P_{med} = 18{,}1$ mW.

Scanned with OKEN Scanner

10.32. La aplicarea la bornele circuitului a celui de-al n-lea impuls, tensiunea condensatorului variază după legea:

$$u_C(t) = U\left(1 - e^{-\frac{t-(n-1)T}{RC}}\right);$$

$$2(n-1)T \leqslant t \leqslant (2n-1)T.$$

După n impulsuri tensiunea pe condensator este:

$$u_{C_n} = U\left(1 - e^{-\frac{nT}{RC}}\right);$$

$$(2n-1)T \leqslant t < 2nT;$$

$$RC = 10\,\text{ms};\quad T = 1\,\text{ms};\quad U = 100\,\text{V}.$$

10.33. $u_2(t) \simeq \frac{1}{RC}\int_0^t u_1(t)\,dt + u_2(0)$

pentru $t \ll (A+1)RC$.

Capitolul 11

11.1 *a)* $R_s = 5\ \text{k}\Omega$; $R_d = 3{,}3\text{k}\Omega$; *b)* $R_{ca} = 8{,}16\ \text{k}\Omega$

11.2. *a)* $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$; *b)* $I = 27{,}2$ mA.

11.3. 0,26 mA.

11.4. 73,3 mA.

11.5. 77,6 mA.

11.6. V. fig. R. 11.6 (pag. 320).

11.7. V. fig. R. 11.7 (pag. 321).

11.8. *a)* *1.* $L_s \simeq 14$H; *2.* $L_s \simeq 8{,}5$ H; *3.* $L_s \simeq 5{,}8$H;

b) *1.* $L_d \simeq 14$ H; *2.* $L_d \simeq 3$ H; *3.* $L_d \simeq 1$ H.

11.9. 5,6 W.

11.10. 0,73 W.

Scanned with OKEN Scanner

11.11. 1,08 W.

11.12. *a)* 200 spire; *b)* 0,51 A; $\cos\varphi = 0{,}174$; *c)* $X_d = 440\,\Omega$; $R_d = 2\,560\,\Omega$; $X_s = 420\,\Omega$; $R_s \simeq 75\,\Omega$.

11.13. 1,1 mm.

11.14. *a)* $I_A \simeq 0{,}46$ A; $I_B \simeq 0{,}3$ A; *b)* $L_{sA} \simeq 1{,}9$ H; $L_{sB} \simeq 1$ H.

11.15. $I_{A\,max} \simeq 0{,}29$ A; $I_{B\,max} \simeq 0{,}25$ A.

11.16. $L_{iA} = 0{,}86$ H; $L_{iB} = 1{,}65$ H.

11.17. 15 W.

11.18. $a_1 = 1\,150\ \frac{\text{Am}}{\text{Wb}}$; $a_3 = -\,1\,860\ \frac{\text{Am}^5}{\text{Wb}^3}$; $a_5 = 835\ \frac{\text{Am}^9}{\text{Wb}^5}$.

11.19. $I_1 = 0{,}0855$ A; $I = 0{,}0885$ A; $\delta_I = 21{,}6\,\%$

11.20. 2,3 ms; 620 V. v. fig. R. 11. 20 (pag. 325).

11.21. *a)* 2,16 V; *b)* 1,2 V; *c)* 0,3 V.

11.22. V. fig. R. 11. 22 (pag. 326)

Capitolul 12

12.1. *a)* 0,9 %; *b)* clasă 0,5.

12.2. 0,4 %.

12.3. $R = 100{,}022\,\Omega \simeq 100\,\Omega$; $\Delta R \simeq 0{,}1\,\Omega$; $\varepsilon_R \simeq 0{,}1\%$.

12.4. 4, 9, 49, 99.

12.5. $R_1 = 0{,}022\,\Omega$; $R_2 = 0{,}022\,\Omega$; $R_3 = 0{,}177\,\Omega$; $R_4 = 0{,}223\,\Omega$; $R_5 = 1{,}777\,\Omega$.

Scanned with OKEN Scanner

12.6. 2 Ω; 0,435 Ω; 0,220 Ω; 0,044 Ω; 0,022 Ω.

12.7. 16 %.

12.8. 2 div/mA.

12.9. *a)* 0,0092Ω; *b)* 999,6 Ω.

12.10. 130 Ω.

12.11. 130 mW; 260 mW.

12.12. *a)* 3%; *b)* 1,6%; *c)* 4,6%.

12.13. $R_1 = 5{,}9$ kΩ; $R_2 = 24$ kΩ; $R_3 = 30$ kΩ; $R_4 = 90$ kΩ; $R_5 = 150$ kΩ.

12.14. *a)* 167 mV; *b)* 7,5 kΩ; 88,5 kΩ; 898,5 kΩ.

12.15. 10 pF.

12.16. *a)* 5W/div; *b)* 400 W; *c)* 3,25 W; 0,8%.

12.17. *a)* 150 V; 450 V; *b)* 30 W/div.

12.18. *a)* 1 100 W; *b)* 12 W; ~ 1,1%.

12.19. *a)* 0,5; *b)* 2 160 W.

12.20. *a)* 1,2 kJ/rot; *b)* 1,17 kJ/rot; *c)* 0,05 kJ/rot; 2,5%; *d)* 0,975.

12.21. *a)* 240 A; 2 550 V; 486 kW; *b)* 0,794; *c)* 10,6Ω; 8,4 Ω; 6,7 Ω.

12.22. 1,6%, 1,7%, 3,7%.

12.23. *a)* 72 kJ/rot; *b)* 1 440 kJ; *c)* 24 kW.

12.24. 4,7%.

12.25. *a)* 50Ω; *b)* 0,5 Ω; 100 Ω; *c)* *1*). 1%; *2*). 5%.

Scanned with OKEN Scanner

12.26. *a)* Montajul amonte 0,06% (aval ~ 28%); *b)* 3%.

12.27. 13 mH; 1,4 Ω.

12.28. *a)* 150Ω; *b)* 0,25; *c)* 0,001Ω.

12.29. *a)* 0,0196; *b)* 0,24; *c)* $4{,}7 \cdot 10^{-3}$; *d)* 89,3 div.

12.30. 0,5.

12.31. Galvanometrul se leagă la bornele *CD*.

12.32. $S = \frac{\Delta r}{R}$.

12.33. $L_x = R_1 R_2 C_S$; $R_x = \frac{R_1 R_2}{R_S}$.

12.34. $C_x = \frac{R_1}{R_2} C_S = 2420$ $_p$F; $R_x = \frac{R_2}{R_1} R_S = 29\,\Omega$

12.35. $\omega = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$; $\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} = \frac{R_4}{R_3}$.

12.36. 800°C.

12.37. 15°C/div.

12.38. 40 div; 0,0125%/div.

Capitolul 13

13.1. $R_1 = R_2' = 2{,}72\Omega$; $X_1 = X_2' = 30{,}18\Omega$;

$R_{10} = 2{,}01 \cdot 10^5\Omega$; $X_{10} = 1{,}52 \cdot 10^4\Omega$; $R_2 = 0{,}00675\Omega$; $X_2 = 0{,}09\Omega$; $U_2 = 6\,000$ V; $\underline{I}_2 = \underline{I}_1 = 3\,333$ A; $\underline{U}_1' = 6018{,}5 + j\,23{,}8$ V.

13.2. $u_1 = 14{,}4\%$; $P_{sc} = 5$ kW; $u_{1sc} = 7{,}07\%$; $\cos\varphi_{sc} = 0{,}167$.

13.3. $W_1 = 2\,000$; $W_2 = 80$.

13.4. 6, $\frac{6}{\sqrt{3}}$, $6\sqrt{3}$, 6.

Scanned with OKEN Scanner

13.5. *a)* $\eta = 0{,}9809$; $0{,}9813$; $0{,}9832$; $0{,}9840$; $0{,}9834$; $0{,}9782$; *b)* $P_2 = 0{,}44\ P_{2n}$.; *c)* $\eta_{max} = \frac{\eta_n\ (1+\beta^2)}{\eta_n(1-\beta^2)+2\beta}$; *d)* $\eta = 0{,}9774$; $0{,}9812$; $0{,}9818$; $0{,}9789$; $0{,}9771$; $0{,}9735$; $P_2 = 0{,}44\ P_{2n}$.

13.6. $W_2 = 200$; $W_1 = 240$; $I_1 = 5$ A.

13.7. $k = 1\,500/5$A.

13.8. $P = 4$ MW.

13.9. $I_1 = 5{,}46$ A; $I_2 = 130$ A.

13.10. *a)* $U_1 = 486$ V; $I_1 = 11{,}7$ A; $\varphi_1 = 46°50'$ (inductiv); *b)* $U_1 = 453$ V și $U_1 = 428{,}2$ V; *c)* $u_{1sc} = 24{,}8\%$.

13.11. *a)* $\eta = \frac{1}{1+\frac{0{,}045}{\cos\varphi_2}}$; *b)* $\eta_{anual} = 0{,}975$; *c)* $\eta = 0{,}965$; *d)* $\eta = 0{,}967$; $\eta = 0{,}956$ (cînd înfășurarea primară nu se deconectează de la rețea).

13.12. *a)* $I_f = 8{,}8$ A; $I = 15{,}25$ A; *b)* $I_{AB} = 5{,}08$ A; $I_{BC} = 8{,}8$ A; $I_{CA} = 5{,}08$ A.

Capitolul 14

14.1. 1) $I_{ln} = 53\ \text{A} = I_{fn}$; 2) $X_0 = 8{,}04\Omega$, $R_0 = 77{,}3\Omega$, $R = 0{,}103\Omega$, $X = 0{,}344\Omega$.

14.2. *1)* $X_{s1} = 2{,}2\Omega$. $X_{s2} = 0{,}0815\Omega$; *2)* $I_{f1} = 48{,}8$, $I_l = 84{,}5$ A, $I_{f2} = 254$ A, $\Omega = 104{,}5$ rad/s, $M_p = 37$ Nm, $\cos\varphi = 0{,}222$; *3)* $R_p = 0{,}1425\Omega$; *4)* $I_{f1} = 33{,}6$ A, $I_e = 58{,}2$ A, $I_{f2} = 174{,}72$ A, $M_p = 142$ Nm; *5)* $s_m = 12{,}27\%$, $M_{max} = 157$ Nm.

14.3. *1)* $M_n = 100$ Nm, $M_{max} = 240$ Nm, $s_n = 0{,}04$, $s_m = 0{,}183$; *2), 3), 4)* v. fig. R.14.3.

Scanned with OKEN Scanner

14.4. $U = 0{,}79\ U_n$.

14.6. *1)* $X_m = 3{,}7\Omega$; *2)* $X_r = 3{,}36\Omega$, $U_p = 3\ 160$ V, $I_{rp} = 494$ A; *3)* $I_t = 260$ A.

Capitolul 15

15.1. *1)* $X_s = 0{,}385\Omega$ $X_{d_s} = 5{,}77\Omega$, $X_0 = 5{,}385\Omega$, $\alpha = 9{,}78$.

15.2. *1)* $E_n = 345$ V; *2)* $\lambda = 2{,}63$; *3)* $\lambda = 1{,}35$; $Q = 22{,}5$ kvar; 4) $V_{min} = 83{,}5$ V, $Q = 34{,}1$ kvar.

Capitolul 16

16.1. *1)* $I_n = 12$ A, $R_n = 10\Omega$; *2)* $r_i = 0{,}835\Omega$; *3)* $P_a = 1\ 660$ W, $\eta = 0{,}86$; *4)* $R_s = r_i = 0{,}835\Omega$, $I = 78$ A, $U = 65$ V, $\eta = 0{,}5$; *5)* $R_s = 10\Omega$.

16.2. *1)* $E = 215$ V; *2)* $I_g = 80$ A, $U = 200$ V; *3)* $R_s = 0{,}06\Omega$; *4)* $I_s = 720$ A, $U = 72$ V, $R_s = 0{,}1\Omega$; *5)* $P_{max} = 94$ kW, $I_s = 500$ A, $U = 137{,}6$ V, $R_s = 0{,}275\ \Omega$.

16.3. *1)* $\alpha = 1{,}3\Omega$, $k = 65$; *2)* v. fig. 16.3, *c, d, e.*

16.4. *1)* $\eta = 0{,}84$, $\eta_{3/4} = 0{,}831$, $\eta_{1/2} = 0{,}796$; $\eta_{1/4} = 0{,}651$; *2)* $I = 29{,}6$ A.

16.6. *1)* $r_i = 0{,}22\Omega$; $E_n = 209$ V; *2)* $M_{an} = 183$ Nm $= 18$ kgm; *3)* $M_{en} = 200$ Nm, $M_0 = 17$ Nm; *4)* $M_e = k\Phi \frac{U}{r_i} - (k\Phi)^2 \cdot \frac{\Omega}{r_i}$;

5) v. fig. 16.6; *6)* $n_0 = 522{,}76$ rot/min.

16.7. $R_{p0} = 1{,}5\Omega$ $R_{p1} = 0{,}57\Omega$, $R_{p2} = 0{,}14\Omega$.

16.8. V. fig. 16.8,*a,b.*

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 17

17.1. 174 km/s.

17.2. 0,0735 mm/s.

17.3. 1 280 km/s.

17.4. 55 000°K (imposibil, depășind temperatura de evaporare a wolframului).

17.5. 5,7%.

17.6. 23 V.

17.7. 2,53 W; 1,21 W; 1,32 W.

17.8. 100 mA; 86,5 V.

17.9. 340 mA.

17.10. 50 Ω.

17.11; 17.12. V. fig. R. 17.11.

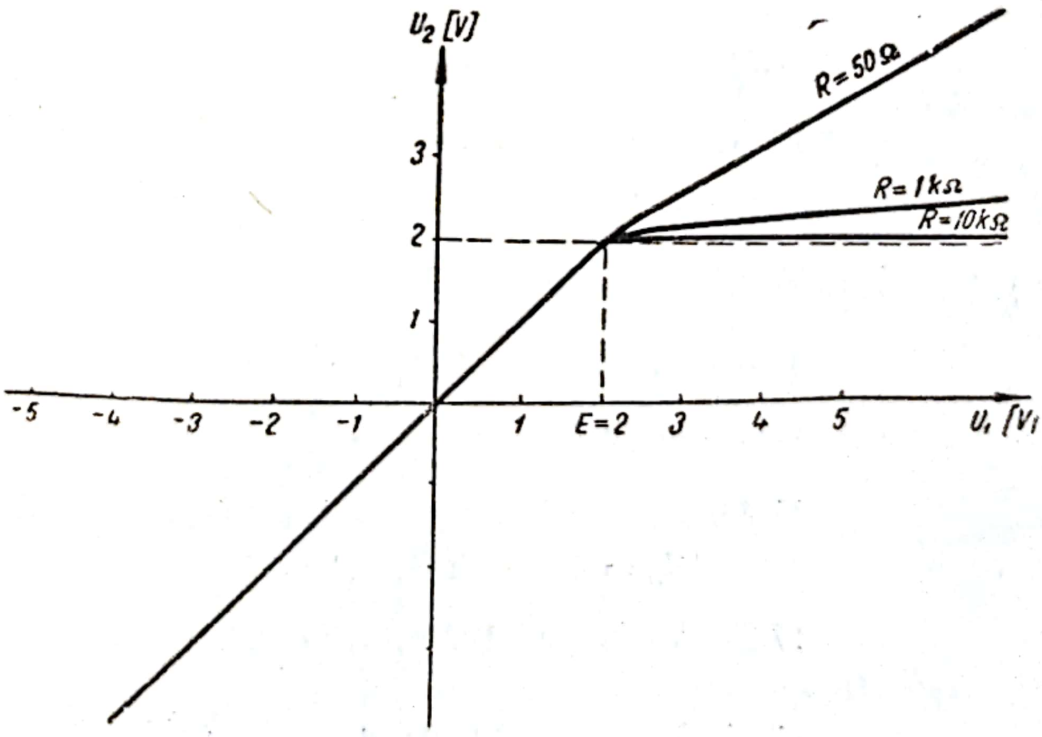


Fig. R.17.11

Scanned with OKEN Scanner

17.13. *a)* 83Ω; *b)* 163Ω; *c)* 60Ω.

17.14. 200 kΩ.

17.15.

$$U_2 = \begin{cases} U_1 & \text{pentru } U_1 \leqslant E = 2\text{V}; \\ 0{,}91 + 0{,}545\, U_1 & \text{pentru } U_1 \geqslant E = 2\text{V}. \end{cases}$$

17.16. 93,5 V.

17.17. 2,45.

17.18. *a)* 18 V; 56,5 mA; 56,5 V; *b)* 36 V; 56,5 mA; 113 V; *c)* 36 V; 56,5 mA; 56,5 V.

17.19. 61 kW.

17.20. ~ 0,48 V.

17.21. 4,5 s; 560 kΩ.

17.22. *a)* $U_G = -8$ V; $I_A = 3{,}1$ mA; $U_A = 195$V; *b)* $U_G = 0$ V; $I_A = 5{,}8$ mA; $U_A = 62$ V.

17.23. $U_G = -8$ V; $I_A = 0{,}8$ mA; $U_A = 160$ V.

17.24. *a)* $I_A = 7{,}2$ mA; $U_A = 200$ V; *b)* $I_A = 2{,}5$ mA; $U_A = 150$ V; *c)* $I_A = 0{,}4$ mA; $U_A = 110$ V.

17.25. ~ 30 V; — 15.

17.26. $R_i = 13$ kΩ; $\mu = 19$.

17.27. ~ 15,1.

17.28. $R_C = 2{,}5$ kΩ; $R_A = 122$ kΩ; $C_C = 1\,\mu$F; $C_A = C_G = 2$nF; $A = 58$.

17.29. V. fig. R. 17.29; $A' = 27$.

17.30. V. fig. R. 17.30; $A = \dfrac{\mu R_C}{R_i + (\mu + 1) R_C}$.

Scanned with OKEN Scanner

17.31. $$I_0 = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\frac{E_{max}}{R_s}(1+\cos\omega\tau); & \tau \leqslant \frac{T}{2}, \\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad ; & \tau > \frac{T}{2}. \end{cases}$$

17.32. $R_C = 200\ \Omega$; $R_A = 10\ \text{k}\Omega$; $R_E = 33\ \text{k}\Omega$; $C_C = 100\ \mu\text{F}$; $C_A = C_G = 20\ \text{nF}$.

17.33. 23 V; 46.

17.34. $R_i = 0{,}5\ \text{M}\Omega$; $S = 4{,}7\ \text{mA/V}$.

17.35. $R_C = 520\,\Omega$; $R_A = 33\,\text{k}\Omega$; $R_E = 200\ \text{k}\Omega$; $C_C = 3\ \mu\text{F}$; $C_E = 8\,\text{nF}$; $A \simeq 60$.

17.36. $\eta \simeq 1\%$.

17.37. $U_A = 250$ V; $I_A = 2{,}1$ mA; $U_E = 140$ V; $U_G = -2{,}5$ V.

17.38. V. fig. R. 17.38 (pag. 372); v. fig. 17.37 *a* (pag. 353).

17.39. $I_C = 1$ mA, $U_C = -6$ V, $I_B = 17\ \mu\text{A}$.

17.40. V. fig. R. 17.40 (pag. 373).

17.41. $$A_U = -\frac{R_C h_{21}}{h_{11} + R_C(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21})} = -67;$$

$$A_i = \frac{h_{21}}{1 + h_{22}R_C} = 74;$$

$$Z_i = \frac{(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21})R_C + h_{11}}{1 + h_{22}R_C} = 2{,}2\ \text{k}\Omega.$$

17.42. V. fig. R. 17.42 (pag. 373).

17.43. $\Phi = 0{,}20$ lm.

Capitolul 18

18.1. $R_{0°} = 17{,}23\ \Omega$; $R_{35°} = 19{,}8\Omega$; $R_{70°} = 22{,}65\ \Omega$.

18.2. $R = 25\ \Omega$.

Scanned with OKEN Scanner

18.3. Cupru 95 mm²; oțel-aluminiu 150 mm².

18.4. Oțel 95 mm²; cupru 16 mm².

18.5. $s = 0{,}55$ mm²; $I_f = 6$ A.

18.6. $\Delta U = 2{,}32$ V.

18.7. $s = 34{,}4$ mm².

18.8. $s = 119$ mm².

18.9. $s = 16$ mm²; $s_1 = 17{,}7$ mm²; $s_2 = 10$ mm².

18.10. $s_1 = 37{,}8$ mm²; $s_2 = 30{,}2$ mm².

18.11. $I_f = 20$ A; $s = 7{,}8$ mm²; $s' = 3{,}9$ mm².

18.12. $\Delta U_1 = 660$ V; $\delta U_1 = 26$ V; $\Delta U_{12} = \sqrt{3} \cdot \Delta U_1$; $\delta U_{12} = \sqrt{3} \cdot \delta U_1$.

18.13. $U = 30{,}23$ kV.

18.14. $I_A = 23$ A; $I_B = 21$ A; $s' = 2{,}73$ mm²; $s'' = 3{,}96$ mm².

18.15. $I_{f1} = 6$ A; $I_{f2} = 6$ A; $I_{f3} = 6$ A; $I_{f4} = 10$ A; $I_{f5} = 10$ A; $I_f = 15$ A.

18.16. $\Delta W_1 = 735\,000$ kWh; $\Delta W_2 = 606\,000$ kWh.

Capitolul 19

19.1. $\eta = 0{,}95$.

19.2. $P = 228$ W; $\eta = 0{,}81$.

19.3. $M_2 = 5{,}36$ g; $A_3 = 58{,}7$ (nichel); $A_4 = 63{,}5$ (cupru); $I = \frac{5\,000}{t}$ A.

Scanned with OKEN Scanner

19.4. $t = 3\,752$; $s = 1\,\text{h}\,2'\,32''$.

19.5. $h = 0{,}011$ mm.

19.6. $W = 3\,460$ kWh.

19.7. $W' = 57$ kWh; $G = 422$ kg/zi.

19.8. $E = 1{,}111$ V.

19.9. $E = 2{,}32$ V.

19.10. $E = 1{,}7$ V.

19.11. $E = 2{,}012$ V.

19.12. $I_d = 10$ A; $\eta_{Ab} = 0{,}8$; $U_i = 2{,}19$ V.

19.13. $I_i = 12{,}5$ A; $U_i = 2{,}29$ V.

19.14. $p\text{H} = 10$.

Scanned with OKEN Scanner

ANEXA 2

Permitivitatea relativă și rigiditatea dielectrică

	ε_r	E_d [kV/cm]
1. Aer	1,0	30
2. Ulei	2,3	150
3. Hîrtie	1,5—4	150
4. Sticlă	6,0	300
5. Parafină	2,1	300
6. Cuarț	5,0	300
7. Mică	6,0	2 000

ANEXA 3

Rezistivități și coeficienți de temperatură

$$\rho_\theta = \rho_{20} [1 + \alpha (\theta - 20)]$$

	ρ_{20} [$\Omega mm^2/m$]	α
1. Cupru	0,01752	0,004
2. Aluminiu	0,03	0,004
3. Oțel	0,1	0,006
4. Constantan	0,49	— 0,00005
5. Wolfram	0,053	0,005
6. Nichel	0,703	0,006
7. Argint	0,016	0,0035

Scanned with OKEN Scanner

8. Manganin	0,043	0,00001
9. Nichelină	0,4—0,44	0,0002
10. Grafit	12—100	— 0,005

ANEXA 4

Călduri specifice și densități de masă

	c [cal/kg °C]	γ [kg/dm³]
1. Argint	57,5	10,5
2. Nichel	106	8,8
3. Cupru	98,5	8,8
4. Aluminiu	210	2,7
5. Oțel	120	7,8
6. Ulei de transformator	440	0,91

ANEXA 5

Constante fizice

1. Masa electronului	$0{,}91 \cdot 10^{-30}$ kg
2. Sarcina electronului	$1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C
3. Sarcina electronului/masa electronului	$1{,}759 \cdot 10^{11}$ C/kg
4. Permitivitatea ε_0	$8{,}854 \cdot 10^{-12} \approx \frac{1}{36\pi} 10^{-9}$ F/m
5. Permeabilitatea μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
6. Viteza luminii în vid c	$3 \cdot 10^{8}$ m/s
7. Accelerația gravitației (valoare normală)	9,80665 m/s²

Scanned with OKEN Scanner

ANEXA 7

Transformate Laplace

	$f(t)$ $(t) \geqslant 0$	$F(s)$
1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
3.	t	$\frac{1}{s^2}$
4.	$t^n;\ n \geqslant 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
6.	$\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$	$\frac{1}{s(s+a)}$
7.	$\frac{1}{a^2}\left(e^{-at}+a^t-1\right)$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
8.	$(1-at)\,e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$
9.	$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)\ (s+b)}$
10.	$\frac{1}{ab}+\frac{1}{b-a}\left(\frac{e^{-bt}}{b}-\frac{e^{-at}}{a}\right)$	$\frac{1}{s\ (s+a)\ (s+b)}$
11.	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt}-ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)\ (s+b)}$
12.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Scanned with OKEN Scanner

a) *Tablă silicioasă E1A*

B [Gs]	0	200	400	600	800	B [Gs]
	H [A/cm]					
6 000	3	3	3	3,2	3,3	4 000
7 000	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	5 000
8 000	4	1,1	4,2	4,3	4,5	6 000
9 000	4,8	4,9	5,1	5,3	5,5	7 000
10 000	5,7	5,9	6,2	6,5	6,9	8 000
11 000	7,2	7,5	7,7	8,2	8,7	9 000
12 000	9,3	9,9	10,5	11,3	11,9	10 000
13 000	12,8	13,8	14,6	15,7	17	11 000
14 000	18,2	19,8	21,2	23,5	26,5	12 000
15 000	29	31	33,5	37	41	13 000
16 000	47	53	60	67	75	14 000
17 000	83	93	104	116	128	15 000
18 000	142	156	171	187	205	16 000
19 000	224	246	269	294	322	17 000
20 000	350	378	408	439	476	18 000
21 000	515	556	598	643	689	19 000
22 000	735	783	831	880	930	20 000
23 000	980	1 032	1 085	1 035	1 195	21 000
24 000	1 270	1 340	1 415	1 495	1 570	
25 000	1 650	1 730	1 920	1 820	2 030	

Scanned with OKEN Scanner

racteristici de magnetizare $H=f(B)$

b) *Oțel turnat*

0	200	400	600	800
H [A/cm]				
1,6	1,7	1,7	1,8	1,8
1,9	1,9	2	2	2,1
2,2	2,2	2,3	2,4	2,5
2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
3,2	3,3	3,5	3,7	3,9
4,1	4,4	4,6	5	5,3
5,6	6	6,4	6,8	7,2
7,6	8,2	8,7	9,3	9,9
10,5	11,1	11,8	12,6	13,4
14,2	15,2	16,4	17,6	18,8
20,1	21,0	22	23	24
25	27	29,5	32,3	35,1
38	42,5	47,5	53	58,7
65	71,3	78,5	86	95
108	113	123	135	148
162	177	193	209	227
245	269	293	320	352
387	425	485	560	655

c) *Tole de fier pentru poli*

B [Gs]	0	200	400	600	800
	H [A/cm]				
1 000	1				
2 000	1,4				
3 000	1,8				
4 000	2,1				
5 000	2,5				
6 000	2,95				
7 000	3,45				
8 000	4,05				
9 000	4,8	4,95	5,1	5,3	5,5
10 000	5,7	5,95	6,15	6,42	6,65
11 000	6,9	7,2	7,48	7,75	8,08
12 000	8,45	8,8	9,2	9,6	10,15
13 000	10,8	11,45	12,2	13	13,93
14 000	14,9	15,95	17	18,35	20,1
15 000	22,7	25,6	28,8	32	36,5
16 000	40	45	50	55,8	62,3
17 000	70,5	89,5	80,5	98	108
18 000	119	130	141	156	170
19 000	188	207	226	245	265
20 000	290	315	342	380	—

Scanned with OKEN Scanner

13.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
14.	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$
15.	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$
16.	$\operatorname{sh} at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
17.	$\operatorname{ch} at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
18.	$\sin at \sin bt$	$\frac{2 a b s}{[s^2 + (a + b)^2]\,[s^2 + (a - b)^2]}$
19.	$t \sin at$	$\frac{2 a s}{(s^2 + a^2)^2}$
20.	$t \cos at$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
21.	$t \operatorname{sh} at$	$\frac{2 a s}{(s^2 - a^2)^2}$
22.	$\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t - \tau) \cdot d\tau$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
23.	$\frac{d}{dt}\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t - \tau)\, d\tau = f_1(0)\, f_2(t) +$	
	$+ \int_0^t f_1'(\tau)\, f_2(t - \tau)\, d\tau$	$s F_1(s) F_2(s)$

Scanned with OKEN Scanner

a) Unităţile sistemului practic raţionalizat MKSA şi expresia

Mărimea	Denumirea unităţii	Simbolul unităţii
1	2	3
		I. Unităţi
Lungime	metru	m
Masă	kilogram	kg
Timp	secundă	s
Intensitatea curentului electric	amper	A
		II. Unităţi
		1. *Unităţi*
Viteză	metru pe secundă	m/s
Acceleraţie	metru pe secundă la pătrat	m/s^2
Forţă	newton	N
Energie (lucru mecanic)	joule	J
Cuplu	newton-metru	N.m
Putere	watt	W
Presiune	pascal	P
Unghi (arc)	radian	rad
Viteză unghiulară (pulsaţie)	radian pe secundă	rad/s
Frecvenţă de rotaţie	rotaţii pe minut	rot/min
Frecvenţă	herz	Hz
		2. *Unităţi*
Sarcină electrică	coulomb	C
Tensiune electrică	volt	V
Intensitatea cîmpului electric	volt pe metru	V/m
Moment electric	coulomb-metru	C.m
Inducţia electrică	coulomb pe metru pătrat	C/m^2
Polarizaţie electrică	coulomb pe metru pătrat	C/m^2
Capacitate electrică	farad	F
Densitate de curent	amper pe metru pătrat	A/m^2
Rezistenţă, impedanţă, reactanţă	ohm	Ω
Rezistivitate	ohm-metru	Ωm
Conductanţă, susceptanţă, admitanţă	unu pe ohm	$\frac{1}{\Omega}$
Conductivitate	unu pe ohm-metru	$1/\Omega m$

Scanned with OKEN Scanner

ANEXA 8

valorii acestora în funcție de unitățile celorlalte sisteme uzuale

Expresia valorii unității în sistemele de unități			
Practic nerațională (MKSA)	CGS electrostatic	CGS electromagnetic	Gauss
4	5	6	7
fundamentale			
m	10^2 cm	10^2 cm	10^2 cm
kg	10^3 g	10^3 g	10^3 g
s	s	s	s
A	$3 \cdot 10^9$ u.e.s.	10^{-1} u.e.m.	$3 \cdot 10^9$
secundare			
mecanice			
m/s	10^2 cm/s	10^2 cm/s	10^2 cm/s
m/s^2	10^2 cm/s^2	10^2 cm/s^2	10^2 cm/s^2
N	10^5 dyn	10^5 dyn	10^5 dyn
J	10^7 erg	10^7 erg	10^7 erg
Nm	10^7 dyn cm	10^7 dyn cm	10^7 dyn cm
W	10^7 erg/s	10^7 erg/s	10^7 erg/s
P	10 dyn/cm^2	10 dyn/cm^2	10 dyn/cm^2
rad	rad	rad	rad
rad/s	rad/s	rad/s	rad/s
rot/min	rot/min	rot/min	rot/min
Hz	Hz	Hz	Hz
electrice			
C	$3 \cdot 10^9$ u.e.s.	10^{-1} u.e.m.	$3 \cdot 10^9$
V	$\frac{1}{300}$ u.e.s.	10^8 u.e.m.	$\frac{1}{300}$
V/m	$\frac{1}{3} 10^4$ u.e.s.	10^6 u.e.m.	$\frac{1}{3} 10^{-4}$
Cm	$3 \cdot 10^{11}$ u.e.s.	10 u.e.m.	$3 \cdot 10^{11}$
$4\pi \frac{C\ str}{m^2}$	$4\pi \cdot 3{,}10^5$ u.e.s.	$4\pi\ 10^{-5}$ u.e.m.	$4\pi \cdot 3 \cdot 10^5$
C/m^2	$3 \cdot 10^5$ u.e.s.	10^{-5} u.e.m.	$3 \cdot 10^5$
F	$9 \cdot 10^{11}$ u.e.s. (cm)	10^{-9} u.e.m.	$9 \cdot 10^{11}$ (cm)
A/m^2	$3 \cdot 10^5$ u.e.s.	10^{-5} u.e.m.	$3 \cdot 10^5$
Ω	$\frac{1}{9} 10^{-11}$ u.e.s.	10^9 u.e.m.	$\frac{1}{9} 10^{-11}$
Ωm	$\frac{1}{9} 10^{-9}$ u.e.s.	10^{11} u.e.m.	$\frac{1}{9} 10^{-9}$
$\frac{1}{\Omega}$	$9 \cdot 10^{11}$ u.e.s.	10^{-9} u.e.m.	$9 \cdot 10^{11}$
$1/\Omega m$	$9 \cdot 10^9$ u.e.s.	10^{-11} u.e.m.	$9 \cdot 10^9$

Scanned with OKEN Scanner

Mărimea	Denumirea unității	Simbolul unității
1	2	3
		3. *Unități*
Flux magnetic	weber	W
Inducție magnetică	weber pe metru pătrat	W/m²
Intensitatea cîmpului magnetic	amper pe metru	A/m
Moment magnetic	weber-metru	Wm
Polarizație magnetică	weber pe metru pătrat	W/m²
Inductivitatea	henry	H
Forța magnetomotoare	amper	A
Reluctanța	amper pe weber	A/W
Permeanța	weber pe amper	W/A

ANEXA 8
(continuare)

b) Unități incoerente

1. Angström — Å = 10^{-8} cm
2. Barn — barn = 10^{-24} cm²
3. Kilowattore — kWh = $3{,}6 \cdot 10^{6}$ J
4. Electron-volt — eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J
5. Bar — bar = 10^{6} dyne/cm²
6. Cal-putere — CP = 736 W

Scanned with OKEN Scanner

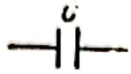
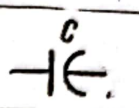
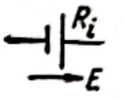
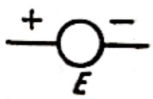
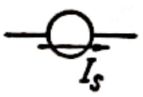
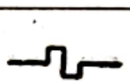
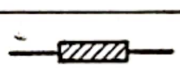
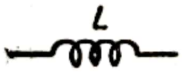
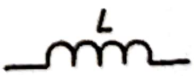
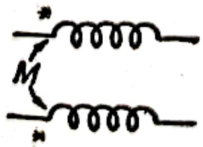
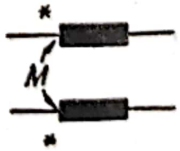
Expresia valorii unității în sistemele de unități			
Practic nerațională (MKSA)	CGS electrostatic	CGS electromagnetic	Gauss
4	5	6	7
magnetice			
W	$\frac{1}{300}$ u.e.s.	10^8 Mx (maxwell)	10^8 Mx
W/m^2	$\frac{1}{3}10^{-6}$ u.e.s.	10^4 Gs (gauss)	10^4 Gs
4π mOe (milioersted)	$4\pi \cdot 3 \cdot 10^7$ u.e.s.	$4\pi \cdot 10^3$ Oe (oersted)	$4\pi \cdot 10^3$ Oe
$\frac{1}{4\pi}\frac{Nm}{mOe}$	$\frac{1}{3}\frac{1}{4\pi}$ u.e.s.	$\frac{1}{4\pi}10^{10}$ u.e.m.	$\frac{1}{4\pi}10^{10}$
$\frac{1}{4\pi}\frac{N}{mOe \cdot m^2}$	$\frac{1}{3}\frac{1}{4\pi}10^{-6}$ u.e.s.	$\frac{1}{4\pi}10^4$ u.e.m.	$\frac{1}{4\pi}10^4$
H	$\frac{1}{9}10^{-11}$ u.e.s.	10^9 u.e.m.	10^9
4π dGb (decigilbert)	$4\pi \cdot 3 \cdot 10^9$ u.e.s.	$4\pi \cdot 10^{-1}$ Gb (Gilbert)	$4\pi \cdot 10^{-1}$ Gb
A/W	$9 \cdot 10^{11}$ u.e.s.	10^{-9} u.e.m.	10^{-9}
W/A	$\frac{1}{9}10^{-11}$ u.e.s.	10^9 u.e.m.	10^9

c) Prefixe pentru unități

Denumirea	Raportul față de unitatea principală	Simbol
1. Atto	10^{-18}	a
2. Femto	10^{-15}	f
3. Pico	10^{-12}	p
4. Nano	10^{-9}	n
5. Micro	10^{-6}	μ
6. Mili	10^{-3}	m
7. Centi	10^{-2}	c
8. Deci	10^{-1}	d
9. Kilo	10^3	k
10. Mega	10^6	M
11. Giga	10^9	G
12. Tera	10^{12}	T

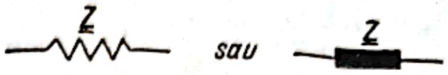
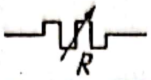
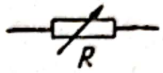
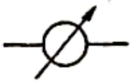
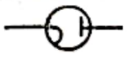
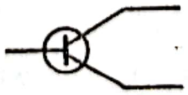
Scanned with OKEN Scanner

Simboluri grafice

Elementul de circuit	*Simbol recomandat*	*Simbol auxiliar*
1. Condensator de capacitate C		
2. Rezistor de rezistență R		
3. Sursă de tensiune având t.e.m. E și rezistență interioară R_i		
4. Sursă ideală de tensiune având t.e.m. E și $R_i = 0$		
5. Sursă ideală de curent I_s și conductanță internă nulă $G_i = 0$		
6. Rezistor neliniar		
7. Element de circuit magnetic cu reluctanță (rezistență magnetică) R_m		
8. Bobină ideală cu inductivitatea proprie L și rezistența $R = 0$		
9. Bobine cuplate magnetic având inductivitatea mutuală M		

Scanned with OKEN Scanner

Anexa 9 (continuare)

Elementul de circuit	*Simbol recomandat*	*Simbol auxiliar*
10. Element de circuit electric cu impedanța complexă $\underline{Z}$		
11. Rezistor variabil		
12. Ampermetru		
13. Voltmetru		
14. Wattmetru		
15. Contor de energie activă		
16. Galvanometru		
17. Transformator		
18. Motor		
19. Generator		
20. Redresor		
21. Diodă		
22. Triodă		
23. Transistor		
24. Stabilizator cu gaz		

Scanned with OKEN Scanner

Rezistențele și reactanțele liniilor

a) *Rezistențele și reactanțele liniilor aeriene cu conductoare de cupru*

Secțiunea conductoarelor [mm²]		4	10	25	35	50	70	95	120	150	240
Rezistența [Ω/km]		4,65	1,84	0,74	0,54	0,39	0,28	0,2	0,158	0,123	0,078
Reactanța [Ω/km]	Distanța medie geometrică [mm] 400	0,385	0,355	0,319	0,308	0,297	0,283	0,274	—	—	—
	600	0,411	0,381	0,345	0,336	0,325	0,309	0,300	0,292	0,287	—
	800	0,429	0,399	0,363	0,352	0,341	0,327	0,318	0,310	0,305	—
	1 000	—	0,413	0,377	0,366	0,355	0,341	0,332	0,324	0,319	0,305
	1 500	—	0,438	0,402	0,391	0,380	0,366	0,357	0,349	0,344	0,330
	2 000	—	0,457	0,421	0,410	0,398	0,385	0,376	0,368	0,363	0,349
	2 500	—	—	0,435	0,424	0,413	0,399	0,390	0,382	0,377	0,363
	3 000	—	—	0,446	0,435	0,423	0,410	0,401	0,393	0,388	0,374
	4 000	—	—	0,464	0,453	0,441	0,428	0,419	0,411	0,406	0,392

b) *Rezistențele și reactanțele liniilor aeriene cu conductoare OL-Al, normale*

Secțiunea conductorului [mm²]		35	50	70	95	120	150	185	240
Rezistența [Ω/km]		0,857	0,610	0,444	0,326	0,240	0,198	0,160	0,124
Reactanța [Ω/km]	Distanța medie geometrică [mm] 1 500	0,385	0,374	0,364	0,353	0,347	0,340	—	—
	2 000	0,403	0,392	0,382	0,371	0,365	0,358	—	—
	2 500	0,417	0,406	0,396	0,385	0,379	0,372	0,365	0,357
	3 000	0,429	0,418	0,408	0,397	0,391	0,384	0,377	0,369
	4 000	0,446	0,435	0,425	0,414	0,408	0,401	0,394	0,386
	5 000	—	—	0,440	0,429	0,423	0,416	0,409	0,401

c) *Rezistențele în curent continuu și reactanțele inductive exterioare ale liniilor aeriene cu conductoare de oțel*

Secțiunea conductorului [mm²]		5	35	50	70	95	120
Rezistența [Ω/km]		7,04	3,80	2,86	1,80	1,50	1,14
Reactanța inductivă exterioară [Ω/km]	Distanța medie geometrică [mm] 400	0,318	0,290	0,281	—	—	—
	800	0,361	0,333	0,324	0,311	0,303	—
	1 500	0,400	0,372	0,363	0,350	0,342	0,326
	2 000	—	0,391	0,382	0,369	0,361	0,345
	3 000	—	0,416	0,407	0,394	0,386	0,370

Scanned with OKEN Scanner

ANEXA 11

Constante electrochimice

a) *Potențiale normale de electrod*

Formarea cationilor	Electrod de referință		Formarea cationilor	Electrod de referință	
	Calomel	Hidrogen		Calomel	Hidrogen
Li^+	—3,30	—3,02	As^{+++}	+0,02	+0,3
K^+	—3,20	—2,92	Cu^{++}	+0,06	+0,344
Ca^{++}	—3,16	—2,88	Co^{+++}	+0,12	+0,4
Ba^{++}	—3,08	—2,8	Cu^+	+0,24	+0,52
Na^+	—2,99	—2,71	Ag^+	+0,52	+0,8
Mg^{++}	—2,68	—2,4	$Hg_2/2Hg^{++}$	+0,52	+0,8
Mn^{++}	—1,28	—1,0	Hg^{++}	+0,58	+0,86
Zn^{++}	—1,04	—0,76	Au^{+++}	+1,08	+1,36
Cr^{++}	—0,83	—0,55	Au^+	+1,22	+1,5
Cr^{+++}	—0,78	—0,5			
Fe^{++}	—0,71	—0,43	Formarea anionilor		
Cd^{++}	—0,68	—0,4			
Co^{++}	—0,54	—0,26			
Ni^{++}	—0,50	—0,22	Te^{--} solid	—1,09	—0,91
Pb^{++}	—0,43	—0,126	Se^{--} solid	—1,05	—0,77
Sn^{++}	—0,38	—0,10	S^{--} solid	—0,83	—0,55
Fe^{+++}	—0,32	—0,04	J^- solid	+0,26	+0,54
$H_2/2H^+$	—0,28	0,00	Br^- lichid	+0,42	+0,54
Bi^{+++}	—0,08	+0,2	Cl^- gaz	+1,08	+1,36
Sb^{+++}	—0,04	+0,24	F^- gaz	+2,56	+2,84

b) *Dependența dintre pH și activitatea ionilor* H^+ *și* OH^-

a_{H+}	10^0	10^{-2}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-12}	10^{-14}
a_{OH-}	10^{14}	10^{12}	10^{-9}	10^{-7}	10^{-2}	10^0
*p*H	0	2	5	7	12	14

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. Răduleț, R. *Bazele teoretice ale electrotehnicii*. Vol. I, II, III. București, Litografia învățământului, 1953, 1955.
2. Răduleț, R. *Bazele electrotehnicii* (Probleme). Vol. I. București, Editura didactică și pedagogică, 1963.
3. Kasatkin, A. C., Perekalin, M. A. *Electrotehnika*. Moskva, Gosenergoizdat, 1961.
4. Neiman, L. P., Kalantarov, P. L. *Bazele teoretice ale electrotehnicii*. București, Editura tehnică.
5. Budeanu, C. ș.a. *Bazele teoretice ale electrotehnicii* (Probleme). București, Editura tehnică, 1959.
6. Zaițev, I. A., Lurie, A. G. *Sbornik zadacii po elektrotehnike*. Moskva, Gosenergoizdat, 1952.
7. Simonyi, K. *Elméleti Villamosságtan*. Budapest Tankönyvkiado, 1958.
8. Plonsey, R., Collin, R. *Principles and applications of electromagnetic fields*. New-York, Mc Craw-Hill, 1961.
9. Peskin, E. *Transient and steady-state analysis of electric networks*. New-York, D. Van Nostrand Company, 1961.
10. Polivanov, K. M. *Sbornik zadacii po osnovom elektrotehniki teoria elektriceskih țepei*. Moskva, Gosenergoizdat, 1962.
11. Janet, P. *Problèmes et exercises d'électricité générale*. Paris, Gauthier-Villars, 1935.
12. Goldin, E. O. *Culegere de probleme la cursul de bazele teoretice ale electrotehnicii*. Moskva, Gosenergoizdat, 1960.
13. Schönfeld, H. *Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik*. Berlin, Springer, 1960.
14. Polivanov, K. M. *Fiziceskie osnovî elektrotehniki*. Moskva, Gosenergoizdat, 1950.
15. Cahen, F. *Electrotehnique*, Paris, Gauthier-Villars, 1962.
16. Becker, R. *Theorie der Electrizität*, Leipzig, B.G. Teubner, 1951.
17. Ionkin, P. A. ș.a. *Sbornik zadacii i uprojnenii po obșcii elektrotehnike*. Moskva, Sovetskaia Nauka, 1955.
18. Popa, M., Wagner, I. *Culegere de probleme de electricitate și electrotehnică*. București, E.E.S., 1953.
19. *Manualul inginerului electrician*. Vol. III, București, Editura tehnică, 1956.

Scanned with OKEN Scanner

20. Hortopan, Gh. *Utilizarea energiei electrice*. București, Litografia M. I., 1960.
21. Atanasiu, I., Facsko, G. *Electrochimie — principii teoretice*. București, Editura tehnică, 1958.
22. Beskov, S. D. *Calcule tehno-chimice*. București, Editura tehnică, 1953.
23. *Electrotehniceskii spravocinik*. Moskva, Gosenergoizdat, 1952.
24. Vieweger, H. V. *Aufgaben und Lösungen gleich-und Wechselstromtechnik*, Berlin, Springer, 1940.
25. Konstantinov, V. I. ș.a. *Sbornik zadacii po teoreticescoi elektrotehnike*. Moskva, Gosenergoizdat, 1962.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINSUL

I. Bazele fizice ale electrotehnicii

Cap. 1. Cîmpul electric 7
Cap. 2. Circuite electrice liniare de curent continuu 24
Cap. 3. Circuite electrice neliniare de curent continuu 43
Cap. 4. Cîmpul magnetic 54
Cap. 5. Circuite magnetice 62
Cap. 6. Cîmpul electromagnetic 74

II. Circuite electrice de curent variabil

Cap. 7. Circuite monofazate în regim sinusoidal 91
Cap. 8. Circuite trifazate în regim sinusoidal 130
Cap. 9. Circuite electrice liniare în regim periodic nesinusoidal 151
Cap. 10. Circuite electrice în regim tranzitoriu 163
Cap. 11. Circuite electrice neliniare în curent alternativ 177

III. Aplicaţii tehnice ale fenomenelor electrice şi magnetice

Cap. 12. Măsurări electrice 189
Cap. 13. Transformatoare electrice 209
Cap. 14. Maşina asincronă 217
Cap. 15. Maşina sincronă 223
Cap. 16. Maşini de curent continuu 227
Cap. 17. Electronică industrială 233
Cap. 18. Reţele electrice 256
Cap. 19. Electrochimie 262

IV. Indicaţii metodice şi rezolvări

Scanned with OKEN Scanner

V. Anexe

1. Răspunsuri 388
2. Permitivitatea relativă și rigiditatea dielectrică 440
3. Rezistivități și coeficienți de temperatură 440
4. Călduri specifice și densități de masă 441
5. Constante fizice 441
6. Caracteristici de magnetizare 666
7. Transformate Laplace 442
8. Unități de măsură 777
9. Simboluri grafice 448
10. Rezistențele și reactanțele liniilor 450
11. Constante electrochimice 451

Bibliografie 452

Tehnoredactor : PROSAN ILINCA

Dat la cules 01.12.1965. Bun de tipar 30.IV.1966. Apărut 1966. Tiraj 6000+130 1/1 pînză. Hîrtie scris tip I A de 80 g/m², 16/70×100. Coli editoriale 24,010. Coli de tipar 28,75 planșe 1. Plan 2118. A. 14.749/11.X.1965. C. Z. pentru bibliotecile mari 621.3(075.8). C. Z. pentru bibliotecile mici 621.3.

Întreprinderea Poligrafică „13 Decembrie 1918", Str. Grigore Alexandrescu nr. 89—97, București, Republica Socialistă România Comanda nr. 2228.

Scanned with OKEN Scanner